Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut
Niels Bohrweg 1, Leiden

Tentamen Topologie (TOP)
maandag 18 juni 2007; 14:00 – 17:00 uur.

---

1. We noemen een ruimte *extreem onsamenhangend* als voor elk tweetal open verzamelingen U en V het volgende geldt: als $U \cap V = \emptyset$ dan $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \emptyset$.

(9) a. Toon aan: een ruimte is extreem onsamenhangend dan en slechts dan als voor elke open verzameling U de afsluiting $\operatorname{cl} U$ ook open is.

(8) b. Toon aan: een extreem onsamenhangende Hausdorff ruimte met ten minste twee punten is splitsbaar.

(8) c. Geef een voorbeeld van een (niet-lege) samenhangende T_1-ruimte die extreem onsamenhangend is.

2. Zij $f : X \to Y$ een (willekeurige) afbeelding tussen topologische ruimten. De *grafiek* van f is de verzameling $G(f) = \big\{(x, y) : y = f(x)\big\}$.

(8) a. Bewijs: als Y Hausdorff is en f is continu dan is $G(f)$ gesloten in $X \times Y$.

(8) b. Laat $x \in X$ en zij $F = \bigcap\{\operatorname{cl} f[U] : U \in \mathcal{U}_x\}$, waarbij $\mathcal{U}_x$ het omgevingenfilter van x is. Toon aan: als $y \in F$ dan $(x, y) \in \operatorname{cl} G(f)$.

(9) c. Bewijs: als Y compact is en $G(f)$ is gesloten in $X \times Y$ dan is f continu. *Aanwijzing*: Zie het vorige onderdeel, bewijs dat $F = \big\{f(x)\big\}$ en gebruik de compactheid om continuïteit in x te bewijzen.

(8) d. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de compactheid van Y niet gemist kan worden. *Aanwijzing*: Het kan met $X = Y = \mathbb{R}$.

3. Zij $C = C_1 \cup C_2$, waarbij $C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z| = i\}$ $(i = 1, 2)$. Voor $z = e^{it} \in C_1$ en $r > 0$ definiëren we

$$U_r(z) = \{e^{is} : |s - t| < r\} \cup \{2e^{is} : 0 < |s - t| < r\}$$

(teken een plaatje). Voor $z \in C_1$ nemen we $\mathcal{B}_z = \{U_r(z) : r > 0\}$ als lokale basis en voor $z \in C_2$ nemen we $\mathcal{B}_z = \{B : B \subseteq C_2 \text{ en } z \in B\}$.

(8) a. Toon aan dat zo een goede toekenning van lokale bases is gedaan.

(10) b. Onderzoek of C, met deze topologie, de volgende eigenschappen heeft: Hausdorff, samenhang, separabiliteit, eerste aftelbaarheidsaxioma, tweede aftelbaarheidsaxioma, compactheid. Geef bewijzen dan wel (tegen)voorbeelden.

4. Beschrijf, voor elk van de gegeven afbeeldingen $f : S^1 \to S^1$, het bijbehorende homomorfisme $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, waarbij $\mathbb{Z}$ opgevat wordt als $\pi_1(S^1)$. Geef duidelijke argumenten.

(8) a. $f(z) = -z$

(8) b. $f(z) = z^n$ (met $n \in \mathbb{Z}$ vast)

(8) c. $f(z) = \begin{cases} z & \text{als } \operatorname{Im} z \geqslant 0 \\ \bar{z} & \text{als } \operatorname{Im} z \leqslant 0 \end{cases}$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10}$$

en op de gebruikelijke wijze afgerond.

EINDE

1. a. Van links naar rechts: Zij U open en neem $V = X \setminus \operatorname{cl} U$; dan zijn U en V disjunct en open, dus $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \emptyset$. Maar dan volgt $V \subseteq \operatorname{cl} V \subseteq X \setminus \operatorname{cl} U = V$, dus $V = \operatorname{cl} V$ en dus is $\operatorname{cl} U = X \setminus \operatorname{cl} V$ open.
Van rechts naar links. laat U en V open en disjunct zijn. Omdat $X \setminus V$ gesloten is en U bevat volgt $\operatorname{cl} U \cap V = \emptyset$. Omdat $\operatorname{cl} U$ open is geeft dezelfde redenering toegepast op V en $\operatorname{cl} U$ dat $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \emptyset$.

   b. Laat $x \neq y$ en neem disjuncte open verzamelingen U en V met $x \in U$ en $y \in V$; dan is $\operatorname{cl} U$ open-en-gesloten, $x \in \operatorname{cl} U$ en $y \in X \operatorname{cl} U$. Dus $\{\operatorname{cl} U, X \setminus \operatorname{cl} U\}$ is een spiltsing van de ruimte.

   c. Neem $\mathbb{N}$ met de co-eindige topologie: dan geldt $\operatorname{cl} U = \mathbb{N}$ voor elke niet-lege open verzameling U. Hieruit volgt meteen dat deze ruimte niet splitsbaar is en maar wel extreem onsamenhangend.

2. a. Neem aan dat $(x, y) \notin G(f)$; dus $y \neq f(x)$ en er zijn disjuncte omgevingen V_1 en V_2 van respectievelijk $f(x)$ en y. Wegens de continuïteit van f is er een omgeving U van x met $f[U] \subseteq V_1$. Dus, als $p \in U$ dan geldt $f(p) \notin V_2$, dus $U \times V_2$ is disjunct van $G(f)$.

   b. Zij U een omgeving van x en V een omgeving van y. Dan geldt $V \cap \operatorname{cl} f[U] \neq \emptyset$, dus er is een $p \in U$ met $f(p) \in V$, maar dan $\bigl(p, f(p)\bigr) \in (U \times V) \cap G(f)$.

   c. Als $y \in F$ dan geldt $(x, y) \in G(f)$ — omdat $G(f)$ gesloten is — en dus moet wel $y = f(x)$. Wegens de compactheid van Y is de verzameling F niet leeg, dus $F = \bigl\{f(x)\bigr\}$. Zij nu V een open verzameling om $f(x)$; dan geldt $F \cap Y \setminus V = \emptyset$, wegens de compactheid van Y zijn er eindig veel omgevingen $\{U_i : i = 1, \ldots, n\}$ zó dat $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{cl} f[U_i] \subseteq V$. Neem $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$, dan geldt $f[U] \subseteq V$.

   d. Definieer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = 1/x$ als $x \neq 0$ en $f(0) = 0$. Dan is $G(f)$ gesloten in $\mathbb{R}^2$ maar f is niet continu (merk op dat $F = \emptyset$ bij $x = 0$).

3. a. Eis (i): in beide gevallen geldt $C \in \mathcal{B}_z$, dus de families zijn niet leeg. Ook geldt $z \in B$ als $B \in \mathcal{B}_z$: als $z \in C_2$ dan is dit meteen duidelijk, als $z \in C_1$ dan zit z altijd in het eerste gedeelte van $U_r(z)$.
Eis (ii): in beide gevallen geldt dat $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_z$ als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_z$.
Eis (iii): Geval 1: $z \in C_1$ en $w \in C_1 \cap U_r(z)$, dus $w = e^{is}$ met $|s - t| < r$, neem $\varepsilon = r$ als $w = z$ en $\varepsilon = \min\bigl\{|s - t|, r - |s - t|\bigr\}$ anders; dan $U_\varepsilon(w) \subseteq U_r(z)$. Geval 2: $z \in C_1$ en $w \in C_2 \cap U_r(z)$, dan $\{w\} \in \mathcal{B}_w$ en $\{w\} \subseteq U_r(z)$. Geval 3: $z \in C_2$ en $w \in B \in \mathcal{B}_z$, dan $w \in C_2$ en $B \in \mathcal{B}_w$, dus ook hier is aan (iii) voldaan.

   b. Hausdorff: ja. Laat $z, w \in C$ verschillend zijn. Geval 1: $z, w \in C_1$; neem $s, t \in [0, 2\pi)$ met $z = e^{it}$ en $w = e^{is}$. Neem $r = \frac{1}{2} \min\bigl\{|s - t|, |s - t + 2\pi|, |s - t - 2\pi|\bigr\}$, dan volgt $U_r(z) \cap U_r(w) = \emptyset$. Geval 2: $z \in C_1$ en $w \in C_2$; neem $s, t \in [0, 2\pi)$ met $z = e^{it}$ en $w = 2e^{is}$. Als $t = s$ dan $U_1(z) \cap \{w\} = \emptyset$; als $s \neq t$ neem dan $r = \min\bigl\{|s - t|, |s - t + 2\pi|, |s - t - 2\pi|\bigr\}$, dan $U_r(z) \cap \{w\} = \emptyset$. Geval 3: $z, w \in C_2$; dan geldt $\{z\} \cap \{w\} = \emptyset$.
Samenhang: nee. Elk punt in C_2 is geïsoleerd en de ruimte is Hausdorff, dus $\{2\}$ en $C \setminus \{2\}$ vormen een splitsing van C.
Separabel: nee. Omdat elk punt in C_2 geïsoleerd is moet elke dichte verzameling de verzameling C_2 bevatten en kan dus niet aftelbaar zijn.
Eerste aftelbaarheidsaxioma: ja. Als $z \in C_2$ dan is $\bigl\{\{z\}\bigr\}$ een aftelbare lokale basis en als $z \in C_1$ dan is $\{U_q(z) : q > 0, q \in \mathbb{Q}\}$ een aftelbare lokale basis.
Tweede aftelbaarheidsaxioma: nee. Elke basis moet de familie $\bigl\{\{z\} : z \in C_2\bigr\}$ bevatten en is dus niet aftelbaar.
Compact: ja. Merk eerst op: de deelruimte C_1 heeft zijn gewone topologie en is dus compact. Zij nu $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ een overdekking met basis-open verzamelingen, waarbij $\mathcal{U}_i$ uit basisomgevingen van punten uit C_i bestaat. Merk op dat $C_1 \cap \bigcup \mathcal{U}_2 = \emptyset$, dus $\mathcal{U}_1$ overdekt C_1 en heeft dus een eindige deelfamilie $\{U_{r_1}(z_1), \ldots, U_{r_n}(z_n)\}$ die C_1 ook overdekt. Die familie overdekt ook C_2, behalve misschien de punten $2z_1, \ldots, 2z_n$. Voor die nemen we nog eindig veel elementen van $\mathcal{U}_2$ om ze te overdekken; zo krijgen we een eindige deeloverdekking van $\mathcal{U}$.

4. De vraag is telkens wat f_* doet met de generator van de groep $\mathbb{Z} = \pi_1(S^1)$ en dat is de lus $\gamma : s \mapsto e^{2\pi i s}$.

   a. De lus $f \circ \gamma$ is de lus die begint in -1 en één keer rond gaat. Dat is in feite dezelfde lus, dus f_* is de identieke afbeelding.

   b. De lus $f \circ \gamma$ gaat n keer rond van 1 naar 1 en die lus komt overeen met het getal n, dus $f_*(m) = nm$ voor alle m.

   c. De lus $f \circ \gamma$ is nulhomotoop: de samenstelling wordt gegeven door

$$s \mapsto \begin{cases} e^{2\pi i s} & \text{als } s \leqslant \frac{1}{2} \\ e^{2\pi i (1-s)} & \text{als } s \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Deze is ook te schrijven als $s \mapsto \gamma\bigl(h(s)\bigr)$, waarbij $h(s) = \min\bigl\{|s|, |1 - s|\bigr\}$. Definieer een homotopie F als volgt: $F(s, t) = \gamma\bigl((1 - t)h(s)\bigr)$. Dan geldt $F(s, 0) = f(\gamma(s))$. $F(s, 1) = 1$ en $F(0, t) = F(1, t) = 1$, dus $f \circ \gamma$ is nulhomotoop $\operatorname{rel}\{0, 1\}$. Dit betekent dat f_* het nulhomomorfisme is.

EINDE