TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.10, donderdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 23 juni, 2016

Outline

Singulariteiten

Functies als $\sin z$, $\exp z$, polynomen, ... zijn gedefinieerd en analytisch op heel $\mathbb{C}$.

Functies als $\frac{1}{z}$, $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1-\cos z}{z^5}$, $\exp \frac{1}{z}$, $\frac{1}{1+z^2}$, $\operatorname{Log} z$, ... zijn niet op heel $\mathbb{C}$ gedefinieerd maar wel analytisch overal waar ze gedefinieerd zijn.

Verschil tussen $\frac{1}{1+z^2}$ en $\operatorname{Log} z$: de eerste is in een paar losse punten, i en $-\mathrm{i}$, niet gedefinieerd; $\operatorname{Log} z$ mist de hele negatieve reële as in zijn domein.

Singulariteiten

Neem aan $f : D \to \mathbb{C}$ is analytisch.
We noemen a een (geïsoleerde) *singulariteit* van f als

- $a \notin D$, en
- er is een $r > 0$ zó dat $U'_r(a) \subseteq D$.

(NB a is dus zeker een verdichtingspunt van D).

Er zijn drie soorten singulariteiten:

1. ophefbaar,
2. pool, en
3. essentieel

Ophefbare singulariteiten

Een singulariteit, a, van f is *ophefbaar* als f alsnog analytisch te maken is in a.

Denk aan $\frac{\sin z}{z}$: voor $z \neq 0$ geldt

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n} + \cdots$$

Het rechterlid is overal analytisch, dus met de extra functiewaarde 1 in $z = 0$ is de functie analytisch gemaakt.

Ophefbare singulariteiten

Formeel: een singulariteit, a van $f : D \to \mathbb{C}$ is ophefbaar als er een analytische functie $\tilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ is zó dat $f(z) = \tilde{f}(z)$ voor $z \in D$.

(We schrijven meestal gewoon weer f in plaats van $\tilde{f}$.)

Als $\lim_{z\to a} f(z)$ bestaat dan is de singulariteit ophefbaar, want de nieuwe functie is dan analytisch op $U_r'(a)$ en continu in a en heeft dus een primitieve op $U_r(0)$.

Ophefbare singulariteiten

Het kan beter

Stelling (Riemann)

Een singulariteit, a van $f : D \to \mathbb{C}$ is ophefbaar dan en slechts dan als er een $r > 0$ is zó dat f begrensd is op $U_r'(a)$ (en $U_r'(a) \subseteq D$ natuurlijk).

We kunnen het bewijs gebruiken voor sterkere uitspraken: het werkt ook als we, bijvoorbeeld, aannemen dat er positieve a en b zijn met $|f(z)| \leqslant a + \frac{b}{\sqrt{|z-a|}}$ op $U_r'(a)$.

Polen

Als a een niet-ophefbare singulariteit van f is dan zijn er twee mogelijkheden

- er is een $k \in \mathbb{N}$ zó dat a een ophefbare singulariteit van $(z-a)^k f(z)$ is, en
- er is niet zo'n k

In het eerste geval noemen we a een *pool* van f; de kleinste k heet *de orde van de pool*.

In het tweede geval noemen we a een *essentiële singulariteit* van f

Orde

Als a een pool of een ophefbare singulariteit van f is dan is er precies één $k \in \mathbb{Z}$ zó dat

$$\lim_{z \to a} (z - a)^k f(z)$$

bestaat en ongelijk is aan 0.

We schrijven

$$\operatorname{ord}(f; a) = -k$$

we noemen dit de *orde* van de singulariteit.

Orde

Dus $\operatorname{ord}(f; a) = k$ betekent: er is een analytische functie h met

$$f(z) = (z - a)^k h(z) \qquad z \in U_r'(a)$$

èn $h(a) \neq 0$.

- $\operatorname{ord}(f; a) > 0$: ophefbaar, nulpunt van orde $\operatorname{ord}(f; a)$
- $\operatorname{ord}(f; a) = 0$: ophefbaar, $f(a) \neq 0$
- $\operatorname{ord}(f; a) < 0$: pool van orde $-\operatorname{ord}(f; a)$

Orde

$\operatorname{ord}(\sin z; \pi) = \ldots$, $\operatorname{ord}(\cos z; 0) = \ldots$, $\operatorname{ord}(\tan z; 0) = \ldots$, $\operatorname{ord}(\tan z; \frac{1}{2}\pi) = \ldots$, $\operatorname{ord}(\frac{\exp z - 1}{z^{17}}; 0) = \ldots$,

Opgave III.4.8

Wat zijn de singulariteiten van

$$\frac{(z-1)^2(z+3)}{1 - \sin \frac{\pi}{2} z}$$

en wat zijn hun ordes?

Naar het bord.

Essentiële singulariteiten

Stelling (Casorati-Weierstraß)

Stel a is een essentiële singulariteit van $f : D \to \mathbb{C}$.
Dan geldt: voor elke $r > 0$ ligt de beeldverzameling $f[U_r'(a)]$ dicht in $\mathbb{C}$.
Dus: voor elke $r > 0$, voor elke $b \in \mathbb{C}$, voor elke $\varepsilon > 0$ is er een $z \in U_r'(a)$ met $\bigl|f(z) - b\bigr| < \varepsilon$.

Essentiële singulariteiten

Nog mooier

Stelling (Grote stelling van Picard)

Stel a is een essentiële singulariteit van $f : D \to \mathbb{C}$.
Dan geldt: voor elke $r > 0$ is de beeldverzameling $f[U_r'(a)]$ gelijk aan $\mathbb{C}$, op misschien één punt na.

Bij $\exp \frac{1}{z}$ hadden we heel $\mathbb{C}$ op het punt 0 na.

Essentiële singulariteiten

Is er ook een 'kleine' stelling? Ja:

Stelling (Kleine stelling van Picard)

Als $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch is en als $f[\mathbb{C}]$ twee punten van $\mathbb{C}$ mist dan is f constant.

Een handig lemma

Lemma (Jordan, zie ook pagina 140)

Als $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ en als $\omega > 0$ dan

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} e^{i\omega z} f(z)\,dz = 0$$

waar α_R de halve cirkel $\{z : |z| = r, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ is.

Ringen

Een *ring* (of *annulus*) is een gebied van de vorm

$$A = \{z : r < |z - a| < R\}$$

waarbij $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$.

Dus $U'_r(a)$ is een ring: $\{z : 0 < |z - a| < r\}$.

Dus $\mathbb{C}^*$ is een ring: $\{z : 0 < |z| < \infty\}$.

TUDelft
Delft University of Technology

Hoofdresultaat: de Laurentontbinding

Eerst voor ringen met 0 als middelpunt.

Stelling (III.5.1)

Zij $f : A \to \mathbb{C}$ analytisch, met $A = \{z : r < |z| < R\}$. Dan is $f(z)$ op A te schrijven als

$$g(z) + h(1/z)$$

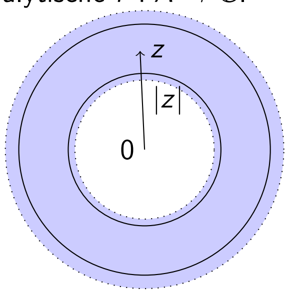
met $g : U_R(0) \to \mathbb{C}$ en $h : U_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ analytisch.
Als we $h(0) = 0$ eisen dan zijn g en h uniek.

De schrijfwijze met $h(0) = 0$ heet de *Laurentontbinding* van f en h heet het *hoofddeel* van de Laurentontbinding.

TUDelft
Delft University of Technology

De som

Stap 2. Neem een analytische $f : A \to \mathbb{C}$.



Neem z in de ring met $r < \rho < |z| < P < R$

TUDelft
Delft University of Technology

De som

We hebben de volgende functies genomen

$$g(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=P} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta$$

analytisch op $U_R(0)$.

En

$$h(1/z) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta$$

ofwel

$$h(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=\rho} \frac{z f(\zeta)}{1 - \zeta z}\, \mathrm{d}\zeta$$

dit is analytisch op $U_{\frac{1}{r}}(0)$. NB $h(0) = 0$.

TUDelft
Delft University of Technology

De som

We hebben machtreeksen:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (|z| < R)$$

en

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \qquad (|z| < r^{-1})$$

En dus

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

op A, dit is de *Laurentreeks* van f.

TUDelft
Delft University of Technology

Laurentreeks

We schrijven meestal

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

en er geldt

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

De convergentie is *normaal* op A. Want:
normaal voor $g(z)$ op $\{z : |z| < R\}$ en
normaal voor $h(1/z)$ op $\{z : |z| > r\}$.

TUDelft
Delft University of Technology

Een voorbeeld

Bekijk $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+2)} = \frac{1}{2+i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+2}\right)$.

f is analytisch op drie ringen rond 0:

- $\{z : |z| < 1\}$
- $\{z : 1 < |z| < 2\}$
- $\{z : 2 < |z|\}$

We maken de drie Laurentreeksen.

TUDelft
Delft University of Technology

Een voorbeeld

Eerste ring: $\{z : |z| < 1\}$. We hebben

$$\frac{1}{z-i} = -\frac{1}{i}\frac{1}{1+iz} = -\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^n$$

en

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n$$

Nu optellen.

TUDelft
Delft University of Technology

Een voorbeeld

Tweede ring: $\{z : 1 < |z| < 2\}$. We hebben

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}$$

en

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n$$

Nu optellen.

Een voorbeeld

Derde ring: $\{z : 2 < |z|\}$. We hebben

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}$$

en

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}}$$

Nu optellen.

Singulariteiten

Als a een singulariteit van f is kunnen we een ring $U_r'(a)$ bekijken.
We kunnen aan de Laurentreeks zien wat voor singulariteit a is.

- ophefbaar: $a_n = 0$ als $n < 0$,
- pool: er is een $n < 0$ met $a_n \neq 0$ en $a_m = 0$ als $m < n$, en
- essentieel: er zijn oneindig veel $n < 0$ met $a_n \neq 0$.

Definitie windgetal

Neem een gesloten kromme, α, in $\mathbb{C}$ en a niet op de kromme.

We noteren

$$\chi(\alpha; a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\alpha}\frac{1}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\zeta$$

en we noemen $\chi(\alpha; a)$ het wind(ings)getal of de index van α ten opzichte van a.

Definitie van Residu

Stel f is analytisch op (ten minste) $U_r'(a)$, zó dat a een singulariteit van f is.

Zij

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

de Laurentreeks van f.

We noemen de coëfficiënt a_{-1} het residu van f in a.

Notatie: $\mathrm{Res}(f;a)$.

TUDelft
Delft University of Technology

Waarom 'residu'?

Zij α een cirkel om a, met straal ρ (kleiner dan a). Dan

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\alpha a_n(\zeta-a)^n\,\mathrm{d}\zeta = a_{-1} = \mathrm{Res}(f;a)$$

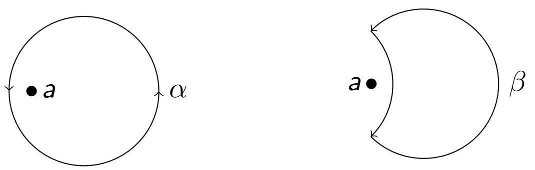
Dus

$$\mathrm{Res}(f;a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

TUDelft
Delft University of Technology

Waarom 'residu'?

Bekijk twee krommen nabij a



Het verschil tussen $\oint_\alpha f$ en $\oint_\beta f$ (datgene wat overblijft) is dus

$$2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f;a)$$

TUDelft
Delft University of Technology

De Residuenstelling

Stelling (III.6.3)

Zij D een elementair gebied, laat $z_1, \ldots, z_k$ eindig veel punten in D zijn (onderling verschillend).
Laat $f: D\setminus\{z_1,\ldots,z_k\}\to\mathbb{C}$ analytisch zijn en α een stuksgewijs gladde gesloten kromme in $D\setminus\{z_1,\ldots,z_k\}$.
Dan geldt

$$\oint_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}(f;z_i)\chi(\alpha;z_i)$$

TUDelft
Delft University of Technology

Singulariteit in ∞ (pagina 157)

Als f analytisch is op een ring $A = \{z : |z| > R\}$ dan is $\hat{f}(z) = f(\frac{1}{z})$ analytisch op $\{z : 0 < |z| < R^{-1}\}$.

We zeggen dat f een singulariteit in ∞ heeft en het type van de singulariteit is het type van de singulariteit 0 van $\hat{f}$.

Singulariteit in ∞ (pagina 157)

Dus ‘pool van f in ∞’ betekent ‘pool van $\hat{f}$ in 0’, enz.

Een niet-constant polynoom heeft een pool in ∞; de orde van de pool is de graad van het polynoom.

$\sin z$ heeft een essentiële singulariteit in ∞.

$f(z) = (z^2 + 1)^{-1}$ heeft een nulpunt in ∞: want $\hat{f}(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ en $\hat{f}$ heeft een nulpunt van orde 2 in 0.

Residu in ∞ (Opgave III.6.4)

Het residue van f in ∞ is

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\alpha_r} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

met α_r de cirkel om 0 met straal $r > R$.

Waarom een minteken? α_r draait in negatieve richting om ∞!

Een formule: neem $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z^2}\hat{f}(z) = \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$.
Dan geldt

$$\operatorname{Res}(f; \infty) = \operatorname{Res}(\tilde{f}, 0)$$

Residu in ∞ (Opgaven III.6. 5 en 6)

Opgave 5: als f een rationale functie is dan is de som van de residuen van f (inclusief het residu in ∞) gelijk aan 0.
Bewijs: neem r zo groot dat alle ‘echte’ polen binnen α_r liggen en bereken $\oint_{\alpha_r} f$ twee keer.

Nu is opgave 6 niet moeilijk meer …

Nog een voorbeeld: $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

We nemen

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{1+z^4}$$

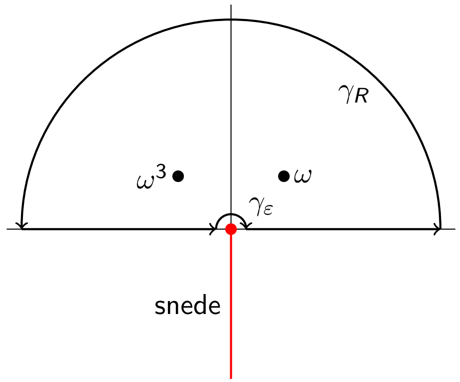
met $z^{\frac{1}{2}}$ de tak van de wortel is gedefinieerd met behulp van

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z \qquad (-\tfrac{1}{2}\pi < \arg z < \tfrac{3}{2}\pi)$$

dus we snijden de negatieve Imaginaire as weg.
NB

- als $x > 0$ dan $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$;
- als $x < 0$ dan $x^{\frac{1}{2}} = \mathrm{i}\sqrt{-x}$.

$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$: de kromme



De kromme $\Gamma_{\varepsilon,R}$ bestaat uit

Interval $[\varepsilon, R]$

Halve cirkel met straal R (positief)

Interval $[-R, -\varepsilon]$

Halve cirkel met straal ε (negatief)

en de singulariteiten

$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$: singulariteiten en residuen

De singulariteiten van f zijn de nulpunten van z^4+1, dus ω, ω^3, ω^5 and ω^7, met

$$\omega = e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2}.$$

alleen ω en ω^3 liggen binnen $\Gamma_{\varepsilon,R}$ (als $\varepsilon < 1 < R$ natuurlijk)

$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$: singulariteiten en residuen

De residuen zijn

$$\mathrm{Res}(f,\omega) = \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{4\omega^3} = \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{4\mathrm{i}\omega} = \frac{\omega^{\frac{1}{2}}\overline{\omega}}{4\mathrm{i}}$$

en

$$\mathrm{Res}(f,\omega^3) = \frac{(\omega^3)^{\frac{1}{2}}}{4\omega^9} = \frac{(\omega^3)^{\frac{1}{2}}}{4\omega} = \frac{(\omega^3)^{\frac{1}{2}}\omega}{4\mathrm{i}}$$

$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$: singulariteiten en residuen

Netjes uitwerken, via $(x+y\mathrm{i})^2=\omega$ (en $(x+y\mathrm{i})^2=\omega^3$).
Dan volgt

$$\omega^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}$$

en

$$(-\overline{\omega})^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{3}{8}\pi\mathrm{i}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}$$

Singulariteiten
Laurentontwikkeling
Residuenstelling

$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$: singulariteiten en residuen

Vervolgens

$$\omega^{\frac{1}{2}}\overline{\omega}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}$$

en

$$(-\overline{\omega})^{\frac{1}{2}}\omega=\mathrm{e}^{\frac{5}{8}\pi\mathrm{i}}=-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}$$

Optellen en met $\frac{2\pi\mathrm{i}}{4\mathrm{i}}$ vermenigvuldigen ...

Singulariteiten
Laurentontwikkeling
Residuenstelling

$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$: singulariteiten en residuen

... en dus

$$\oint_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}\right)(1+\mathrm{i})$$

Singulariteiten
Laurentontwikkeling
Residuenstelling

$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$: de integraal opdelen

De integraal is de som van

- $\displaystyle\int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\displaystyle\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{i}\sqrt{-x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\mathrm{i}\int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z$

$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$: afschatten

De grote halve cirkel:

$$\left|\oint_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi R \frac{\sqrt{R}}{R^4-1}$$

het rechterlid convergeert naar 0 als $R \to \infty$

De kleine halve cirkel

$$\left|\oint_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi \varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon^4}$$

het rechterlid convergeert naar 0 als $\varepsilon \to 0$

TUDelft
Delft University of Technology

$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$: alles bij elkaar

Na het nemen van de limieten krijgen we

$$(1+\mathrm{i})\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}\right)(1+\mathrm{i})$$

en dus

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}\right)$$

TUDelft
Delft University of Technology