Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut
Niels Bohrweg 1, Leiden

ProefTentamen Topologie (TOP)
maandag 18 juni 2007; 14:00 – 17:00 uur.

---

1. Een P-ruimte is een topologische ruimte waarin de doorsnede van aftelbaar veel open verzamelingen altijd open is.

   a. Geef een voorbeeld van een samenhangende P-ruimte.

   b. Geef een voorbeeld van een Hausdorff P-ruimte.

   c. Zij X een Hausdorff P-ruimte en $(x_n)_n$ een convergente rij in X, met limiet x. Toon aan: er is een N zó dat $x_n = x$ voor $n \geq N$.

   d. Zij X een P-ruimte en $f : X \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding. Toon aan: voor elke $x \in X$ is er een omgeving waarop f constant is.

2. Zij X een compacte Hausdorff ruimte en x een punt waarvoor een aftelbare familie open verzamelingen $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ bestaat zó dat $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

   a. Toon aan: er bestaat een aftelbare familie open verzamelingen $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ zó dat $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{cl} V_n$.

   b. Toon aan dat x een aftelbare omgevingenbasis heeft.

3. Zij $S = \{0, 1\}$, met de volgende topologie: $\mathcal{T} = \big\{\emptyset, \{1\}, S\big\}$. Zij X een T_0-ruimte, met basis $\mathcal{B}$.

   a. Toon aan dat de karakteristieke functie $\chi_O : X \to S$ van elke open verzameling continu is.

   b. Toon aan dat de diagonaalafbeelding $f : X \to S^{\mathcal{B}}$ van de familie $\{\chi_B : B \in \mathcal{B}\}$ een inbedding is, dus een homeomorfisme van X op $f[X]$.

4. Zij A de vereniging van $(0, 1] \times \{0\}$ en $[0, 1) \times \{1\}$, met de lexicografische ordening: $(x, i) \prec (y, j)$ als $x < y$ of $x = y$ en $i < j$. Die ordening bepaalt een topologie op A: de families intervallen $\big\{(\leftarrow, a) : a \in A\big\}$ en $\big\{(a, \to) : a \in A\big\}$ vormen hier samen een subbasis voor. Onderzoek of A de volgende eigenschappen heeft: samenhang, separabiliteit, eerste aftelbaarheidsaxioma, tweede aftelbaarheidsaxioma, compactheid.

5. Zij $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ de eenheidsschijf in het platte vlak en zij $f : D \to D$ een continue afbeelding met de eigenschap dat $f(x, y) = (x, y)$ voor $(x, y) \in S^1$. Bewijs dat f surjectief is.

EINDE