TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.8, donderdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 9 juni, 2016

Outline

1. III.4 Singularities of Analytic Functions

2. III.5 Laurent Decomposition
   - Voorbeeld: $\arctan z$

Delft University of Technology

Essentiële singulariteiten

Voorbeeld: 0 is een essentiële singulariteit van $\sin \frac{1}{z}$.

Neem $r > 0$. De functie $z \mapsto \frac{1}{z}$ beeldt $U_r'(0)$ af op $\{z : |z| > r^{-1}\}$.

Neem $k \in \mathbb{N}$ met $2k\pi > r^{-1}$.
$\sin z$ beeldt de strook $\{z : 2k\pi \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant (2k+1)\pi\}$ af op $\mathbb{C}$.

Dus $\sin \frac{1}{z}$ beeldt $U_r'(0)$ af op (heel) $\mathbb{C}$.

Delft University of Technology

Essentiële singulariteiten

Bijna hetzelfde verschijnsel:

Voor elke $r > 0$ beeldt $\exp \frac{1}{z}$ de verzameling $U_r'(0)$ af op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

In beide gevallen is 0 dus geen ophefbare singulariteit, en ook geen pool.

Essentiële singulariteiten

Stelling (Casorati-Weierstraß)

Stel a is een essentiële singulariteit van $f : D \to \mathbb{C}$.
Dan geldt: voor elke $r > 0$ ligt de beeldverzameling $f[U_r'(a)]$ dicht in $\mathbb{C}$.
Dus: voor elke $r > 0$, voor elke $b \in \mathbb{C}$, voor elke $\varepsilon > 0$ is er een $z \in U_r'(a)$ met $\bigl|f(z) - b\bigr| < \varepsilon$.

Delft University of Technology

Essentiële singulariteiten

Bewijs: stel niet.

Neem dus $r > 0$, $b \in \mathbb{C}$, en $\varepsilon > 0$ met $\left|f(z) - b\right| \geqslant \varepsilon$ voor *alle* $z \in U_r'(0)$.

Dus de functie

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

is begrensd op $U_r'(a)$.
Dus a is een ophefbare singulariteit van g, en dus een ophefbare singulariteit, of een pool, van f.

Essentiële singulariteiten

Nog mooier

Stelling (Grote stelling van Picard)

Stel a is een essentiële singulariteit van $f : D \to \mathbb{C}$.
Dan geldt: voor elke $r > 0$ is de beeldverzameling $f[U'_r(a)]$ gelijk aan $\mathbb{C}$, op misschien één punt na.

Bij $\exp \frac{1}{z}$ hadden we heel $\mathbb{C}$ op het punt 0 na.

Essentiële singulariteiten

Is er ook een 'kleine' stelling? Ja:

Stelling (Kleine stelling van Picard)

Als $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch is en als $f[\mathbb{C}]$ twee punten van $\mathbb{C}$ mist dan is f constant.

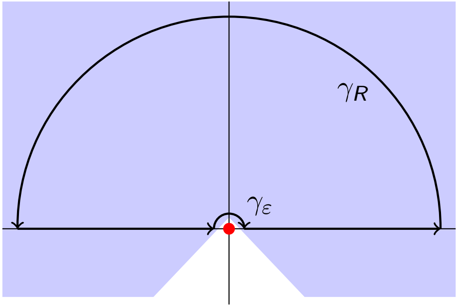
Delft University of Technology

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

De functie $\frac{\sin z}{z}$ is even dus we zoeken de helft van $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.
We gaan vlak langs een singulariteit van $\frac{\exp(\mathrm{i}z)}{z}$ integreren.

We nemen de volgende kromme.

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$: een kromme



De kromme $\Gamma_{\varepsilon,R}$ bestaat uit

Het interval $[\varepsilon, R]$

De halve cirkelboog met straal R (positief)

Het interval $[-R, -\varepsilon]$

De halve cirkelboog met straal ε (negatief)

Zit in een stervormig gebied waar f analytisch is

Dus $\oint_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$: vervolg

- $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = -\pi i$ (komt straks)
- $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ (komt ook straks)
- $\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = 2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ ($\frac{\cos x}{x}$ is oneven)

We vinden

$$0 = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \oint_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\pi i + 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

en dus

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

TU Delft
Delft University of Technology

De integraal langs γ_ε

We schrijven

$$\frac{\exp \mathrm{i}z}{z} = \frac{1}{z} + \frac{\exp \mathrm{i}z - 1}{z} \qquad (z \neq 0)$$

NB $g(z) = \frac{\exp \mathrm{i}z - 1}{z}$ heeft een ophefbare singulariteit in 0.

De integraal langs γ_ε

Parametriseren: $\gamma_\varepsilon(t) = \exp(\mathrm{i}(\pi - t))$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.
En dan

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi -\mathrm{i}\,\mathrm{d}t = -\pi\mathrm{i}$$

De functie $g(z)$ is begrensd op $U_1'(0)$, zeg $\bigl|g(z)\bigr| \leqslant M$.
Dan

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M \cdot \pi\varepsilon$$

dus $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Klaar.

Delft University of Technology

Een handig lemma

Lemma (Jordan, zie ook pagina 140)

Als $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ *en als* $\omega > 0$ *dan*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} e^{\mathrm{i}\omega z} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

waar α_R *de halve cirkel* $\{z : |z| = r, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *is.*

Wij passen dit toe met $\omega = 1$ en $f(z) = 1/z$.

Schrijf $M_R = \max\bigl\{|f(z)| : z \in \alpha_R\bigr\}$; onze aanname zegt dus

$$\lim_{R\to\infty} M_R = 0$$

Lemma van Jordan: bewijs

Parametrizeer de halve cirkel: $z = Re^{\mathrm{i}t}$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ en werk de integraal uit:

$$\int_0^\pi f(Re^{\mathrm{i}t}) e^{\mathrm{i}\omega R\cos t} e^{-\omega R \sin t} Re^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$$

Hieruit halen we:

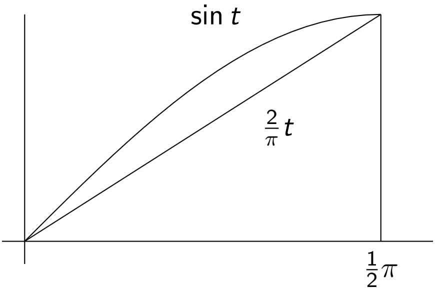
$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\leqslant M_R \cdot R \cdot \int_0^\pi e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{*}{\leqslant} 2M_R \cdot R \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\omega R \frac{2}{\pi} t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2M_R \cdot R \cdot \frac{\pi}{2\omega R}(1 - e^{-\omega R})\end{aligned}$$

Lemma van Jordan: bewijs

Duidelijk:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{M_R\pi}{\omega}(1 - e^{-\omega R}) = 0$$

De ongelijkheid $*$ volgt uit $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t$ $(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi)$



Ringen

Een *ring* (of *annulus*) is een gebied van de vorm

$$A = \{z : r < |z - a| < R\}$$

waarbij $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$.

Dus $U'_r(a)$ is een ring: $\{z : 0 < |z - a| < r\}$.

Dus $\mathbb{C}^*$ is een ring: $\{z : 0 < |z| < \infty\}$.

Hoofdresultaat: de Laurentontbinding

Eerst voor ringen met 0 als middelpunt.

Stelling (III.5.1)

Zij $f : A \to \mathbb{C}$ analytisch, met $A = \{z : r < |z| < R\}$. Dan is $f(z)$ op A te schrijven als

$$g(z) + h(1/z)$$

met $g : U_R(0) \to \mathbb{C}$ en $h : U_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ analytisch.
Als we $h(0) = 0$ eisen dan zijn g en h uniek.

De schrijfwijze met $h(0) = 0$ heet de *Laurentontbinding* van f en h heet het *hoofddeel* van de Laurentontbinding.

Herformuleren

Noteer $H(A) = \{f : f \text{ is analytisch op } A\}$ (dit is een vectorruimte).

Nog twee vectorruimten:

- $H\bigl(U_R(0)\bigr)$ en
- $H'\bigl(U_{\frac{1}{r}}(0)\bigr) = \{h \in H\bigl(U_{\frac{1}{r}}(0)\bigr) : h(0) = 0\}$.

Twee deelruimten van $H(A)$:

- $U = \bigl\{f : \text{er is } g \in H\bigl(U_R(0)\bigr) \text{ met } f(z) = g(z) \text{ als } z \in A\bigr\}$ en
- $V = \bigl\{f : \text{er is } h \in H'\bigl(U_{\frac{1}{r}}(0)\bigr) \text{ met } f(z) = h(1/z) \text{ als } z \in A\bigr\}$

De stelling zegt dus: $H(A) = U \oplus V$.

Met andere woorden: $H(A) = U + V$ en $U \cap V = \{0\}$.

Delft University of Technology

Doorsnede

Stel $f \in U \cap V$ en neem $g \in H\big(U_R(0)\big)$ en $h \in H'\big(U_{\frac{1}{r}}(0)\big)$ als in de definities.

Definieer $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ door

$$F(z) = \begin{cases} g(z) & |z| < R \\ h(1/z) & |z| > r \end{cases}$$

Doorsnede

F is goedgedefinieerd en analytisch.

F is ook begrensd: neem $\rho = \frac{1}{2}(r + R)$.
$g(z)$ is begrensd op $\{z : |z| \leqslant \rho\}$ en
$h(1/z)$ is begrensd op $\{z : |z| \geqslant \rho\}$.

Dus F is constant.

Maar $h(0) = 0$ en dus F is constant nul.

De som

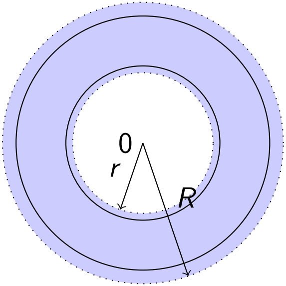
Laten zien dat $H(A) = U + V$ is iets meer werk.

Waar komen g en h vandaan?

Uit geschikte integralen/machtreeksen.

De som

Stap 1.

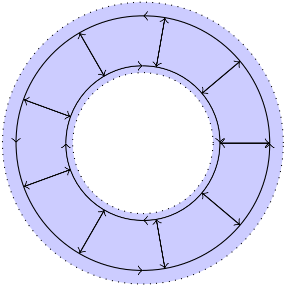


Neem ρ en P met $r < \rho < P < R$

Als $f : A \to \mathbb{C}$ analytisch is dan $\oint_{|z|=\rho} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \oint_{|z|=P} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$

De som

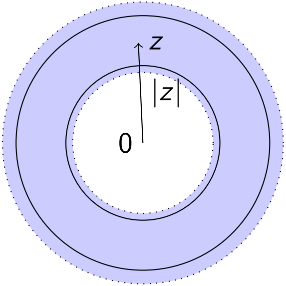
Bewijs



Bruggetjes bouwen
Genoeg om stervormige gebiedjes te hebben

De som

Stap 2. Neem een analytische $f : A \to \mathbb{C}$.



Neem z in de ring met $r < \rho < |z| < P < R$

De som

Definieer

$$F(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

De functie F is analytisch op A.

En dus

$$\oint_{|z|=\rho} F(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \oint_{|z|=P} F(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

De som

De binnenste integraal:

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=\rho} F(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta &= \oint_{|z|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - f(z)\oint_{|z|=\rho} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \oint_{|z|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

De som

De buitenste integraal:

$$\oint_{|z|=P} F(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \oint_{|z|=P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - f(z)\oint_{|z|=P} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$
$$= \oint_{|z|=P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i}\cdot f(z)$$

De som

Conclusie:

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \oint_{|z|=P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i}\cdot f(z)$$

ofwel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|z|=P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|z|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

Delft University of Technology

De som

We nemen dus

$$g(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|z|=P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

analytisch op $U_R(0)$.

De functie h moet voldoen aan

$$h(1/z) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|z|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

neem dan

$$h(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|z|=\rho} \frac{zf(\zeta)}{1 - \zeta z}\,\mathrm{d}\zeta$$

dit is analytisch op $U_{\frac{1}{r}}(0)$. NB $h(0) = 0$.

Delft University of Technology

De som

We hebben machtreeksen:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (|z| < R)$$

en

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \qquad (|z| < r^{-1})$$

En dus

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

op A, dit is de *Laurentreeks* van f.

Laurentreeks

We schrijven meestal

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

en er geldt

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta$$

De convergentie is *normaal* op A. Want:
normaal voor $g(z)$ op $\{z : |z| < R\}$ en
normaal voor $h(1/z)$ op $\{z : |z| > r\}$.

Laurentreeks

Voor ringen met een ander middelpunt, a, krijgen we

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|z|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

In beide gevallen kunnen we elke ρ tussen r en R gebruiken.

Singulariteiten

Als a een singulariteit van f is kunnen we een ring $U_r'(a)$ bekijken. We kunnen aan de Laurentreeks zien wat voor singulariteit a is.

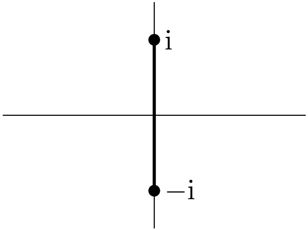
- ophefbaar: $a_n = 0$ als $n < 0$,
- pool: er is een $n < 0$ met $a_n \neq 0$ en $a_m = 0$ als $m < n$, en
- essentieel: er zijn oneindig veel $n < 0$ met $a_n \neq 0$.

arctan z

We weten:

$$\arctan z = \frac{1}{2\mathrm{i}} \log\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)$$

We nemen de tak van de logaritme met $0 < \arg z < 2\pi$; dan is $\arctan z$ voor alle z gedefinieerd en analytisch, behalve hier:



Reken na: als $-1 < y < 1$ dan $(1-y)/(1+y) > 0$.

Delft University of Technology

arctan z

Onze $\arctan z$ is dus analytisch op de ring $\{z : 1 < |z| < \infty\}$.

Wat is de Laurentontbinding?

arctan z

Neem $x > 0$; dan geldt

$$\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \mathrm{i}\frac{2x}{1+x^2}$$

Dit ligt op de eenheidscirkel en heeft positief imaginair deel.

Dus

$$0 < \arg\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x} < \pi$$

en dus

$$\arctan x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\ln 1 + \frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\arg\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x} = \frac{1}{2}\arg\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}$$

arctan z

Conclusie voor onze arctan geldt: als $x > 0$ dan $0 < \arctan x < \frac{1}{2}\pi$.

Voor $x > 0$ hebben we dus de gewone arctan!

Voor $x > 1$ hebben we dus

$$\begin{aligned}\arctan x &= \frac{1}{2}\pi - \arctan \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{2}\pi - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1}\end{aligned}$$

arctan z

De uniciteitsstelling zegt nu: als $|z| > 1$ dan

$$\arctan z = \frac{1}{2}\pi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}$$

en daar is de Laurentreeks.

Deze tak van de arctan is *niet* oneven.

Integreren

Bereken

$$\oint_{|z|=5} \arctan \zeta \, \mathrm{d}\zeta$$

Opgaven

Nuttige opgaven: III.4: 9, 10; III.5: 1, 2, 3, 5, 9.
Verdiepende opgaven: III.5: 4, 6, 7.

Delft University of Technology