TW2040: Huiswerk 2 — Inleveren: 2016-06-06

Opgave 1. Bereken

$$\oint_\alpha \operatorname{Re}\zeta \,\mathrm{d}\zeta \qquad \text{en} \qquad \oint_\beta \operatorname{Re}\zeta \,\mathrm{d}\zeta$$

waarbij α de halve cirkel is gegeven door $\alpha(t) = \exp(\mathrm{i}t)$ met $0 \le t \le \pi$, en β de vereniging van de drie lijnstukken $[1, 1+\mathrm{i}]$, $[1+\mathrm{i}, -1+\mathrm{i}]$ en $[-1+\mathrm{i}, -1]$.

Opgave 2. Laat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een analytische functie zijn en neem aan dat er positieve constanten a en b zijn zó dat

$$\bigl|f(z)\bigr| \le a + b\sqrt[3]{|z|}$$

voor alle $z \in \mathbb{C}$. Toon aan dat f constant is.

Opgave 3.

a. Bereken

$$\oint_\varepsilon \frac{1}{\zeta^2 \cos\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$

waarbij ε de eenheidscirkel is ($\varepsilon(t) = \exp(\mathrm{i}t)$ met $0 \le t \le 2\pi$).

De nulpunten van $\cos z$ verdelen we in twee groepen $a_k = (2k - \frac{1}{2})\pi$ en $b_k = (2k + \frac{1}{2})\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.

b. Zij $k \in \mathbb{Z}$ en definieer $g(z) = \frac{z-a_k}{\cos z}$ en $h(z) = \frac{z-b_k}{\cos z}$. Toon aan: met $g(a_k) = 1$ en $h(b_k) = -1$ worden g en h analytisch in respectievelijk a_k en b_k.

c. Bereken

$$\oint_{\alpha_k} \frac{1}{\zeta^2 \cos\zeta}\,\mathrm{d}\zeta \qquad \text{en} \qquad \oint_{\beta_k} \frac{1}{\zeta^2 \cos\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$

waarbij α_k de cirkel met straal 1 om a_k is en β_k de cirkel met straal 1 om b_k.

Opgave 4. Laat ε weer de eenheidscirkel zijn.

a. Bereken, voor $n \in \mathbb{N}$,

$$\oint_\varepsilon \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)^n \mathrm{d}\zeta$$

b. Bereken ook, voor $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$