TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.6, donderdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 2 juni, 2016

Delft University of Technology

Outline

Uniciteit

Stel twee machtreeksen

$$\sum a_n z^n \qquad \text{en} \qquad \sum b_n z^n$$

hebben beide een positieve convergentiestraal en dezelfde somfunctie op $U_r(0)$ voor een $r > 0$.

Dan volgt $a_n = b_n$ voor *alle* n.

Producten

Als $\sum a_n z^n$ en $\sum b_n z^n$ beide convergentiestraal ten minste R hebben dan geldt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (|z| < R)$$

waarbij $c_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} b_\nu$.

Wegens de absolute convergentie (als $|z| < R$) weten we dat links en rechts dezelfde *analytische* functie staat.

Delft University of Technology

Delen: De cosinus

We weten: $(\cos z)^{-1}$ is analytisch, behalve waar $\cos z = 0$.
En dus

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

op een schijf om 0, met straal $\frac{1}{2}\pi$, maar niet groter.
De convergentiestraal is dan gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$.

De cosinus

Rekenen:

$$
\begin{aligned}
1 &= (1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 + \cdots)(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots) \\
&= a_0 + a_1 z + (a_2 - \frac{1}{2}a_0)z^2 + (a_3 - \frac{1}{2}a_1)z^3 \\
&\qquad + (a_4 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{24}a_0)z^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

En dus: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 - \frac{1}{2}a_0 = 0$, $a_3 - \frac{1}{2}a_1 = 0$, $a_4 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{24}a_0 = 0$, ...

Maar dan: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{2}a_1 = 0$, $a_4 = \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{24}a_0 = \frac{5}{24}$, ...
Voor het volledige verhaal: zie Opgave III.2.10.

Delft University of Technology

Reeksen van reeksen

Neem aan $\sum f_n$ convergeert normaal op $U_r(0)$ met som F en

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k \qquad (\text{op } U_r(0))$$

dan geldt

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \right) z^k \qquad (\text{op } U_r(0))$$

Want we weten dat $F^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ op $U_r(0)$.

Getaltheorie

Voorbeeld 4 op pagina 120.

We werken op de eenheidsschijf $U_1(0)$.

Voor $k \in \mathbb{N}$ hebben we $f_k(z) = \frac{z^k}{1-z^k}$, allemaal analytisch op $U_1(0)$.

Als $r < 1$ dan geldt op $U_r(0)$ de afschatting

$$\left|f_k(z)\right| = \left|\frac{z^k}{1-z^k}\right| \leqslant \frac{r^k}{1-r^k} \leqslant \frac{r^k}{1-r}$$

NB $|z^k| \leqslant r^k$ en $|1-z^k| \geqslant 1-r^k \geqslant 1-r$.

Conclusie: de reeks $\sum f_k$ convergeert normaal op $U_1(0)$.

TU Delft
Delft University of Technology

Getaltheorie

Voor elke k geldt

$$f_k(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{km}$$

Voor de somfunctie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ hebben we de machtreeks $\sum d_n z^n$.
Elke d_n is een som van 1-en;
en f_k draagt een 1 bij precies dan als k een deler is van n.
Conclusie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$$

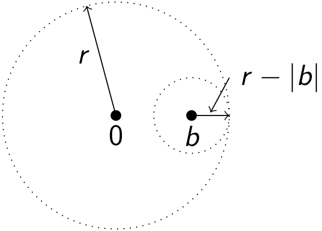
waarbij d_n het aantal delers (inclusief 1 en n) van n is.

Ander centrum nemen

Neem aan $\sum a_n z^n$ heeft convergentiestraal $r > 0$ en schrijf $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
Neem b met $|b| < r$ dan kunnen we een machtreeks voor f rond b maken:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n$$

met convergentiestraal ten minste $r - |b|$.



Ander centrum nemen

Hoe drukken we de b_n uit in b en de a_n?

Mogelijkheid 1: differentiëren

$$b_n = \frac{f^{(n)}(b)}{n!}$$

en

$$f^{(n)}(b) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k b^{k-n}$$

of

$$b_n = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k b^{k-n}$$

Delft University of Technology

Ander centrum nemen

Mogelijkheid 2: algebra

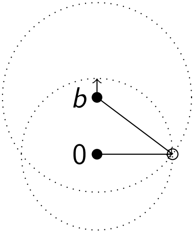
$$z^k = (z - b + b)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (z - b)^n b^{k-n}$$

en dus

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (z - b)^n b^{k-n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} a_k \binom{k}{n} b^{k-n} (z - b)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k \binom{k}{n} b^{k-n} (z - b)^n
\end{aligned}$$

Ander centrum nemen

De convergentiestraal kan groter zijn dan $r - |b|$.
Neem de meetkundige reeks en $b = \frac{3}{4}\mathrm{i}$ (dus $r - |b| = \frac{1}{4}$).
De somfunctie is $(1 - z)^{-1}$ en die is analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
Dus de convergentiestraal van de reeks om b is gelijk aan $\frac{5}{4}$.



Inverteren

Stel $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, met $a_1 \neq 0$.
Dus $f(0) = 0$ en $f'(0) \neq 0$.
Er is dus een inverse functie, g, van f (op een $U_r(0)$).
Hoe bepalen we de machtreeks, $\sum b_n z^n$, van g?

Invullen en oplossen . . .

Delft University of Technology

Inverteren

Bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots$$

en dus

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1} + \cdots$$

voor de inverse functie hebben we

$$g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \cdots$$

Inverteren

Een paar stappen, zeg voor b_1, b_2 en b_3.
Het volstaat $b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3$ in te vullen:

$$z = (b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3) - \frac{1}{2}(b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3)^2 + \frac{1}{3}(b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3)^3$$

Goed kijken en alleen het hoogstnoodzakelijke opschrijven:

$$z = b_1 z + (b_2 - \frac{1}{2} b_1^2) z^2 + (b_3 - b_1 b_2 + \frac{1}{3} b_1^3) z^3$$

Dus $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Inverteren

We weten $g(z) = \exp z - 1$ en dus $b_n = 1/n!$ voor alle n.

Dit is hoe Newton de machtreeks van $\exp x - 1$ ontdekte/maakte.
Hij wilde de oppervlakte onder $(1+t)^{-1}$, tussen 1 en x, bepalen en vond eerst de reeks voor $\ln(1+x)$.
Het inverse probleem, welke x hoort by oppervlakte y, leidde tot de reeks voor $\mathrm{e}^y - 1$.

Zie Pythagoras, februari 2004

TU Delft
Delft University of Technology

Locatie van nulpunten

Stelling (III.3.1)

Laat D een gebied zijn en $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch en niet constant 0. Dan is de verzameling $N(f) = \{z \in D : f(z) = 0\}$ discreet in D.

We noemen $A \subseteq D$ discreet in D als A *geen* verdichtingspunten in D heeft.
Dus voor elke $z \in D$ is er een $r > 0$ met $U_r(0) \cap A \subseteq \{z\}$.

Locatie van nulpunten: bewijs

De verzameling $N(f)$ is gesloten dus elk verdichtingspunt van $N(f)$ zit in $N(f)$.

Neem een verdichtingspunt a van $N(f)$, dus $f(a) = 0$ en schrijf de machtreeks van f rond a op, noem de convergentiestraal r.

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

met $k = \min\{m : a_m \neq 0\}$ (we nemen aan dat er zo'n m is).

Locatie van nulpunten: bewijs

Als $z \in U_r(a)$ en $z \neq 0$ dan geldt

$$\frac{f(z)}{(z-a)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^n$$

De som rechts geeft een analytische functie $g(z)$ en als $z \in U_r(a) \setminus \{a\}$ dan geldt $g(z) = 0$ desda $f(z) = 0$.

Dus a is een verdichtingspunt van $N(g)$ en dus $g(a) = 0$.

Maar dan $a_k = g(a) = 0$, tegenspraak.

Conclusie $a_m = 0$ voor *alle m*.

Delft University of Technology

Locatie van nulpunten: bewijs

Neem een ander punt, b, in D en een kromme $\alpha : [0,1] \to D$ met $\alpha(0) = a$ en $\alpha(1) = b$.
Bekijk $O = \{t : f(\alpha(t)) = 0\}$.
Wegens de continuïteit van α is er een $\varepsilon > 0$ met $[0,\varepsilon) \subseteq O$.
Bekijk $t_0 = \sup\{t : [0,t) \subseteq O\}$.
Dan is $\alpha(t_0)$ een verdichtingspunt van $N(f)$.
Als t_0 dat is er een $s > t_0$ met $[t,s) \subseteq O$ en dus $[0,s) \subseteq O$, tegenspraak.
Conclusie: $t_0 = 1$ en dus $f(b) = 0$.

Echte conclusie: $f(z) = 0$ voor alle $z \in D$.

Uniciteit

Stelling (II.3.2)

Als D een gebied is en f en g twee analytische functies op D dan zijn equivalent

- $f = g$
- $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ *heeft een verdichtingspunt in D*
- *er is een punt z_0 in D met $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ voor alle n*

Delft University of Technology

Uniciteit

Conclusie: als $M \subseteq D$ een verdichtingspunt in D heeft en $f : M \to \mathbb{C}$ is een functie dan is er ten hoogste één analytische functie, $\bar{f}$, op D met $\bar{f}(z) = f(z)$ voor $z \in M$.

Speciaal geval (veelgebruikt): als D een gebied is met $D \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$
en als f en g analytisch zijn op D
en als $f(x) = g(x)$ voor $x \in D \cap \mathbb{R}$
dan geldt $f = g$.

Delft University of Technology

Kan dit?

Een analytische functie f met $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$, voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Een analytische functie g met $g(\frac{1}{2n}) = g(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$, voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Hoeveel analytische functies, h, zijn er op $\mathbb{C}$ met $N(h) = \mathbb{Z}$.

Nuldelers

Als $f, g : D \to \mathbb{C}$ analytisch zijn (D is een gebied) en $f(z)g(z) = 0$ voor alle $z \in D$
dan geldt $f(z) = 0$ voor alle z of $g(z) = 0$ voor alle x.

Als $f(a) \neq 0$ dan is a een verdichtingspunt van $N(g)$.

Open-afbeeldingstelling

Stelling (III.3.3)

Als D een gebied is en $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch en niet constant dan is $f[D]$ ook een gebied (dus open en samenhangend).

We nemen $a \in D$ en $b = f(a)$; we moeten een $\rho > 0$ vinden met $U_\rho(b) \subseteq f[D]$.

Voor het gemak nemen we aan $a = b = 0$.

Open-afbeeldingstelling: bewijs

Schrijf de machtreeks van f rond 0 op:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$$

NB $n > 1$ want $f(0) = 0$.
Haal z^n buiten de haakjes: $f(z) = z^n h(z)$ met

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} z^k$$

Neem $r > 0$ zó dat $h(z) \neq 0$ als $z \in U_r(0)$.

Open-afbeeldingstelling: bewijs

Terug in de tijd: $U_r(0)$ is stervormig, dus is er een analytische functie $h_0 : U_r(0) \to \mathbb{C}$ zó dat $h(z) = h_0(z)^n$ op $U_r(0)$.

Definieer $f_0(z) = zh_0(z)$, dan geldt $f(z) = f_0(z)^n$ op $U_r(0)$.

Er geldt $f_0'(0)^n = a_n$, dus $f_0'(0) \neq 0$.

Inverse-functiestelling: er is een $s > 0$ zó dat $U_s(0) \subseteq f_0[U_\rho(0)]$.

Nu nog de n-de macht nemen: $U_{s^n}(0) \subseteq f[U_\rho(0)]$.

Dus $r = s^n$ is als gewenst.

Delft University of Technology

Structurele uitspraak

Hierboven is f geschreven als compositie van twee afbeeldingen:

eerst f_0, die is conform in de buurt van 0 want $f_0'(0) \neq 0$

dan: $z \mapsto z^n$.

Als f injectief is op $U_\rho(0)$ dan geldt dus $f'(z) \neq 0$ op een omgeving van 0.
Want:als $f'(z) = 0$ dan is f een (ten minste) twee-op-één afbeelding nabij z.

Delft University of Technology

Maximum-modulus principe

Stelling (III.3.5)

Als $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch is (D een gebied) en als $|f|$ een lokaal maximum heeft in $z_0 \in D$ dan is f constant.

Eerste bewijs: stel f is niet constant en zij $z \in D$ willekeurig en zij $r > 0$.
Er is een $s > 0$ zó dat $U_s(f(z)) \subseteq f[U_r(z)]$.
Maar dan is $\left|f(z)\right|$ niet maximaal (plaatje op het bord).

Delft University of Technology

Maximum-modulus principe

Tweede bewijs: herinner de middelwaardestelling:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \, \mathrm{d}t$$

Stel $|f(z)|$ is maximaal op $U_s(z)$.
Voor $r < s$ geldt

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| \, \mathrm{d}t \leqslant |f(z)|$$

Maar dan $|f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| = |f(z)|$ voor alle t en alle r.
Dus $|f|$ is constant op $U_s(0)$ en dus op heel D.

TU Delft
Delft University of Technology

Lemma van Schwarz

We bekijken de eenheidsschijf: $\mathbb{E} = \{z : |z| < 1\}$.

Stelling

Stel $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ is analytisch en $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant 1$ voor alle z. Neem ook aan dat $f(0) = 0$.
Dan geldt $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant |z|$ voor alle z, en ook $\bigl|f'(0)\bigr| \leqslant 1$.

Bewijs: definieer

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

Dan heeft g een primitieve op $\mathbb{E}$ en is dus analytisch op $\mathbb{E}$.

Lemma van Schwarz: bewijs

Nu: als $0 < r < 1$ dan geldt, als $|z| = r$, de ongelijkheid $\bigl|g(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{r}$.

De gesloten schijf $\bar{U}_r(0)$ is compact, dus $|g|$ neemt daar een maximum aan; volgens het maximum-modulusprincipe moet dat op de rand gebeuren.

Dus op $\bar{U}_r(0)$ geldt $\bigl|g(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{r}$.

Neem de limiet voor $r \to 1$: er geldt $\bigl|g(z)\bigr| \leqslant 1$ op $\mathbb{E}$.

Klaar!

Delft University of Technology

Lemma van Schwarz, extra

Stel nu dat er een punt $a \in \mathbb{E}$, ongelijk aan 0, is met $\bigl|f(a)\bigr| = |a|$.

Dan heeft $|g|$ in a een lokaal maximum.

En dus is g constant, met waarde ζ met $|\zeta| = 1$.

Conclusie: òf $\bigl|f(z)\bigr| < |z|$ als $z \neq 0$,
òf er is een ζ met $|\zeta| = 1$ zó dat $f(z) = \zeta z$ (dus f is een rotatie).

Idem voor $f'(0)$: als $\bigl|f'(0)\bigr| = 1$ dan is f een rotatie.

Delft University of Technology

Afbeeldingen van $\mathbb{E}$ naar $\mathbb{E}$

Stel $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ is analytisch en bijectief met $\varphi(0) = 0$.

Dan geldt $\bigl|\varphi(z)\bigr| \leqslant |z|$ voor alle z.

Dan geldt ook: $|\varphi^{-1}(z)| \leqslant |z|$, ofwel $|z| \leqslant \bigl|\varphi(z)\bigr|$, voor alle z.

Conclusie: φ is een rotatie.

Reëel: elke macht x^a $(a > 0)$ is een analytische bijectie van $(0,1)$ naar $(0,1)$.

Delft University of Technology

Afbeeldingen van $\mathbb{E}$ naar $\mathbb{E}$

Terug in de tijd (23 mei): Opgave I.1.11.

Neem $a \in \mathbb{E}$
Dan geldt

$$|z| = 1 \text{ dan en slechts dan als } \left|\frac{z-a}{z\bar{a}-1}\right| = 1$$

en

$$|z| < 1 \text{ dan en slechts dan als } \left|\frac{z-a}{z\bar{a}-1}\right| < 1$$

Afbeeldingen van $\mathbb{E}$ naar $\mathbb{E}$

De afbeelding $\varphi_a : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, gedefinieerd door

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{z\bar{a}-1}$$

is analytisch, zijn eigen inverse ($\varphi_a^{-1} = \varphi_a$, reken maar na), en voldoet aan $\varphi_a(0) = a$ en $\varphi_a(a) = 0$.

Delft University of Technology

Afbeeldingen van $\mathbb{E}$ naar $\mathbb{E}$

Stelling (III.3.10)

Stel $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *is bijectief en analytisch.Dan zijn er* $a \in \mathbb{E}$ *en* $t \in [0, 2\pi)$ *zó dat*

$$\varphi(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \frac{z - a}{z\bar{a} - 1}$$

Bewijs: neem $a = \varphi^{-1}(0)$ en bekijk $\psi = \varphi \circ \varphi_a$.
ψ is analytisch en bijectief, en $\psi(0) = 0$.

Delft University of Technology