Topologie

(Voorjaar 2002)
(Geheel herziene versie)

Dr A.J.M. van Engelen
Dr K. P. Hart

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 0

Inleiding

In de cursus *Metrische Topologie* hebben we kennis gemaakt met het begrip *open verzameling* in een metrische ruimte (X, d). Voor de familie $\mathcal{T} = \{O \subseteq X : O \text{ is open}\}$ van alle open deelverzamelingen van X werd de term *topologie van* (X, d) gebruikt. De topologie van (X, d) bleek de volgende eigenschappen te hebben:

(T1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;

(T2) voor elke $n \in \mathbb{N}$, als $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$ dan ook $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$;

(T3) als $O_i \in \mathcal{T}$ voor elke $i \in I$, dan ook $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

In woorden: $\mathcal{T}$ bevat de lege en de hele verzameling, en is gesloten onder eindige doorsneden en willekeurige verenigingen.

We hebben eveneens gezien dat een groot aantal geïntroduceerde begrippen gedefinieerd kan worden door feitelijk slechts gebruik te maken van het begrip 'open verzameling', zonder daarbij te refereren aan de onderliggende metriek. We geven enkele voorbeelden van paren definities, waarbij steeds de eerste een metrische definitie is, en de tweede een topologisch equivalent.

0.1. Definitie. (a) Een deelverzameling U van X heet een *omgeving van* $x \in X$ als een $r > 0$ bestaat met $B(x, r) \subseteq U$.

(b) Een deelverzameling U van X heet een *omgeving van* $x \in X$ als een $O \in \mathcal{T}$ bestaat met $x \in O \subseteq U$.

0.2. Definitie. (a) Zij $A \subseteq X$. Een punt $x \in X$ heet *adherent punt van* A (notatie: $x \in \overline{A}$ of $x \in \mathrm{Cl}(A)$) als voor elke $r > 0$ geldt dat $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$.

(b) Zij $A \subseteq X$. Een punt $x \in X$ heet *adherent punt van* A als voor elke omgeving U van x geldt dat $U \cap A \neq \varnothing$.

0.3. Definitie. (a) Een rij $\langle x_n \rangle_n$ in X heet *convergent met limiet* $x \in X$ als voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat met $x_n \in B(x, \varepsilon)$ voor elke $n \geqslant N$.

(b) Een rij $\langle x_n \rangle_n$ in X heet *convergent met limiet* $x \in X$ als voor elke omgeving U van x een $N \in \mathbb{N}$ bestaat met $x_n \in U$ voor elke $n \geqslant N$.

0.4. Definitie. (a) Een punt $x \in X$ heet *limietpunt* (of *ophopingspunt*) van de rij $\langle x_n \rangle_n$ in X als voor elke $\varepsilon > 0$ en elke $n \in \mathbb{N}$ een $m \geqslant n$ bestaat met $x_m \in B(x, \varepsilon)$.

(b) Een punt $x \in X$ heet *limietpunt* van de rij $\langle x_n \rangle_n$ in X als voor elke omgeving U van x en elke $n \in \mathbb{N}$ een $m \geqslant n$ bestaat zó dat $x_m \in U$. (Equivalente formulering: elke omgeving U van x bevat oneindig veel termen van de rij $\langle x_n \rangle_n$.)

(c) Een punt $x \in X$ heet *limietpunt* van de rij $\langle x_n \rangle_n$ als $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_m : m \geqslant n\}}$.

We zien dat het voor zinvolle definities van deze bekende begrippen voldoende is dat we de beschikking hebben over een verzameling X die voorzien is van een *topologie*: een familie $\mathcal{T}$ die voldoet aan de eigenschappen (T1), (T2) en (T3). Het paar $(X, \mathcal{T})$ heet dan een *topologische ruimte*, en de elementen van $\mathcal{T}$ heten (nog steeds) *open verzamelingen*. Het voordeel van een dergelijke abstractie is dat we zo een beter inzicht krijgen in de essentiële aspecten van de theorie. Uiteraard is dat niet de enige bestaansreden van het vakgebied Topologie: topologische ruimten spelen overal in de wiskunde op soms onverwachte plaatsen een belangrijke rol, en daarbij gaat het lang niet altijd om topologieën die geïnduceerd worden door een metriek.

Voordat we met een systematische studie van topologische ruimten beginnen zullen we eerst een uit de cursus Metrische Topologie bekende stelling opnieuw onder de loep nemen om een indruk te krijgen in hoeverre we in een concreet geval slechts te maken hebben met stellingen over *topologische* ruimten. Naast uit de cursus Metrische Topologie bekende termen zullen we daarbij ook een aantal nieuwe begrippen tegenkomen, die alle later bij de systematische behandeling terug zullen komen.

Een paar soorten compactheid

In het onderstaande is steeds X een verzameling, voorzien van een (niet nader gespecificeerde) topologie $\mathcal{T}$; als sprake is van een metrische ruimte X (juister: een metrische ruimte (X, d)), dan is steeds $\mathcal{T}$ de door de metriek op X geïnduceerde topologie.

0.5. DEFINITIE. (a) X heet *(aftelbaar) compact* als elke (aftelbare) open overdekking van X een eindige deeloverdekking heeft.

(b) X heet *rijcompact* als elke rij in X een convergente deelrij heeft.

(c) X heet *Lindelöf* als elke open overdekking van X een aftelbare deeloverdekking heeft.

In de cursus Metrische Topologie is bewezen:

0.6. STELLING. *Elke compacte metrische ruimte is rijcompact.*

Uiteraard is elke compacte topologische(!) ruimte aftelbaar compact, zodat het voor een bewijs van deze stelling voldoende is om aan te tonen:

0.7. STELLING. *Zij X een aftelbaar compacte metrische ruimte. Dan is X rijcompact.*

BEWIJS. Zij $\langle x_n \rangle_n$ een rij in X, en zij $U_n = X \setminus \overline{\{x_m : m \geqslant n\}}$. Merk op dat $U_n \subseteq U_{n+1} \neq X$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, zodat $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \neq X$ wegens aftelbare compactheid. Er bestaat dus een $x \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, dat wil zeggen $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_m : m \geqslant n\}}$. Wegens Definitie 0.4 is x dan een limietpunt van $\langle x_n \rangle_n$.

Definieer nu $O_n(x) = B(x, \frac{1}{n})$, en merk op dat

$$(\forall O \in \mathcal{T})(\forall x \in O)(\exists n \in \mathbb{N})(O_n(x) \subseteq O); \tag{1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\big(O_{n+1}(x) \subseteq O_n(x)\big). \tag{2}$$

Construeer recursief een deelrij $\langle x_{n_k} \rangle_k$ van $\langle x_n \rangle_n$ met $x_{n_k} \in O_k(x) \cap \{x_m : m > n_{k-1}\}$ (waarbij $n_0 = 0$). Met Definitie 0.3 kunnen we nu aantonen dat $\langle x_{n_k} \rangle_k$ naar x convergeert. Immers, zij $O \in \mathcal{T}$ met $x \in O$. Wegens (1) is er een $n \in \mathbb{N}$ met $O_n(x) \subseteq O$. Maar dan geldt wegens (2) voor elke $k \geqslant n$ dat $x_{n_k} \in O_k(x) \subseteq O_n(x) \subseteq O$. □

Hoewel bovenstaand bewijs op het eerste gezicht een essentieel gebruik lijkt te maken van het feit dat (X, d) een metrische ruimte is, valt dit bij nader inzien nogal mee: we zien dat in *elke* aftelbaar compacte ruimte elke rij een limietpunt heeft, en dat voor het bewijs dat dit limietpunt ook de limiet is van een deelrij slechts het bestaan van een familie $\{O_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ van open omgevingen van x die voldoet aan (1) en (2) nodig is.

0.8. DEFINITIE. X heet een $\mathrm{C_I}$-*ruimte* als voor elke $x \in X$ een familie $\{V_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ van omgevingen van x bestaat zó dat

$$(\forall O \in \mathcal{T})(\forall x \in O)(\exists n \in \mathbb{N})(V_n(x) \subseteq O).$$

Het is duidelijk dat elke metrische ruimte een $\mathrm{C_I}$-ruimte is. Definiëren we $O_n(x) = \bigcap_{i=1}^n V_i(x)$ dan krijgen we een familie die aan (1) en (2) voldoet, zodat we hierboven in feite de volgende stelling bewezen hebben:

0.9. STELLING. *Een aftelbaar compacte* $\mathrm{C_I}$-*ruimte is rijcompact.*

In de cursus Metrische Topologie is zonder bewijs vermeld dat de omkering van Stelling 0.6 eveneens geldt:

0.10. STELLING. *Een rijcompacte metrische ruimte is compact.*

We zullen ook deze stelling bewijzen, en bezien of het metrische aspect daarbij wel een cruciale rol speelt. We bewijzen eerst:

0.11. STELLING. *Zij X een rijcompacte topologische ruimte. Dan is X aftelbaar compact.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare open overdekking van X. Als $\mathcal{U}$ geen eindige deeloverdekking heeft dan is er voor elke n een $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$. Zij $\langle x_{n_k} \rangle_k$ een convergente deelrij van $\langle x_n \rangle_n$, zeg $x_{n_k} \to x$. Dan is er een m met $x \in U_m$, en dus ook een K zó dat $x_{n_k} \in U_m$ voor elke $k \geqslant K$. Zij $l \geqslant K$ zó dat $n_l \geqslant m$, dan is enerzijds $x_{n_l} \in U_m$ daar $l \geqslant K$, maar anderzijds $x_{n_l} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n_l} U_i \subseteq X \setminus U_m$ daar $n_l \geqslant m$, een tegenspraak. □

Omdat uiteraard een aftelbaar compacte Lindelöf ruimte compact is, zijn we klaar als we kunnen bewijzen dat een rijcompacte metrische ruimte Lindelöf is.

0.12. LEMMA. *Zij (X, d) een rijcompacte metrische ruimte. Dan is er voor elke $n \in \mathbb{N}$ een eindige deelverzameling E_n van X zó dat*

$$(\forall x \in X)(\exists y \in E_n)\Big(d(x, y) < \frac{1}{n}\Big). \tag{3}$$

BEWIJS. Stel dat zo'n verzameling E_n voor zekere n niet bestaat. We kunnen dan recursief een verzameling punten $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ definiëren zó dat $d(x_i, x_j) \geqslant \frac{1}{n}$ voor $i \neq j$. Maar dan heeft de rij $(x_k)_k$ geen convergente deelrij, een tegenspraak. □

0.13. STELLING. *Zij X een rijcompacte metrische ruimte. Dan is X Lindelöf.*

BEWIJS. Kies eindige deelverzamelingen E_n van X als in het lemma, en zij $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X, en definieer

$$F = \big\{(y, k) : y \in E, k \in \mathbb{N} \text{ en er is een } U \in \mathcal{U} \text{ met } B(y, \frac{1}{k}) \subseteq U\}.$$

Kies voor elke $(y, k) \in F$ een $U(y, k) \in \mathcal{U}$ met $B(y, \frac{1}{k}) \subseteq U$. Dan is de familie $\{U(y, k) : (y, k) \in F\}$ een aftelbare deeloverdekking van $\mathcal{U}$. Immers, zij $x \in X$. Dan zijn er een

$U \in \mathcal{U}$ en een $n \in \mathbb{N}$ met $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Wegens (3) is er een $y \in E_{2n} \subseteq E$ zó dat $d(x,y) < \frac{1}{2n}$. Dan is $B(y, \frac{1}{2n}) \subseteq U$ dus $(y, 2n) \in F$, zodat $x \in B(y, \frac{1}{2n}) \subseteq U(y, 2n)$. □

Het bovenstaande bewijs lijkt essentieel gebruik te maken van het feit dat de topologie van X afkomstig is van een metriek op X. Dat we met dit soort conclusies voorzichtig moeten zijn zal blijken in Hoofdstuk 9, waar we zullen zien dat metrische ruimten paracompact zijn (Stelling 9.11), en dat paracompacte aftelbaar compacte ruimten compact zijn (Stelling 9.12). De klasse van paracompacte topologische ruimten is aanzienlijk ruimer dan de klasse van metrische ruimten!

Een onmiddellijk gevolg van bovenstaande resultaten is ook nog:

0.14. STELLING. *Een aftelbaar compacte metrische ruimte is compact.*

Vraagstukken

In de volgende opgaven wordt telkens een stelling uit de cursus *Metrische Topologie* geformuleerd, gevolgd door een generalisatie ervan. Zoek telkens het bewijs van de metrische stelling op, en ga na hoe dit aangepast kan worden tot een bewijs van de generalisatie.

Een topologische ruimte X heet een *Hausdorff ruimte* als voor elke $x, y \in X$ met $x \neq y$ omgevingen U van x en V van y bestaan met $U \cap V = \varnothing$. Merk op dat elke metrische ruimte een Hausdorff ruimte is.

▶ **0.1.** OPGAVE.

a) In een metrische ruimte heeft een rij ten hoogste één limiet.

b) In een Hausdorff ruimte heeft een rij ten hoogste één limiet.

▶ **0.2.** OPGAVE.

a) In een compacte metrische ruimte is iedere gesloten deelverzameling compact.

b) In een compacte ruimte is iedere gesloten deelverzameling compact.

▶ **0.3.** OPGAVE.

a) In een metrische ruimte is iedere compacte deelverzameling gesloten.

b) In een Hausdorff ruimte is iedere compacte deelverzameling gesloten.

Hoofdstuk 1

Basisbegrippen

We behandelen een groot aantal basisbegrippen; sommige zijn al bekend uit de cursus *Metrische Topologie*.

Open en gesloten verzamelingen

We herhalen de definitie van topologische ruimte uit Hoofdstuk 0.

1.1. DEFINITIE. Zij X een verzameling. Een *topologie* op X is een collectie $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen van X met de volgende eigenschappen:

(T1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;
(T2) voor elke $n \in \mathbb{N}$, als $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$ dan ook $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$;
(T3) als $O_i \in \mathcal{T}$ voor elke $i \in I$, dan ook $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Als $\mathcal{T}$ een topologie op X is dan heet het paar $(X, \mathcal{T})$ (of ook wel X zelf) een *topologische ruimte*, of kortweg een *ruimte*. De elementen van $\mathcal{T}$ heten de *open verzamelingen* van X.

▶ **1.2.** OPGAVE. Voorwaarde (T2) is equivalent aan "als $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ dan $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$".

1.3. VOORBEELDEN.

1. Zij $\mathcal{T}_{\mathrm{d}} = \mathcal{P}(X)$, de machtsverzameling van X. Dan is $\mathcal{T}_{\mathrm{d}}$ een topologie op X: de *discrete topologie*.
2. Zij $\mathcal{T}_{\mathrm{i}} = \{\varnothing, X\}$. Dan is $\mathcal{T}_{\mathrm{i}}$ een topologie op X: de *indiscrete topologie*.
3. Zij $\mathcal{T}_{\mathrm{ce}} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ is eindig}\} \cup \{\varnothing\}$. Dan is $\mathcal{T}_{\mathrm{ce}}$ een topologie op X: de *co-eindige topologie*.
4. Zij $\mathcal{T}_{\mathrm{ca}} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ is aftelbaar}\} \cup \{\varnothing\}$. Dan is $\mathcal{T}$ een topologie op X: de *co-aftelbare topologie*.
5. Zij $\mathbf{S} = \{0, 1\}$ en $\mathcal{T} = \big\{\varnothing, \mathbf{S}, \{0\}\big\}$. Dan is $\mathcal{T}$ een topologie op $\mathbf{S}$. De topologische ruimte $(\mathbf{S}, \mathcal{T})$ heet de *Sierpiński-ruimte*.
6. Zij (X, d) een metrische ruimte. De open (ten opzichte van de metriek) deelverzamelingen van X vormen een topologie op X: de *(door d) geïnduceerde topologie* of *metrische topologie*.

Per definitie is een topologie gesloten onder eindige doorsneden, maar niet noodzakelijk onder oneindige doorsneden:

1.4. VOORBEELD. Zij $X = \mathbb{R}$ met de standaard, euclidische, topologie (dat wil zeggen de topologie voortgebracht door de euclidische metriek), en voor $i \in \mathbb{N}$ zij $A_i = (-\frac{1}{i}, 1)$. Dan is $\bigcap_{i=1}^\infty A_i = [0, 1)$ geen open deelverzameling van $\mathbb{R}$.

Het komt geregeld voor dat we dezelfde onderliggende verzameling X bekijken met twee topologieën $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$. Als $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ dan heet $\mathcal{T}_2$ *fijner* dan $\mathcal{T}_1$, en $\mathcal{T}_1$ *grover* dan $\mathcal{T}_2$.

Net als in metrische ruimten kennen we ook in topologische ruimten het begrip gesloten verzameling.

1.5. DEFINITIE. Een deelverzameling F van X heet *gesloten in* X als $X \setminus F$ open is in X.

1.6. PROPOSITIE. *Zij* $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : F \text{ is gesloten}\}$. *Dan geldt:*

(F1) $\varnothing, X \in \mathcal{F}$;

(F2) *voor elke* $n \in \mathbb{N}$, *als* $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ *dan ook* $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$;

(F3) *als* $F_i \in \mathcal{F}$ *voor elke* $i \in I$, *dan ook* $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$.

In woorden: $\mathcal{F}$ bevat de lege en de hele verzameling, en is gesloten onder eindige verenigingen en willekeurige doorsneden. Door over te gaan op complementen kunnen we uit Voorbeeld 1.4 direct afleiden dat een willekeurige vereniging van gesloten deelverzamelingen niet noodzakelijk gesloten is:

1.7. VOORBEELD. Zij $X = \mathbb{R}$ (met de gewone, euclidische topologie), en zij $B_i = (-\infty, -\frac{1}{i}] \cup [1, \infty)$. Dan is $\bigcup_{i=1}^\infty B_i = \mathbb{R} \setminus [0, 1)$ niet gesloten in $\mathbb{R}$. Een ander voorbeeld krijgen we door $F_i = [-1 + \frac{1}{i}, 1]$ te nemen, dan volgt $\bigcup_{i=1}^\infty F_i = (-1, 1]$.

Niet elke verzameling is open of gesloten: $\mathbb{Q}$ is noch open, noch gesloten in $\mathbb{R}$. Sommige verzamelingen zijn open en gesloten tegelijk; zo'n verzameling noemen we *clopen* (van **cl**osed and **open**). Zo is $(-\infty, \sqrt{2})$ clopen in $\mathbb{Q}$.

Inwendige, afsluiting, rand, ...

Nog een aantal uit de cursus Metrische Topologie bekende begrippen:

1.8. DEFINITIE. Zij X een topologische ruimte, en $A \subseteq X$.

(a) Het *inwendige van* A is de verzameling $\bigcup\{O : O \text{ open in } X \text{ en } O \subseteq A\}$. We noteren het inwendige als A° of $\operatorname{Int} A$ (of $\operatorname{Int}_X A$ om aan te geven dat we in X werken). Als $x \in \operatorname{Int} A$ dan heet x een *inwendig punt van* A, en A heet dan een *omgeving van* x.

(b) De *afsluiting van* A is de verzameling $\bigcap\{F : F \text{ gesloten in } X \text{ en } A \subseteq F\}$. We noteren de afsluiting als $\overline{A}$ of $\operatorname{Cl} A$ (of $\operatorname{Cl}_X A$). Als $x \in \overline{A}$ dan heet x een *adherent punt van* A.

(c) De *afgeleide verzameling van* A is de verzameling $A' = \{x \in X : \text{voor elke omgeving } U_x \text{ van } x \text{ is } U_x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing\}$. Als $x \in A'$, dan heet x een *verdichtingspunt van* A. Een element van A dat geen verdichtingspunt is van A heet een *geïsoleerd punt van* A.

(d) De *rand van* A is de verzameling $\operatorname{Rd} A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$.

In aanvulling op onderdeel (a) merken we nog op dat als A open is en $x \in A$, we A een *open omgeving van* x noemen, en dat uit de definitie volgt dat wanneer A een omgeving is van x, haar inwendige $\operatorname{Int} A$ een open omgeving is van x. Verder is eenvoudig in te zien dat een eindige doorsnede van (open) omgevingen van x opnieuw een (open) omgeving van x is (opgave).

Dan volgt nu een hele rij basiseigenschappen van de hierboven gedefinieerde begrippen. In de opgaven is steeds X een topologische ruimte, alle genoemde verzamelingen zijn deelverzamelingen van X en alle punten zijn elementen van X.

▶ **1.9.** Opgave.

a) $\overline{A} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

b) $x \in \overline{A}$ dan en slechts dan als voor elke omgeving U van x geldt dat $U \cap A \neq \varnothing$.

▶ **1.10.** Opgave.

a) $\operatorname{Int} A$ is open, en $\operatorname{Int} A \subseteq A$.

b) Als O open is en $O \subseteq A$ dan is $O \subseteq \operatorname{Int} A$.

c) A is open dan en slechts dan als $A = \operatorname{Int} A$.

d) A is open dan en slechts dan als A omgeving is van elke $x \in A$.

Uit onderdelen (a) en (b) volgt dat $\operatorname{Int} A$ de grootste open verzameling is die bevat is in A.

▶ **1.11.** Opgave.

a) $\operatorname{Int} \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$.

b) Als $A \subseteq B$ dan $\operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} B$.

c) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

d) $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B \subseteq \operatorname{Int}(A \cup B)$.

▶ **1.12.** Opgave.

a) $\overline{A}$ is gesloten, en $A \subseteq \overline{A}$.

b) Als F gesloten is en $A \subseteq F$ dan is $\overline{A} \subseteq F$.

c) A is gesloten dan en slechts dan als $A = \overline{A}$.

Uit onderdelen (a) en (b) volgt dat $\overline{A}$ de kleinste gesloten verzameling is die A omvat.

▶ **1.13.** Opgave.

a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

b) Als $A \subseteq B$ dan $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

d) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

In onderdeel (b), en trouwens ook in Definitie 1.8(c), kunnen we 'omgeving' vervangen door 'open omgeving'. In de topologie is het overigens in vrijwel alle beweringen en bewijzen zo dat we omgevingen zonder beperking der algemeenheid open kunnen veronderstellen.

▶ **1.14.** Opgave. $x \in A'$ dan en slechts dan als $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

▶ **1.15.** Opgave.

a) $\overline{A} = A \cup A'$.

b) A is gesloten dan en slechts dan als $A' \subseteq A$.

▶ **1.16.** OPGAVE.
a) Als $A \subseteq B$ dan $A' \subseteq B'$.
b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
c) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

▶ **1.17.** OPGAVE.
a) A is clopen dan en slechts dan als $\operatorname{Rd} A = \varnothing$.
b) $\operatorname{Rd} A = \operatorname{Rd}(X \setminus A)$.

▶ **1.18.** OPGAVE.
a) $\operatorname{Rd} A$ is gesloten.
b) $\operatorname{Rd} \operatorname{Rd} A \subseteq \operatorname{Rd} A$.
c) $\operatorname{Rd}(A \cup B) \subseteq \operatorname{Rd} A \cup \operatorname{Rd} B$.
d) $\operatorname{Rd}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Rd} A \cup \operatorname{Rd} B$.

Geen van de inclusies in bovenstaande opgaven kunnen vervangen worden door gelijkheden. We geven enkele voorbeelden.

1.19. VOORBEELDEN. Zij $X = \mathbb{R}$ met de standaard topologie.
1. Zij $A = [0, 1]$ en $B = [1, 2]$, dan is $\operatorname{Int}(A \cup B) \neq \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$.
2. Zij $A = (0, 1)$ en $B = (1, 2)$, dan is $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ en $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$.
3. Zij $X = \{0, 1\}$ met de indiscrete topologie, en zij $A = \{0\}$. Dan is $A' = \{1\}$ en $A'' = \{0\}$, dus noch $A \subseteq A'$, noch $A' \subseteq A$, noch $A' \subseteq A''$, noch $A'' \subseteq A'$.
4. Zij $A = \mathbb{Q}$, dan is $\operatorname{Rd} A = \mathbb{R} \neq \varnothing = \operatorname{Rd} \operatorname{Rd} A$.

Naar aanleiding van 1.19.3 merken we nog op dat we in Hoofdstuk 5 zullen zien dat in enigszins 'fatsoenlijke' ruimten (T_1-ruimten) wèl geldt dat $A'' \subseteq A'$. Met Propositie 1.15(a) volgt dan overigens ook nog dat A' dan gesloten is.

Dichte verzamelingen

Ook bekend uit de cursus Metrische Topologie is het volgende begrip:

1.20. DEFINITIE. Eeen deelverzameling D van een ruimte X heet *dicht in* X als $\overline{D} = X$.

1.21. PROPOSITIE. *Zij X een topologische ruimte en $D \subseteq X$. Dan is D dicht in X dan en slechts dan als D elke niet-lege open deelverzameling van X snijdt.*

BEWIJS. Als D dicht is dan is X de enige gesloten verzameling die om D past; daarmee is $\varnothing$ de enige open verzameling die D niet snijdt.

Omgekeerd, als D niet dicht is dan is $X \setminus \overline{D}$ open, niet leeg en disjunct van D. □

1.22. DEFINITIE. Een topologische ruimte heet *separabel* als deze een aftelbare dichte deelverzameling bevat.

1.23. VOORBEELDEN.
1. X is altijd dicht in X.
2. $\mathbb{Q}^n$ is dicht in $\mathbb{R}^n$, dus $\mathbb{R}^n$ is separabel.

3. Als X de indiscrete topologie heeft dan is elke niet-lege deelverzameling van X dicht in X. In het bijzonder is X altijd separabel.
4. Als X de discrete topologie heeft dan is X zelf de enige dichte deelverzameling van X, dus X is alleen separabel als X aftelbaar is.

Convergentie

Convergentie van rijen is in de inleiding al gedefinieerd; we herhalen de definitie.

1.24. DEFINITIE. Een rij $\langle x_n\rangle_n$ in X heet *convergent* met *limiet* $x \in X$ als voor elke omgeving U van x een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat $x_n \in U$ voor elke $n \geqslant N$.

▶ **1.25.** OPGAVE.
a) Als $\langle x_n\rangle_n$ een rij in A die naar een punt x convergeert dan $x \in \overline{A}$.
b) In $\mathbb{R}$ met de co-aftelbare topologie geldt: $0 \in \overline{(0,1)}$ maar er is geen rij in $(0,1)$ die naar 0 convergeert.

Vraagstukken

▶ **1.1.** VRAAGSTUK. Zij X een verzameling en $p \in X$. Toon aan dat de volgende families topologieën op X zijn.
a) $\mathcal{T}_v = \{O : p \in O \text{ of } O = \varnothing\}$ ($\mathcal{T}_v$ heet de *vaste-punttopologie* op X).
b) $\mathcal{T}_u = \{O : p \notin O \text{ of } O = X\}$ ($\mathcal{T}_u$ heet de *uitgesloten-punttopologie* op X).
Ga na dat de Sierpiński-ruimte van beide typen een speciaal geval is.

▶ **1.2.** VRAAGSTUK. Zij X een verzameling met ten minste twee punten. Laat zien dat er *geen* metriek d op X gedefinieerd kan worden zó dat de door d geïnduceerde topologie indiscreet is.

▶ **1.3.** VRAAGSTUK. Laat $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ een familie topologieën zijn op X.
a) Toon aan dat $\bigcap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ weer een topologie op X is.
b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat $\bigcup_{i\in I}\mathcal{T}_i$ niet noodzakelijk een topologie op X is, zelfs niet als I slechts twee elementen bevat.

▶ **1.4.** VRAAGSTUK. Zij X een topologische ruimte en $x \in X$.
a) Toon aan dat de doorsnede van eindig veel (open) omgevingen van x weer een (open) omgeving is van x.
b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat een oneindige doorsnede van omgevingen van x niet noodzakelijk een omgeving is van x.

▶ **1.5.** VRAAGSTUK. Zij X een topologische ruimte, met A en B deelverzamelingen van X. Bewijs de volgende inclusies, en geef telkens een voorbeeld waaruit blijkt dat in het algemeen geen gelijkheid geldt.
a) $\overline{A}\setminus\overline{B} \subseteq \overline{A\setminus B}$
b) $\operatorname{Rd}(A\cup B) \subseteq \operatorname{Rd}A \cup \operatorname{Rd}B$
c) $\operatorname{Rd}(A\cap B) \subseteq \operatorname{Rd}A \cup \operatorname{Rd}B$
d) $\operatorname{Rd}\overline{A} \subseteq \operatorname{Rd}A$

▶ **1.6.** Vraagstuk. Zij X een topologische ruimte en $A \subseteq X$. Toon aan: als O open is in X en $O \cap A = \varnothing$ dan is ook $O \cap \overline{A} = \varnothing$.

▶ **1.7.** Vraagstuk. Zij D dicht in X. Toon aan dat $\overline{O \cap D} = \overline{O}$ voor elke open O in X.

▶ **1.8.** Vraagstuk. Bepaal alle dichte deelverzamelingen ten opzichte van

a) de co-eindige topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{ce}}$;

b) de co-aftelbare topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{ca}}$;

c) de topologie van de Sierpiński-ruimte is.

Leid hieruit af of (wanneer) de genoemde ruimten separabel zijn.

Hoofdstuk 2

Bases en subbases

Het definiëren van een topologische ruimte door precies aan te geven wat de open verzamelingen zijn is nogal omslachtig. Vaak is het mogelijk een beperkte, eenvoudiger te omschrijven familie aan te geven die in wezen de topologie van de ruimte geheel bepaalt. De situatie in een metrische ruimte is hiervan het beste voorbeeld: open verzamelingen kunnen zeer ingewikkeld zijn, maar wanneer een verzameling open is wordt bepaald door de open bollen. Een natuurlijke generalisatie ervan leidt tot het begrip *basis* voor een topologie. Soms willen we dat een paar speciale verzamelingen open zullen zijn; zo'n wens leidt tot het begrip *subbasis* voor een topologie.

Basis

2.1. Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een familie $\mathcal{B}$ heet een *basis voor* $\mathcal{T}$ (ook wel: *basis voor* X) als geldt:

(B1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$;

(B2) voor elke $O \in \mathcal{T}$ bestaat een $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ zó dat $O = \bigcup \mathcal{B}'$.

We geven meteen een equivalente definitie:

2.2. Propositie. *Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een familie $\mathcal{B}$ is een basis voor X als*

(B1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$*;*

(B2)$'$ *voor elke $O \in \mathcal{T}$ en elke $x \in O$ bestaat een $B \in \mathcal{B}$ met $x \in B \subseteq O$.*

We laten ook even zien dat een familie $\mathcal{B}$ nooit een basis kan zijn voor meer dan één topologie.

2.3. Propositie. *Zij X een verzameling, voorzien van topologieën $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$, en zij $\mathcal{B}_1$ een basis voor $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{B}_2$ een basis voor $\mathcal{T}_2$.*

(a) *Als $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ dan is $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.*

(b) *Als $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ dan is $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Bewijs. (a) Zij $O \in \mathcal{T}_1$. Wegens (B2) (voor $\mathcal{T}_1$) is er dan een $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$ zó dat $O = \bigcup \mathcal{B}$. Maar de elementen van $\mathcal{B}$ zijn wegens $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ open met betrekking tot $\mathcal{T}_2$, zodat ook $O \in \mathcal{T}_2$ daar een topologie gesloten is onder verenigingen. Onderdeel (b) is een direct gevolg van (a) en eigenschap (B1). $\square$

Onderdeel (a) van deze propositie kunnen we ook aldus onder woorden brengen: als $\mathcal{B}$ een basis is voor $\mathcal{T}$, dan is $\mathcal{T}$ de kleinste topologie die $\mathcal{B}$ bevat.

2.4. Voorbeelden.

1. $\mathcal{T}$ is altijd een basis voor $(X, \mathcal{T})$.

2. Zij (X, d) een metrische ruimte. Dan vormt $\{B(x,r) : x \in X, r \in \mathbb{R}^+\}$ een basis voor de (metrische) topologie op X.
3. Zij $\mathcal{T}_\mathrm{d}$ de discrete topologie op X. Dan vormt $\big\{\{x\} : x \in X\big\}$ een basis voor X.

▶ **2.5.** OPGAVE. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij $\mathcal{B}$ een basis voor $\mathcal{T}$. Toon aan dat $\mathcal{T} = \bigcap\{\mathcal{T}' : \mathcal{T}' \text{ is een topologie op } X \text{ met } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}'\}$.

Het is nog niet direct duidelijk hoe we het begrip basis kunnen gebruiken om een topologische ruimte te definiëren: immers, we gaan er bij de definitie al vanuit dat X een topologische ruimte is! Voor we dat duidelijk maken eerst nog de volgende eigenschappen van een basis:

2.6. PROPOSITIE. *Zij $\mathcal{B}$ een basis voor $(X, \mathcal{T})$. Dan geldt:*
(a) $\bigcup \mathcal{B} = X$.
(b) *voor alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ en alle $x \in B_1 \cap B_2$ bestaat een $B \in \mathcal{B}$ zó dat $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.*

BEWIJS. (a) $X \in \mathcal{T}$, dus op grond van (B2) bestaat een familie $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ met $X = \bigcup \mathcal{B}'$; maar dan natuurlijk ook $X = \bigcup \mathcal{B}$.

(b) Wegens (B1) zijn $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$ en dus $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$. Pas nu (B2)$'$ toe op $O = B_1 \cap B_2$. □

De volgende stelling laat zien dat als we een familie $\mathcal{B}$ hebben die aan de eigenschappen van deze propositie voldoet, deze familie als basis voor een (uniek bepaalde) topologie kan fungeren. Houd in de gaten dat in de stelling X in eerste instantie niet meer is dan een *verzameling*: een topologie op X moet nog gedefinieerd worden!

2.7. STELLING. *Zij X een verzameling en zij $\mathcal{B}$ een familie deelverzamelingen van X met de eigenschappen:*
(a) $\bigcup \mathcal{B} = X$.
(b) *voor alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ en alle $x \in B_1 \cap B_2$ bestaat een $B \in \mathcal{B}$ zó dat $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.*
Dan is er een unieke topologie $\mathcal{T}$ op X zó dat $\mathcal{B}$ een basis is voor $\mathcal{T}$.

BEWIJS. Merk op dat als zo'n topologie bestaat, deze op grond van Propositie 2.3(b) uniek is. Definieer

$$\mathcal{T} = \big\{O \subseteq X : (\exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B})\big(\bigcup \mathcal{B}' = O\big)\big\}.$$

Bewering: $\mathcal{T}$ is een topologie op X. We moeten de eigenschappen (T1), (T2) en (T3) nagaan. Voor (T1) merken we op dat $\varnothing = \bigcup \varnothing$, en $X = \bigcup \mathcal{B}$ op grond van eigenschap (a). (T2) bewijzen we voor de doorsnede van twee elementen (zie Opgave 1.2). Zij dus $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, zeg $O_1 = \bigcup \mathcal{B}_1$ en $O_2 = \bigcup \mathcal{B}_2$, waarbij $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}$. Zij $x \in O_1 \cap O_2$, dan zijn er $B_1 \in \mathcal{B}_1$ en $B_2 \in \mathcal{B}_2$ zó dat $x \in B_1 \cap B_2$. Op grond van (b) bestaat er dan een $B(x) \in \mathcal{B}$ met $x \in B(x) \subseteq B_1 \cap B_2$. Definieer nu $\mathcal{B}' = \{B(x) : x \in O_1 \cap O_2\}$, dan is $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ en dus $O_1 \cap O_2 = \bigcup \mathcal{B}' \in \mathcal{T}$. (T3) is eenvoudig: als $O_i = \bigcup \mathcal{B}_i$ $(i \in I)$ dan is $\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup \mathcal{B}'$ voor $\mathcal{B}' = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$.
Bewering: $\mathcal{B}$ is een basis voor $\mathcal{T}$. Als $B \in \mathcal{B}$ dan $B \in \mathcal{T}$ want $B = \bigcup \mathcal{B}'$ voor $\mathcal{B}' = \{B\}$; dus aan (B1) is voldaan. (B2) geldt per definitie van $\mathcal{T}$. □

De unieke topologie uit deze stelling noemen we de *topologie voortgebracht door* $\mathcal{B}$. Zoals we hebben opgemerkt is het de kleinste topologie op X die $\mathcal{B}$ bevat.

In het volgende voorbeeld komt een aantal belangrijke topologische ruimten aan de orde die met behulp van een basis gedefinieerd worden.

2.8. VOORBEELDEN.

1. Definieer een familie deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ door $\mathcal{B} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Dan is $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{R}$, en wegens $[a_1,b_1) \cap [a_2,b_2) = [a,b)$ met $a = \max\{a_1,a_2\}$ en $b = \min\{b_1,b_2\}$ geldt zelfs: als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ dan $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. De familie $\mathcal{B}$ brengt dus een topologie voort. De verzameling $\mathbb{R}$ met de door $\mathcal{B}$ voortgebrachte topologie heet de *Sorgenfrey-lijn*, die we in het vervolg zullen aangeven als $\mathbb{S}$. De topologie heet de *Sorgenfrey-topologie* of *(linker) speldentopologie*.
2. Zij $(X, \leqslant)$ een totaal (lineair) geordende verzameling. Een *open interval* in X is een deelverzameling van de vorm $(a,b) = \{x : a < x < b\}$, $(a, \rightarrow) = \{x : a < x\}$, $(\leftarrow, b) = \{x : x < b\}$ of $(\leftarrow, \rightarrow) = X$. De familie van alle open intervallen in X vormt een basis voor een topologie op X: de *orde-topologie*. De ordening $(X, \leqslant)$ voorzien van de orde-topologie heet een *geordende ruimte*.

2.9. DEFINITIE. We zeggen dat een topologische ruimte aan het *tweede aftelbaarheidsaxioma* voldoet als deze een aftelbare basis heeft. Omdat "ruimte die aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet" nogal een mond vol is noemen we zo'n ruimte kortweg een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte. De 'C' komt van het Engelse 'countable'; in het Engels heten dergelijke ruimten namelijk *second-countable spaces*.

2.10. STELLING. (a) *Elke* $\mathrm{C_{II}}$*-ruimte is separabel.*
(b) *Elke separabele metrische ruimte is een* $\mathrm{C_{II}}$*-ruimte.*

BEWIJS. (a) Zij X een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte, en zij $\mathcal{B}$ een aftelbare basis voor X. Kies voor elke niet-lege $B \in \mathcal{B}$ een punt $d_B \in B$. Dan is $D = \{d_B : B \in \mathcal{B}\}$ dicht in X. Immers, als O open is in X en niet-leeg, dan bevat O een niet-lege $B \in \mathcal{B}$, en dus $d_B \in O \cap D$. Gebruik nu Propositie 1.21. Het is duidelijk dat D aftelbaar is.

(b) Zij (X,d) een metrische ruimte, en zij D een aftelbare dichte deelverzameling van X. Definieer $\mathcal{B} = \{B(a, 2^{-n}) : a \in D, n \in \mathbb{N}\}$. Dan is $\mathcal{B}$ aftelbaar, dus we zijn klaar als we kunnen laten zien dat $\mathcal{B}$ een basis is voor X. Aan (B1) is zeker voldaan: als $x \in X$ dan is er $a \in D$ met $d(x,a) < \frac{1}{2}$, maar dan $x \in B(a, \frac{1}{2})$. We bewijzen dat $\mathcal{B}$ aan (B2)$'$ voldoet. Zij O open en $x \in O$. Kies $n \in \mathbb{N}$ met $B(x, 2^{-n}) \subseteq O$ en kies vervolgens $a \in B(x, 2^{-(n+1)}) \cap D$. Ga nu na dat $x \in B(a, 2^{-(n+1)}) \subseteq B(x, 2^{-n}) \subseteq O$ (teken een plaatje). $\square$

▶ **2.11.** OPGAVE. Toon aan

a) $\mathbb{R}^n$ is een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte.
b) De Sorgenfrey-lijn is separabel maar niet $\mathrm{C_{II}}$.

Lokale bases

We kunnen het begrip basis lokaliseren en toplogieën met behulp van lokale bases definiëren.

2.12. DEFINITIE. Laat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte zijn en $x \in X$. Een *lokale basis in* x is een collectie $\mathcal{B}_x$ open omgevingen van x met de eigenschap dat voor elke omgeving U van x er een $B \in \mathcal{B}_x$ is met $B \subseteq U$.

We noemen een lokale basis ook wel een *basis voor de omgevingen* of een *omgevingenbasis*.

2.13. VOORBEELDEN.

1. Het standaardvoorbeeld van een lokale basis is natuurlijk de familie bollen rond een punt in een metrische ruimte. Als $x \in X$, waar (X, d) een metrische ruimte is dan zijn $\{B_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ en $\{B_{2^{-n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ lokale bases in x.
2. Als $x \in \mathbb{S}$ dan is $\{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ een lokale basis in x.
3. In de discrete topologie is $\{\{x\}\}$ een lokale basis in x.

Om de tegenstelling met een lokale basis duidelijk te maken heet een basis voor de topologie van X wel een *globale* basis.

We kunnen niet alleen topologieën maken door een globale basis aan te geven maar ook door voor ieder punt x in een verzameling X een familie $\mathcal{B}_x$ te kiezen en deze als lokale bases te gebruiken. Hiertoe moeten we, net als bij bases, eerst uitzoeken welke eigenschappen zo'n 'toekenning van lokale bases' moet hebben.

2.14. STELLING. *Neem aan dat in de ruimte $(X, \mathcal{T})$ voor iedere $x \in X$ een lokale basis $\mathcal{B}_x$ gekozen is. Dan gelden de volgende eigenschappen.*

(LB1) *Voor elke x is $\mathcal{B}_x$ niet leeg en $x \in B$ voor elke $B \in \mathcal{B}_x$.*
(LB2) *Als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ dan is er een $B \in \mathcal{B}_x$ zó dat $B \subseteq B_1 \cap B_2$.*
(LB3) *Als $y \in B \in \mathcal{B}_x$ dan is er een $D \in \mathcal{B}_y$ zó dat $D \subseteq B$.*

In eigenschap (LB3) ligt opgesloten dat elk element van $\mathcal{B}_x$ open is; zij is omgeving van al haar punten.

Neem nu aan dat we voor elk punt x in een verzameling X een collectie deelverzamelingen hebben gekozen zó dat aan (LB1), (LB2) en (LB3) van Stelling 2.14 is voldaan. Definieer $\mathcal{T}$ door: $U \in \mathcal{T}$ dan en slechts dan als voor elke $x \in U$ een $B \in \mathcal{B}_x$ bestaat met $B \subseteq U$.

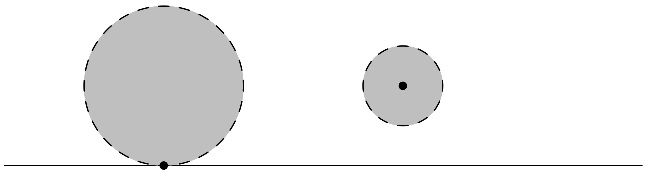
We gaan na dat $\mathcal{T}$ inderdaad een topologie is en dat voor elke x de familie $\mathcal{B}_x$ een lokale basis (voor $\mathcal{T}$) in x is.

Dat $\varnothing \in \mathcal{T}$ is duidelijk (waarom?) en om in te zien dat $X \in \mathcal{T}$ gebruiken we Eigenschap (LB1). Eigenschap (LB2) zorgt er voor dat de doorsnede van twee elementen van $\mathcal{T}$ ook weer tot $\mathcal{T}$ behoort. Dat verenigingen van deelcollecties van $\mathcal{T}$ tot $\mathcal{T}$ behoren is ook niet moeilijk in te zien.

Eigenschap (LB3) impliceert dat voor elke x elk element van $\mathcal{B}_x$ tot $\mathcal{T}$ behoort en daarmee volgt uit de definitie van $\mathcal{T}$ dat $\mathcal{B}_x$ inderdaad een omgevingenbasis voor x is.

2.15. VOORBEELD. We nemen $\mathbf{N} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$, het bovenhalfvlak. We wijzen voor elk punt in $\mathbf{N}$ een lokale basis aan. Voor elk punt (x, y) in $\mathbf{N}$ stellen we $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{B(x, y, n) : n \in \mathbb{N}\}$, waar de verzamelingen $B(x, y, n)$ als volgt gedefinieerd zijn.

- Voor een punt (x, y) met $y > 0$ en voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we
$$B(x, y, n) = \{(s, t) \in \mathbf{N} : \|(s, t) - (x, y)\| < 2^{-n}\},$$
de gewone open cirkelschijf om (x, y) met straal 2^{-n}.
- Voor een punt $(x, 0)$ en voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we
$$B(x, 0, n) = \{(x, 0)\} \cup \{(s, t) \in \mathbf{N} : \|(s, t) - (x, 2^{-n})\| < 2^{-n}\},$$
de verzameling die bestaat uit het punt $(x, 0)$ en de open cirkelschijf met straal 2^{-n} die in $(x, 0)$ de x-as raakt, zie Figuur 1.



FIGUUR 1. Basisomgevingen in het Niemytzki vlak

Deze topologische ruimte **N** staat bekend als het *Niemytzki vlak.*

▶ **2.16.** OPGAVE. Toon aan dat de toekenning $(x, y) \mapsto \mathcal{B}_{(x,y)}$ in **N** aan de eisen uit Stelling 2.14 voldoet.

Er is ook een lokale versie van de C_{II}-eigenschap:

2.17. DEFINITIE. We zeggen dat een topologische ruimte aan het *eerste aftelbaarheids-axioma* voldoet als er in elk punt een aftelbare lokale basis is. Ook hier houden we een afkorting aan: we noemen dergelijke ruimten C_I-ruimte.. In het Engels spreekt men van *first-countable spaces.*

2.18. STELLING. (a) *Elke metrische ruimte is een* C_I*-ruimte.*
(b) *Elke* C_{II}*-ruimte is een* C_I*-ruimte.*

BEWIJS. (a) Zie Voorbeeld 2.13.1.

(b) Als $\mathcal{B}$ een globale basis is dan is voor elke x de familie $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ een lokale basis in x. $\square$

2.19. VOORBEELD. Als X een overaftelbare verzameling is met de co-eindige topologie, dan is X geen C_I-ruimte. Immers, als $x \in X$, en $\mathcal{U}$ is een aftelbare familie omgevingen van x, dan is $\bigcup\{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ aftelbaar en dus is $\bigcap \mathcal{U}$ overaftelbaar. Er bestaat dan een $y \in \bigcap \mathcal{U}$ met $y \neq x$, en $X \setminus \{y\}$ is dan een omgeving van x die geen enkele $U \in \mathcal{U}$ bevat.

Subbasis

We keren nu terug naar de 'globale' situatie. Zoals we gezien hebben kan niet zomaar elke familie deelverzamelingen van X als basis voor een topologie fungeren: zo'n familie moet voldoen aan (B1) en (B2). Om nu toch een willekeurige familie deelverzamelingen van een verzameling X een topologie op X te laten 'voortbrengen', introduceren we het begrip *subbasis.*

2.20. DEFINITIE. Zij X een verzameling, en zij $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dan is $\mathcal{S}^\wedge = \{\bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}'$ eindig en $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}\}$.

$\mathcal{S}^\wedge$ bestaat dus uit eindige doorsneden van elementen van $\mathcal{S}$, maar ook $X = \bigcap \varnothing$ behoort tot $\mathcal{S}^\wedge$! Het is dus duidelijk dat elke topologie op X die $\mathcal{S}$ bevat, ook $\mathcal{S}^\wedge$ moet bevatten (eigenschappen (T1) en (T2) van een topologie). De volgende stelling maakt duidelijk wat het nut is van het invoeren van $\mathcal{S}^\wedge$.

2.21. STELLING. *Zij X een verzameling, en zij $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dan is $\mathcal{S}^\wedge$ een basis voor een topologie op X.*

BEWIJS. We moeten nagaan dat $\mathcal{S}^\wedge$ voldoet aan (a) en (b) van Stelling 2.7. Aan (a) is voldaan omdat, zoals hierboven opgemerkt, $X \in \mathcal{S}^\wedge$. Zij dus $B_1, B_2 \in \mathcal{S}^\wedge$, zeg $B_1 = \bigcap \mathcal{S}_1$ en $B_2 = \bigcap \mathcal{S}_2$, met $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}$ eindig. Dan $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{S}^\wedge$ want $B_1 \cap B_2 = \bigcap(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$. $\square$

Gecombineerd met Stelling 2.7 krijgen we het volgende resultaat:

2.22. STELLING. *Zij X een verzameling, en zij $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dan is er een unieke topologie $\mathcal{T}$ op X zó dat $\mathcal{S}^\wedge$ een basis is voor $\mathcal{T}$.*

De unieke topologie uit deze stelling noemen we de *topologie voortgebracht door* $\mathcal{S}$, deze is dus precies de topologie voortgebracht door $\mathcal{S}^\wedge$. Het is duidelijk dat dit niet alleen de kleinste topologie is die $\mathcal{S}^\wedge$ bevat, maar zelfs de kleinste topologie die $\mathcal{S}$ bevat. Als $\mathcal{T}$ een topologie op X is die op deze wijze door een familie $\mathcal{S}$ is voortgebracht dan heet $\mathcal{S}$ een subbasis voor $\mathcal{T}$:

2.23. DEFINITIE. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een familie $\mathcal{S}$ heet een *subbasis voor* $\mathcal{T}$ (ook wel: *subbasis voor* X) als $\mathcal{S}^\wedge$ een basis voor $\mathcal{T}$ is.

2.24. VOORBEELDEN.

1. $\{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$ vormt een subbasis voor de euclidische topologie op $\mathbb{R}$.
2. $\varnothing$ is een subbasis voor de indiscrete topologie.
3. $\big\{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\big\}$ vormt een subbasis voor de topologie op $\mathbb{S}$.

▶ **2.25.** OPGAVE. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij $\mathcal{S}$ een subbasis voor $\mathcal{T}$. Toon aan dat $\mathcal{T} = \bigcap\{\mathcal{T}' : \mathcal{T}' \text{ is een topologie op } X \text{ met } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}'\}$.

▶ **2.26.** OPGAVE. Zij X een topologische ruimte. Toon aan dat een basis voor X ook een subbasis is voor X.

Tot slot van dit hoofdstuk merken we nog op dat de begrippen basis en subbasis die we hier behandeld hebben betrekking hebben op de familie van *open* verzamelingen. Men kan echter evenzeer uitgaan van de gesloten verzamelingen, en zo de in de literatuur eveneens gangbare begrippen basis en subbasis voor de gesloten verzamelingen ontwikkelen. Zo is dan bijvoorbeeld elke gesloten verzameling een *doorsnede* van basis-gesloten verzamelingen, en uit een willekeurige collectie deelverzamelingen (subbasis) verkrijgt men een basis voor de gesloten verzamelingen door het nemen van eindige *verenigingen*.

Vraagstukken

▶ **2.1.** VRAAGSTUK. Zij X een verzameling met topologieën $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ voortgebracht door de bases $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$. Toon aan dat $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ dan en slechts dan als geldt: $(\forall B_1 \in \mathcal{B}_1)(\forall x \in B_1)(\exists B_2 \in \mathcal{B}_2)(x \in B_2 \subseteq B_1)$ en $(\forall B_2 \in \mathcal{B}_2)(\forall x \in B_2)(\exists B_1 \in \mathcal{B}_1)(x \in B_1 \subseteq B_2)$.

▶ **2.2.** VRAAGSTUK. Toon aan dat $\big\{\{x\} : x \neq p\big\} \cup \{X\}$ een basis is voor de uitgesloten-punttopologie op X.

▶ **2.3.** VRAAGSTUK. Zij X een topologische ruimte, $x \in X$ en $A \subseteq X$. Zij verder $\mathcal{B}$ een basis voor X, en $\mathcal{U}(x)$ een lokale basis in x. Toon aan:

a) A is dicht in $X \iff (\forall B \in \mathcal{B})(B \neq \varnothing \implies B \cap A \neq \varnothing)$.

b) $x \in \overline{A} \iff (\forall U \in \mathcal{U}(x))(U \cap A \neq \varnothing)$.

c) $x \in A^\circ \iff (\exists U \in \mathcal{U}(x))(U \subseteq A)$.

d) $x \in A' \iff (\forall U \in \mathcal{U}(x))(U \cap A \setminus \{x\} \neq \varnothing)$.

▶ **2.4.** VRAAGSTUK. Zij X een topologische ruimte met een aftelbare subbasis. Toon aan dat X een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte is.

▶ **2.5.** VRAAGSTUK. Zij X voorzien van de co-eindige topologie.

a) Toon aan dat $\{X \setminus \{x\} : x \in X\}$ een subbasis is voor X.

b) Toon aan dat X een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte is dan en slechts dan als X aftelbaar is.

▶ **2.6.** VRAAGSTUK. Zij X voorzien van de discrete topologie. Toon aan dat X een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte is dan en slechts dan als X aftelbaar is.

▶ **2.7.** VRAAGSTUK.

a) Toon aan dat de Sorgenfrey-lijn separabel is en $\mathrm{C_I}$, maar niet $\mathrm{C_{II}}$.

b) Toon aan dat het Niemytzki-vlak separabel is en $\mathrm{C_I}$, maar niet $\mathrm{C_{II}}$.

▶ **2.8.** VRAAGSTUK. Gegeven is de volgende deelverzameling van $\mathbb{R}^2$:

$$X = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{\infty\}) \cup \{\infty\}.$$

We kennen elk punt een lokale basis toe:

- $\mathcal{B}_{(m,n)} = \bigl\{\{(m,n)\}\bigr\}$;
- $\mathcal{B}_{(m,\infty)} = \bigl\{B\bigl((m,\infty),k\bigr) : k \in \mathbb{N}\bigr\}$, waarbij $B\bigl((m,\infty),k\bigr) = \bigl\{(m,\infty)\bigr\} \cup \bigl\{(m,n) : n \geqslant k\bigr\}$.
- $\mathcal{B}_\infty = \{B(f,k) : f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$, waarbij $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ de verzameling van *alle* functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ is en

$$B(f,k) = \{\infty\} \cup \bigl\{(m,\infty) : m \geqslant k\bigr\} \cup \bigl\{(m,n) : m \geqslant k, n \geqslant f(m)\bigr\}.$$

(Teken een plaatje om de gedachten te bepalen.)

a) Toon aan dat op deze manier een goede toekenning van lokale bases is gedaan.

b) Bewijs dat elke basisomgeving clopen is.

c) Toon aan dat X regulier is.

d) Bewijs dat ∞ in de afsluiting van $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zit maar dat geen enkele rij in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ naar ∞ convergeert.

Hoofdstuk 3

Afbeeldingen

In de cursus Metrische Topologie hebben we gezien dat het begrip continuïteit van afbeeldingen gedefinieerd kan worden zonder referentie aan de onderhavige metriek, puur in termen van open verzamelingen. Deze definitie kan ongewijzigd toegepast worden op willekeurige topologische ruimten. Naast de continue afbeeldingen spelen nog enkele andere bijzondere typen afbeeldingen een rol in de topologie.

Continu, open, gesloten, homeomorfisme

We beginnen met de definities.

3.1. DEFINITIE. Laat $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$.

(a) f heet *continu* als voor alle $O \in \mathcal{T}_Y$ geldt dat $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X$.

(b) f heet *open* als voor alle $O \in \mathcal{T}_X$ geldt dat $f[O] \in \mathcal{T}_Y$.

(c) f heet *gesloten* als voor alle $O \in \mathcal{T}_X$ geldt dat $Y \setminus f[X \setminus O] \in \mathcal{T}_Y$ (met andere woorden: als voor alle gesloten F in X geldt dat $f[F]$ gesloten is in Y).

(d) f heet een *homeomorfisme* (notatie: $f : X \simeq Y$) als f bijectief is, en zowel f als f^{-1} continu zijn.

Enkele voorbeelden, naast die uit de cursus Metrische Topologie:

3.2. VOORBEELDEN.

1. De identieke functie $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ is altijd een homeomorfisme.
2. Als $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ twee topologieën op X zijn met $\mathcal{T}_2$ fijner dan $\mathcal{T}_1$, dan is $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ continu, en $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ is zowel open als gesloten.

▶ **3.3.** OPGAVE. Zij O open in de ruimte X en definieer $f_O : X \to \mathbf{S}$ (de Sierpiński-ruimte) door $f_O(x) = 0$ als $x \in O$ en $f_O(x) = 1$ als $x \notin O$. Toon aan dat f_O continu is.

Naast de globale continuïteit van Definitie 3.1(a) is er, ook weer net als bij Metrische Topologie, het begrip van lokale continuïteit, continuïteit in een punt:

3.4. DEFINITIE. Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$. Zij $x \in X$. Dan heet f *continu in x* als voor elke (open) omgeving V van $f(x)$ geldt dat $f^{-1}[V]$ een omgeving is van x.

In een iets andere formulering:

3.5. PROPOSITIE. *Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$. Zij $x \in X$. Dan is f continu in x dan en slechts dan als voor elke omgeving V van $f(x)$ een (open) omgeving U van x bestaat zó dat $f[U] \subseteq V$.*

3.6. PROPOSITIE. *Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$. Dan is f continu dan en slechts dan als f continu is in elk punt $x \in X$.*

BEWIJS. Als f continu is en U is een open omgeving van $f(x)$, dan is $f^{-1}[U]$ open in X en $x \in f^{-1}[U]$ dus $f^{-1}[U]$ is een omgeving van x. Omgekeerd, zij O open in Y, en zij $x \in f^{-1}[O]$. Dan is O een omgeving van $f(x)$ en dus is volgens aanname $f^{-1}[O]$ een omgeving van x. We zien dat $f^{-1}[O]$ omgeving is van al zijn punten, en dus open. $\square$

De volgende propositie laat onder andere zien dat we ons voor het nagaan van continuïteit kunnen beperken tot een basis of subbasis van de beeldruimte. Dit is natuurlijk met name nuttig als de topologie van de beeldruimte door middel van een (sub)basis gedefinieerd is.

3.7. PROPOSITIE. *Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$. Zij $\mathcal{B}$ een basis voor Y en $\mathcal{S}$ een subbasis voor Y. De volgende beweringen zijn equivalent.*

1. *f is continu.*
2. *Voor elke gesloten F in Y is $f^{-1}[F]$ gesloten in X.*
3. *Voor elke $B \in \mathcal{B}$ is $f^{-1}[B]$ open in X.*
4. *Voor elke $S \in \mathcal{S}$ is $f^{-1}[S]$ open in X.*
5. *Voor elke $A \subseteq X$ geldt dat $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.*

BEWIJS. Dat (1) en (2) equivalent zijn volgt door over te gaan op complementen, en (1) $\Longrightarrow$ (3) en (3) $\Longrightarrow$ (4) zijn triviaal.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Zij O open in Y. Dan is er een $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ zó dat $O = \bigcup \mathcal{B}'$. Maar dan is $f^{-1}[O] = \bigcup\{f^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}'\}$ open in X.

(4) $\Longrightarrow$ (1): Als $B \in \mathcal{S}^\wedge$, zeg $B = \bigcap \mathcal{S}'$ met $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ eindig, dan is $f^{-1}[B] = \bigcap\{f^{-1}[S] : S \in \mathcal{S}'\}$ open in X. Pas nu (3) $\Longrightarrow$ (1) toe op $\mathcal{B} = \mathcal{S}^\wedge$.

(2) $\Longrightarrow$ (5): Als F een willekeurige gesloten verzameling is met $f[A] \subseteq F$ dan is $f^{-1}[F]$ een gesloten verzameling met $A \subseteq f^{-1}[F]$. Dan geldt ook $\overline{A} \subseteq f^{-1}[F]$ en dus $f[\overline{A}] \subseteq F$. Omdat F willekeurig was volgt nu $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

(5) $\Longrightarrow$ (2): Zij F gesloten in Y, en zij $A = f^{-1}[F]$. Omdat $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$ en $f[A] \subseteq F$ volgt nu $f[\overline{A}] \subseteq F$ en dus $\overline{A} \subseteq A$; dus $f^{-1}[F]$ is gesloten in X. $\square$

Voor open afbeeldingen is er een soortgelijke, maar beperktere stelling.

3.8. PROPOSITIE. *Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$. Zij $\mathcal{B}$ een basis voor X. De volgende beweringen zijn equivalent:*

1. *f is open.*
2. *Voor elke $B \in \mathcal{B}$ is $f[B]$ open in Y.*

BEWIJS. Daar $\mathcal{B}$ bestaat uit open deelverzamelingen van X is zeker elke $f[B]$ ($B \in \mathcal{B}$) open als f open is. Omgekeerd, als elke $f[B]$ ($B \in \mathcal{B}$) open is, en O is een willekeurige open deelverzameling van X, dan is er een $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ zó dat $O = \bigcup \mathcal{B}'$. Maar dan is $f[O] = \bigcup\{f[B] : B \in \mathcal{B}'\}$ open in Y. $\square$

De analoge bewering voor een subbasis is in het algemeen niet equivalent omdat in het algemeen $f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B]$.

3.9. VOORBEELD. Definieer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = x \sin x$. Dan is $f(-\pi, \pi) = [0, a]$, met $a = \max\{f(x) : 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$, dus f is niet open. Echter, voor elke element S uit de subbasis van Voorbeeld 2.24(a) geldt dat $f[S]$ open is in $\mathbb{R}$, immers $f\big[(a, \infty)\big] = f\big[(-\infty, a)\big] = \mathbb{R}$ voor elke $a \in \mathbb{R}$.

▶ **3.10.** OPGAVE. Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$ een bijectie. De volgende beweringen zijn equivalent:

a. f is open.
b. f is gesloten.
c. f^{-1} is continu.

Een onmiddellijk gevolg is:

▶ **3.11.** OPGAVE. Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$ een bijectie. De volgende beweringen zijn equivalent:

a. f is een homeomorfisme.
b. f is continu en open.
c. f is continu en gesloten.

Alle gedefinieerde typen afbeeldingen gedragen zich fatsoenlijk met betrekking tot compositie:

3.12. PROPOSITIE. *Laat X, Y en Z topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ afbeeldingen.*

(a) *Als f en g beide continu (respectievelijk open, gesloten, homeomorfismen) zijn, dan is ook $g \circ f$ continu (open, gesloten, een homeomorfisme).*
(b) *Als f een homeomorfisme is, dan is ook f^{-1} een homeomorfisme.*

De laatste propositie toont onder meer aan dat de homeomorfisme-relatie $\simeq$ een equivalentierelatie is op de klasse van topologische ruimten. Om begrijpelijke redenen noemen we twee topologische ruimten die in deze zin equivalent zijn *homeomorf*. Het homeomorf zijn van twee topologische ruimten betekent dat deze ruimten in topologische zin geïdentificeerd kunnen worden: elke topologische uitspraak die voor de ene ruimte geldt, geldt ook voor de andere ruimte. Onder de enigszins vage term 'topologische uitspraak' dient hier verstaan te worden: een uitspraak over een topologische ruimte die (in principe) gedaan kan worden in termen van de open verzamelingen van die ruimte. Voorbeelden zijn "X is separabel", "X is een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte" en "X is een $\mathrm{C_I}$-ruimte". We kunnen deze intuïtieve benadering een wat solidere basis geven als we de zaak van de andere kant bekijken: onder een topologische uitspraak verstaan we een uitspraak die "behouden blijft onder homeomorfismen"! Dit leidt tot de volgende 'definities':

Een topologische uitspraak is een uitspraak die inhoudt dat een topologische ruimte een zekere topologische eigenschap heeft.

Een eigenschap $\mathcal{P}$ van topologische ruimten heet een *topologische eigenschap* als geldt: als X de eigenschap $\mathcal{P}$ heeft en $X \simeq Y$ dan heeft ook Y de eigenschap $\mathcal{P}$.

De volgende stelling, waarvan de laatste twee onderdelen opgave zijn, zegt nu dat separabiliteit, de $\mathrm{C_{II}}$-eigenschap en de $\mathrm{C_I}$-eigenschap topologische eigenschappen zijn.

3.13. STELLING. *Laat X en Y homeomorfe topologische ruimten zijn.*

(a) *Als X separabel is dan is ook Y separabel.*

(b) *Als X een* $\mathrm{C_{II}}$*-ruimte is dan is ook Y een* $\mathrm{C_{II}}$*-ruimte.*

(c) *Als X een* $\mathrm{C_{I}}$*-ruimte is dan is ook Y een* $\mathrm{C_{I}}$*-ruimte.*

BEWIJS. Zij $f : X \to Y$ een homeomorfisme.

(a) Zij D een aftelbare dichte deelverzameling van X. Dan is ook $f[D]$ aftelbaar. Omdat f continu is volgt nu met Propositie 3.7(5) dat $Y = f[X] = f[\overline{D}] \subseteq \overline{f[D]} \subseteq Y$, dus $\overline{f[D]} = Y$. □

Merk op dat dit bewijs van (a) zelfs de volgende stelling oplevert:

3.14. STELLING. *Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$ een continue surjectie. Als D dicht is in X, dan is $f[D]$ dicht in Y. In het bijzonder geldt: als X separabel is, dan is ook Y separabel.*

▶ **3.15.** OPGAVE. Bewijs (b) en (c) uit Stelling 3.13.

We zullen in het vervolg niet steeds apart vermelden dat een gedefinieerde eigenschap topologisch is: de bewijzen daarvan zijn meestal triviaal.

Quotiëntafbeeldingen

Quotiëntafbeeldingen komen vaak voor bij het maken van nieuwe ruimten uit oude, zie Hoofdstuk 4. Ze komen ook voort uit de volgende overweging.

▶ **3.16.** OPGAVE. Laat $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimten zijn en $f : X \to Y$ een afbeelding.

a) De familie $\mathcal{T}_f = \{O : O \subseteq Y \text{ en } f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X\}$ is een topologie op Y.

b) f is continu dan en slechts dan als $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_f$.

We geven de situatie waarin $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_f$ een aparte naam.

3.17. DEFINITIE. Een afbeelding $q : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ heet een *quotiëntafbeelding* (of *identificatieafbeelding*) als q surjectief is en als $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_q$, waarbij $\mathcal{T}_q$ als boven gedefinieerd is: $\mathcal{T}_q = \{O : O \subseteq Y \text{ en } q^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X\}$.

Als $q : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ een quotiëntafbeelding is, dan heet Y een *quotiëntruimte van X*. Enkele eenvoudige eigenschappen staan in de volgende propositie.

3.18. PROPOSITIE. *Zij $q : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ een surjectie.*

(a) *q is een quotiëntafbeelding dan en slechts dan als voor alle F geldt: F is gesloten in Y dan en slechts dan als $q^{-1}[F]$ gesloten is in X.*

(b) *Als q een quotiëntafbeelding is dan is q continu.*

(c) *Als q open is en continu dan is q een quotiëntafbeelding.*

(d) *Als q gesloten is en continu dan is q een quotiëntafbeelding.*

BEWIJS. We bewijzen alleen (c). Daar q continu is geldt dat $q^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X$ als $O \in \mathcal{T}_Y$. Omgekeerd, als $q^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X$ dan is $q\big[q^{-1}[O]\big] \in \mathcal{T}_Y$ daar q open is; maar $q\big[q^{-1}[O]\big] = O$ omdat q een surjectie is. □

3.19. PROPOSITIE. *Laat X, Y en Z topologische ruimten zijn, $q : X \to Y$ een quotiëntafbeelding, en $f : Y \to Z$. Dan geldt: f is continu dan en slechts dan als $f \circ q$ continu is.*

BEWIJS. Als f continu is dan is zeker $f \circ q$ continu daar q continu is. Omgekeerd, zij $f \circ q$ continu en O open in Z. Dan is $(f \circ q)^{-1}[O] = q^{-1}\big[f^{-1}[O]\big]$ open in X, dus $f^{-1}[O]$ is open in Y daar q een quotiëntafbeelding is. $\square$

3.20. PROPOSITIE. *De compositie van twee quotiëntafbeeldingen is weer een quotiëntafbeelding.*

Rijen en reeksen

Tot besluit van dit hoofdstuk besteden we nog kort aandacht aan uniforme convergentie van rijen en reeksen functies.

3.21. DEFINITIE. Zij $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ een rij functies.

(a) De rij $\langle f_n \rangle_n$ heet *uniform convergent* met *limiet* $f : X \to \mathbb{R}$ als voor elke $\varepsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon$ voor elke $n \geqslant N$ en elke $x \in X$.

(b) De reeks $\sum_n f_n$ heet *uniform convergent* met *som* $f : X \to \mathbb{R}$ als de rij der partiële sommen $\big(\sum_{n=1}^{k} f_n\big)_k$ uniform convergent is met limiet f.

De volgende stelling is in de cursus Metrische Topologie in essentie reeds bewezen.

3.22. STELLING. *Laat $f_n : X \to \mathbb{R}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ een continue functie zijn. Als $\langle f_n \rangle_n$ uniform convergent is met limiet $f : X \to \mathbb{R}$ dan is f continu.*

In Hoofdstuk 5 zullen we een aantal malen het volgende resultaat gebruiken:

3.23. STELLING (De M-test van Weierstraß). *Zij $\langle f_n \rangle_n$ een rij reëelwaardige functies, en neem aan dat er een rij getallen $\langle M_n \rangle_n$ is met $\big|f_n(x)\big| < M_n$ voor elke $x \in X$. Als $\sum_n M_n$ convergeert, dan is $\sum_n f_n$ uniform convergent. In het bijzonder is de som van deze reeks continu als elke f_n continu is.*

BEWIJS. Uit het majorantencriterium volgt dat voor elke individuele x de reeks $\sum_n f_n(x)$ (absoluut) convergent is. Hiermee definiëren we een functie f door $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Zij $\varepsilon > 0$, en kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$. Dan geldt voor elke $x \in X$ en elke $k \geqslant N$ dat

$$\Big|\sum_{n=1}^{k} f_n(x) - f(x)\Big| = \Big|\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)\Big| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \big|f_n(x)\big| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon.$$

De reeks is dus uniform convergent. $\square$

Vraagstukken

▶ **3.1.** VRAAGSTUK. Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$.

a) Toon aan: f is gesloten $\iff$ $(\forall A \subseteq X)\big(\overline{f[A]} \subseteq f[\overline{A}]\big)$.

b) Zij f een bijectie. Toon aan: f is een homeomorfisme $\iff$ $(\forall A \subseteq X)\big(\overline{f[A]} = f[\overline{A}]\big)$.

▶ **3.2.** VRAAGSTUK. Laat X en Y topologische ruimte zijn, en $f : X \to Y$.

a) Neem aan dat f continu is. Laat zien dat f dan ook *rijcontinu* is, dat wil zeggen: voor elke $x \in X$ en elke rij $\langle x_n \rangle_n$ in X die naar x convergeert geldt dat de rij $\bigl(f(x_n)\bigr)_n$ in Y naar $f(x)$ convergeert.

b) Zij X een $\mathrm{C_I}$-ruimte, en neem aan dat f rijcontinu is. Toon aan dat f continu is.

c) Zij X een overaftelbare verzameling met de co-aftelbare topologie, en zij Y dezelfde verzameling, maar met de discrete topologie. Zij f de identiteit. Toon aan dat f rijcontinu is, maar niet continu.

▶ **3.3.** VRAAGSTUK. Zij $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de projectie op de eerste coördinaat.

a) Toon aan dat p continu en open is.

b) Zij $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$. Laat zien dat F gesloten is in $\mathbb{R}^2$.

c) Bewijs dat p geen gesloten afbeelding is.

▶ **3.4.** VRAAGSTUK. Bewijs dat een bijectieve quotiëntafbeelding een homeomorfisme is.

▶ **3.5.** VRAAGSTUK. Bewijs het omgekeerde van Propositie 3.19, dat wil zeggen, als $q : X \to Y$ een continue surjectie is zó dat voor elke ruimte Z en elke afbeelding $f : Y \to Z$ geldt "als $f \circ q$ continu is dan is f continu", dan is q een quotiëntafbeelding.

Hoofdstuk 4

Deelruimten, sommen, producten en quotiënten

In dit hoofdstuk zullen we een aantal methoden behandelen om uit bestaande topologische ruimten nieuwe ruimten te construeren. De eerste constructie die we bekijken is die van deelruimten: we nemen een deelverzameling van de onderliggende verzameling van een topologische ruimte, en definiëren uit de topologie van de hele ruimte een topologie op de deelverzameling.

Deelruimten

Om te beginnen een opgave.

▶ **4.1.** Opgave. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte en A een deelverzameling van X. Dan is $\mathcal{T}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{T}\}$ een topologie op A.

Met behulp van deze opgave definiëren we het begrip *deelruimte van een topologische ruimte.*

4.2. Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij A een deelverzameling van X. De topologie $\mathcal{T}_A$ uit Opgave 4.1 noemen we de *deelruimtetopologie* of *relatieve topologie* op A, en de aldus verkregen topologische ruimte $(A, \mathcal{T}_A)$ een *deelruimte* van $(X, \mathcal{T})$.

Als we in het vervolg zeggen "zij A een deelruimte van X", dan veronderstellen we altijd dat A voorzien is van deze deelruimtetopologie. Als $B \subseteq A \subseteq X$, dan kunnen we een deelruimtetopologie op B definiëren door B als deelverzameling van X te beschouwen, maar ook door B als deelverzameling van A te beschouwen waarbij A voorzien is van de relatieve topologie ten opzichte van X. Het is echter eenvoudig in te zien dat deze topologieën samenvallen, zodat op dit punt geen verwarring kan ontstaan.

▶ **4.3.** Opgave. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zij A een deelverzameling van X met de relatieve topologie $\mathcal{T}_A$. Zij verder $B \subseteq A$. Laat zien dat de relatieve topologie $\mathcal{T}_B$ van B bezien als deelruimte van $(X, \mathcal{T})$ samenvalt met de relatieve topologie $(\mathcal{T}_A)_B$ van B bezien als deelruimte van $(A, \mathcal{T}_A)$.

▶ **4.4.** Opgave. Zij A een deelruimte van X en $B \subseteq A$. Toon aan:

a) Als B open is in A, en A is open in X, dan is B open in X;

b) Als B gesloten is in A, en A gesloten is in X, dan is B gesloten in X.

4.5. Voorbeelden.

1. Als deelruimte van $\mathbb{R}$ heeft $\mathbb{N}$ de discrete topologie. Immers, $\{n\} = (n-1, n+1) \cap \mathbb{N}$.
2. De deelruimte $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ van het Niemytzki-vlak $\mathbf{N}$ (zie Voorbeeld 2.15) is discreet. Immers, $B(x, 0, 0) \cap A = \{(x, 0)\}$.

Een onmiddellijk gevolg van de definitie is dat ook gesloten verzamelingen en (open) omgevingen in een deelruimte verkregen worden door relativering:

▶ **4.6.** OPGAVE. Zij X een topologische ruimte, en A een deelruimte van X.

a) $F \subseteq A$ is gesloten in de deelruimte A dan en slechts dan als $F = F' \cap A$ voor zekere gesloten deelverzameling F' van X.

b) Als $x \in U \subseteq A$ dan is U een (open) omgeving van x in de deelruimte A dan en slechts dan als $U = U' \cap A$ voor zekere (open) omgeving U' van x in X.

Is de topologie van X door middel van een (sub)basis gegeven is dan hebben we direct ook een (sub)basis voor elke deelruimte tot onze beschikking:

4.7. PROPOSITIE. *Zij X een topologische ruimte.*

(a) *Als $\mathcal{B}$ een basis is voor X, dan is $\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ een basis voor (de relatieve topologie van) A.*

(b) *Als $\mathcal{S}$ een subbasis is voor X, dan is $\mathcal{S}_A = \{S \cap A : S \in \mathcal{S}\}$ een subbasis voor (de relatieve topologie van) A.*

BEWIJS. (a) Zij $x \in A$, dan is er een $B \in \mathcal{B}$ met $x \in B$ dus $x \in B \cap A \in \mathcal{B}_A$. Dus $A = \bigcup \mathcal{B}_A$, en er is voldaan aan (B1). Zij V open in A, en zij $x \in V$. Er bestaat een open W in X met $W \cap A = V$. Kies $B \in \mathcal{B}$ met $x \in B \subseteq W$. Dan geldt: $x \in B \cap A \subseteq V$. Dus ook aan (B2)$'$ is voldaan. □

Een soortgelijke bewering geldt ook voor omgevingsbases:

▶ **4.8.** OPGAVE. Zij X een topologische ruimte, A een deelruimte, en $x \in A$. Als $\mathcal{U}$ een (open) omgevingsbasis is van x in X, dan is $\{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$ een (open) omgevingsbasis van x in de deelruimte A.

4.9. VOORBEELD. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij $\mathcal{T}_d$ de door d geïnduceerde topologie. Als $A \subseteq X$, dan kunnen we op A op natuurlijke wijze twee topologieën definiëren: enerzijds de relatieve topologie $(\mathcal{T}_d)_A$, anderzijds de topologie $\mathcal{T}_{(d_A)}$, geïnduceerd door de relatieve metriek d_A. Dan geldt $(\mathcal{T}_d)_A = \mathcal{T}_{(d_A)}$. Immers, voor elke $x \in A$ en $r > 0$ geldt $B_{d_A}(x, r) = B_d(x, r) \cap A$. Hieruit volgt snel dat $U \cap A \in \mathcal{T}_{(d_A)}$ als $U \in \mathcal{T}_d$ en dus $(\mathcal{T}_d)_A \subseteq \mathcal{T}_{(d_A)}$. Als $U \in \mathcal{T}_{(d_A)}$ kies dan voor elke $x \in U$ een $r_x > 0$ met $B_{d_A}(x, r) \subseteq U$; definieer $U^+ = \bigcup_{x \in U} B_d(x, r)$, dan $U^+ \in \mathcal{T}_d$ en $U^+ \cap A = U$, zodat $(\mathcal{T}_d)_A \supseteq \mathcal{T}_{(d_A)}$.

4.10. PROPOSITIE. *Zij A een deelruimte van X en zij $B \subseteq A$. Dan geldt:*

(a) $\mathrm{Cl}_A B = A \cap \mathrm{Cl}_X B$.

(b) $\mathrm{Int}_X B \subseteq \mathrm{Int}_A B$.

BEWIJS. (a) Zij $x \in A \cap \mathrm{Cl}_X B$ en zij U een omgeving van x in A. Dan is er een omgeving U' van x in X met $U' \cap A = U$. Maar dan is $U \cap B = U' \cap B \neq \varnothing$. Dus $x \in \mathrm{Cl}_A B$. Omgekeerd, zij $x \in \mathrm{Cl}_A B$. Dan is zeker $x \in A$. Zij U een omgeving van x in X. Dan is $U \cap A$ een omgeving van x in A, en dus $U \cap B = (U \cap A) \cap B \neq \varnothing$. Dus ook $x \in \mathrm{Cl}_X B$.

(b) Merk op dat $\mathrm{Int}_X B$ een open deelverzameling is van A die bevat is in B □

4.11. VOORBEELD. Bekijk $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$, er geldt $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} = \varnothing$ maar $\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

Met de deelruimteconstructie tot onze beschikking voegen we ook nog een nieuw type afbeelding toe.

4.12. DEFINITIE. Laat $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$. Dan heet f een *inbedding* als $f : X \simeq f[X]$.

Hierin heeft $f[X]$ dus de relatieve topologie ten opzichte van Y.

▶ **4.13.** OPGAVE. Laat X, Y en Z topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ inbeddingen. Dan is ook $g \circ f$ een inbedding.

De volgende stelling zegt in woorden dat $\mathrm{C_I}$ en $\mathrm{C_{II}}$ zogenaamde *erfelijke* eigenschappen zijn.

4.14. STELLING. *Zij X een topologische ruimte, en zij A een deelruimte van X.*
(a) *Als X een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte is dan is ook A een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte.*
(b) *Als X een $\mathrm{C_I}$-ruimte is dan is ook A een $\mathrm{C_I}$-ruimte.*

BEWIJS. Dit volgt onmiddellijk uit Propositie 4.7 en Opgave 4.8. □

Uit Voorbeeld 4.5.2 blijkt dat een deelruimte van een separabele ruimte niet noodzakelijk weer separabel is, dus separabiliteit is geen erfelijke eigenschap.

Sommen

De tweede constructie betreft die van de topologische som.

4.15. DEFINITIE. Zij $\{X_i, \mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ een familie topologische ruimten. De *topologische som* (kortweg *som*) van de ruimten $\{X_i, \mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ heeft als onderliggende verzameling de *disjunkte vereniging* $\bigoplus_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}\{i\} \times X_i$ en als topologie de *somtopologie* $\mathcal{T}$, gedefinieerd door

$$O \in \mathcal{T} \iff \forall i \in I : \{y : (i, y) \in O\} \in \mathcal{T}_i.$$

De somoperatie is intuïtief wat beter te begrijpen als we meteen al aannemen dat de verzamelingen X_i paarsgewijs disjunct zijn: de hier gedefinieerde ruimte $(\bigoplus_{i\in I} X_i, \mathcal{T})$ is dan homeomorf met $(\bigcup_{i\in I} X_i, \mathcal{T}')$ waarbij $O \in \mathcal{T}'$ dan en slechts dan als $O \cap X_i \in \mathcal{T}_i$ voor elke $i \in I$. Een andere manier om er tegenaan te kijken is dat we de topologische som van de ruimten X_i krijgen door eerst de ruimten X_i te vervangen door homeomorfe copieën $Y_i = \{i\} \times X_i$ die paarsgewijs disjunct zijn, en dan hierop de 'intuïtieve definitie' toe te passen. Dat dit topologisch gezien correct is volgt uit de volgende opgave.

▶ **4.16.** OPGAVE. Neem aan dat $X_i \simeq Y_i$ voor elke $i \in I$. Dan is $\bigoplus_{i\in I} X_i \simeq \bigoplus_{i\in I} Y_i$.
Aanwijzing: Zij $h_i : X_i \simeq Y_i$, en definieer $h : \bigoplus_{i\in I} X_i \to \bigoplus_{i\in I} Y_i$ door $h(i, x) = (i, h_i(x))$. Dan is h een homeomorfisme.

In de praktijk zullen we dus altijd zonder beperking der algemeenheid veronderstellen dat de ruimten X_i in de topologische-somoperatie zelf al disjunct zijn.

▶ **4.17.** OPGAVE. Zij $\{X_i\}_{i\in I}$ een familie topologische ruimten, en zij $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$. Toon aan:
a) X is een $\mathrm{C_I}$-ruimte dan en slechts dan als elke X_i een $\mathrm{C_I}$-ruimte is.

b) Als X een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte is, dan is elke X_i een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte.
c) Als I aftelbaar is en elke X_i is een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte, dan is ook X een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte.
d) Als X separabel is, dan is elke X_i separabel.
e) Als I aftelbaar is en elke X_i is separabel, dan is ook X separabel.

Producten

De volgende constructie die we behandelen is die van productruimten. Hiertoe definiëren we eerst wat het *product* van een familie verzamelingen is.

Het product $X \times Y$ van twee verzamelingen X en Y wordt normaal zo gedefinieerd dat het op $\mathbb{R}^2$ lijkt: $X \times Y = \bigl\{(x, y) : x \in X, y \in Y\bigr\}$. Een product van drie verzamelingen laten we op $\mathbb{R}^3$ lijken, enzovoort. Als we echter met oneindig veel verzamelingen te maken hebben wordt de analogie wat lastig: als je voor elk reëel getal r een verzameling X_r hebt, wat is dan $\prod_{r\in\mathbb{R}} X_r$? Hoe ziet een '$\mathbb{R}$-tal' er uit? Het antwoord is eigenlijk heel eenvoudig: een $\mathbb{R}$-tal $(x_r)_{r\in\mathbb{R}}$ moet zó zijn dat we per r precies één punt uit X_r nemen. Maar dat is nu net wat een functie doet: bij elk element van het domein precies één beeld kiezen. Dat is het standpunt dat we in gaan nemen: een $\mathbb{R}$-tal is een functie met domein $\mathbb{R}$.

4.18. Definitie. Als $\{X_i : i \in I\}$ een familie verzamelingen is dan is het product $\prod_{i\in I} X_i$ gedefinieerd als de verzameling van alle *keuzefuncties* van I naar $\bigcup_{i\in I} X_i$, dat wil zeggen: $x \in \prod_{i\in I} X_i$ dan en slechts dan als $x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ en $x(i) \in X_i$ voor elke i.

We gebruiken zoveel mogelijk de notatie die we al kennen van producten van eindig veel verzamelingen. We schrijven dus x_i in plaats van $x(i)$ en $x = (x_i)_{i\in I}$ als $x \in \prod_{i\in I} X_i$. Een belangrijke rol bij de bestudering van productruimten spelen verder de *projecties* $p_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$, gedefinieerd door (natuurlijk) $p_i(x) = x_i$.

▶ **4.19.** Opgave. Gegeven twee verzamelingen X_1 en X_2. Beschrijf $\prod_{i=1}^{2} X_i$ en geef een bijectie aan tussen $X_1 \times X_2$ en $\prod_{i=1}^{2} X_i$.

Neem nu aan dat elke X_i een topologische ruimte is, met topologie $\mathcal{T}_i$. We willen een bijpassende topologie op de productverzameling $X = \prod_{i\in I} X_i$ definiëren. Een voor de hand liggende eis hierbij is toch wel dat elke projectie $p_i : X \to X_i$ continu moet zijn. Dat kan door de discrete topologie op X te nemen maar die heeft weinig met de gegeven topologieën te maken. We krijgen een wat beter passende topologie door de wens de vader van de gedachte te laten zijn: we willen kennelijk dat elke verzameling van de vorm $p_i^{-1}[U]$ met $U \in \mathcal{T}_i$ en $I \in I$ open is. Maar dat kunnen we heel makkelijk voor elkaar krijgen.

4.20. Definitie. We noemen elke verzameling van de vorm $p_i^{-1}[U]$ een *open strook*. De *producttopologie* op $\prod_{i\in I} X_i$ is de topologie $\mathcal{T}$ met de familie $\mathcal{S}$ van alle open stroken als subbasis. We noemen $(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T})$ de *productruimte* van de familie $\{X_i, \mathcal{T}_i\}_{i\in I}$.

De producttopologie heeft dus ook een natuurlijke basis: de familie $\mathcal{S}^\wedge$. Een element van die basis kunnen we schrijven als $\bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}[U_k]$, waarbij $U_k \in \mathcal{T}_{i_k}$. Als, bijvoorbeeld, $i_1 = i_2$ dan kunnen we $p_{i_1}^{-1}[U_1] \cap p_{i_2}^{-1}[U_2]$ vervangen door $p_{i_1}^{-1}[U_1 \cap U_2]$ en zo kunnen we er altijd voor zorgen dat $i_k \neq i_l$ als $k \neq l$. In dat geval kunnen $\bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}[U_k]$ ook schrijven als $\prod_{i\in I} O_i$, waarbij $O_i = U_k$ als $i = i_k$ en $O_i = X_i$ anders. Zo'n verzameling noemen we ook wel een *eindig open blok*. Sommige boeken definiëren de producttopologie met behulp van de familie $\mathcal{B}$ der eindige open blokken als basis. In dat geval moet men natuurlijk vaststellen dat $\mathcal{B}$ inderdaad als basis kan dienen.

▶ **4.21.** OPGAVE. De familie $\mathcal{B}$ van eindige open blokken voldoet aan de eisen van Stelling 2.7.

De familie $\mathcal{B}$ van alle eindige open blokken noemen we ook wel *kanonieke basis* voor de producttopologie. Merk op dat als I eindig is ($I = \{1, 2, \dots, n\}$), $\mathcal{B}$ precies bestaat uit alle *open blokken* $O_1 \times \cdots \times O_n$.

We zullen in het vervolg telkens als producten ter sprake komen aannemen dat de desbetreffende indexverzameling niet-leeg is.

4.22. VOORBEELDEN.

1. Als I eindig is en elke X_i heeft de discrete topologie, dan is de producttopologie op $\prod_{i\in I} X_i$ ook discreet.
2. Als I oneindig is en elke X_i heeft tenminste twee punten, dan bevat $X = \prod_{i\in I} X_i$ geen geïsoleerde punten. Immers, elke open verzameling O bevat een basis-open verzameling en dus is $p_i[O] \neq X_i$ voor maar eindig vele $i \in I$. Omdat I oneindig is, is er dus zeker een i zó dat $p_i[O] = X_i$ tenminste twee punten bevat.

De volgende stelling is door de definitie van de producttopologie vrijwel triviaal geworden, maar het is goed hem expliciet op te merken.

4.23. STELLING. *Zij $\{X_i, \mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ een familie topologische ruimten, en zij $(X, \mathcal{T})$ de productruimte.*

(a) *Voor elke $i \in I$ is de projectie $p_i : X \to X_i$ continu.*

(b) *Als $\mathcal{T}'$ een topologie op de productverzameling X is zó dat alle projecties $\pi_i : (X, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ continu zijn, dan is $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.*

BEWIJS. (b) Alle open stroken behoren blijkbaar tot $\mathcal{T}'$. □

4.24. OPMERKING. De topologie als basis de familie $\left\{\prod_{i\in I} O_i : (\forall i \in I)(O_i \in \mathcal{T}_i)\right\}$ van *alle open blokken* noemen we de *doostopologie* (in het Engels: *boxtopology*) en de aldus verkregen ruimte het *doosproduct* (*boxproduct*) van de X_i. Vraagstuk 10.3 geeft enige eigenschappen van de doostopologie van $\mathbb{R}^\infty$ — daar zal blijken dat de doostopologie veel minder goede eigenschappen heeft dan de producttopologie.

De volgende stelling stelt ons in staat 'handige' (sub)bases voor de producttopologie te maken.

4.25. PROPOSITIE. *Zij $\{X_i\}_{i\in I}$ een familie topologische ruimten.*

(a) *Als $\mathcal{B}_i$ voor elke $i \in I$ een basis is voor X_i, dan is*

$$\mathcal{B}' = \left\{\prod_{i\in I} B_i : (\forall i \in I)(B_i \in \mathcal{B}_i \cup \{X_i\}) \text{ en } \{i \in I : B_i \neq X_i\} \text{ is eindig}\right\}$$

een basis voor de producttopologie.

(b) *Als $\mathcal{S}_i$ voor elke $i \in I$ een subbasis is voor X_i, dan is*

$$\mathcal{S}' = \Big\{\prod_{i\in I} S_i : (\forall i \in I)(S_i \in \mathcal{S}_i \cup \{X_i\}) \text{ en } S_i \neq X_i \text{ voor ten hoogste één } i\Big\}$$

een subbasis voor de producttopologie.

(c) *Als $\mathcal{U}_i$ voor elke $i \in I$ een (open) omgevingsbasis is van $x_i \in X_i$ dan is*

$$\mathcal{U} = \Big\{\prod_{i\in I} U_i : (\forall i \in I)(U_i \in \mathcal{U}_i \cup \{X_i\}) \text{ en } \{i \in I : U_i \neq X_i\} \text{ is eindig}\Big\}$$

een (open) omgevingsbasis van $x = (x_i)_{i\in I} \in X$.

Bewijs. (a) We verifiëren eigenschappen (B1) en (B2)′ uit Propositie 2.2. Het is duidelijk dat $\mathcal{B}'$ uit eindige open blokken bestaat, dus $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{T}$. Zij $O \in \mathcal{T}$ en $x \in O$. Kies een eindig open blok $\prod_i O_i$ met $x \in \prod_i O_i \subseteq O$; voor elke i met $O_i \neq X_i$ kunnen we $B_i \in \mathcal{B}_i$ nemen met $x_i \in B_i \subseteq O_i$; het bij deze B_i behorende eindige open blok B behoort tot $\mathcal{B}'$ en voldoet aan $x \in B \subseteq O$.

(b) Definieer $\mathcal{B}_i = \mathcal{S}_i^\wedge$ voor elke $i \in I$, en definieer $\mathcal{B}'$ als in (a). Dan is $\mathcal{B}' = (\mathcal{S}')^\wedge$, en dus volgt het gewenste resultaat uit (a). □

▶ **4.26.** Opgave. Bewijs (c) uit de voorgaande stelling.

4.27. Voorbeeld. Definieer de metriek d op $\mathbb{R}^2$ door

$$d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \max\big\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\big\}.$$

Uit de cursus Metrische Topologie is bekend dat d equivalent is met de gewone, euclidische metriek, en dus de euclidische topologie op $\mathbb{R}^2$ definieert. Dit impliceert dat de familie van alle 'bollen' $B_d\big((x_1,x_2),\varepsilon\big) = (x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon)\times(x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon)$ een basis vormt voor die topologie. Omdat de open intervallen een basis vormen voor $\mathbb{R}$ volgt nu uit Propositie 4.25(a) dat de euclidische topologie op $\mathbb{R}^2$ precies de producttopologie is van de euclidische topologieën op de factoren. Op dezelfde manier bewijst men dit resultaat voor elke $\mathbb{R}^n$.

4.28. Stelling. *Zij I aftelbaar, zij $\{X_i\}_{i\in I}$ een familie niet-lege topologische ruimten, en zij X de productruimte.*

(a) *X is een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte dan en slechts dan als elke X_i een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte is.*

(b) *X is een $\mathrm{C_I}$-ruimte dan en slechts dan als elke X_i een $\mathrm{C_I}$-ruimte is.*

Bewijs. Kies voor elke $i \in I$ een vast punt $a_i \in X_i$, en zij $\tilde{X}_i = \{x \in X : x_j = a_j \text{ voor elke } j \neq i\}$. Dan is $\tilde{X}_i$ een deelruimte van X die homeomorf is met X_i, dus als X een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte ($\mathrm{C_I}$-ruimte) is, dan is elke X_i een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte ($\mathrm{C_I}$-ruimte) op grond van Stelling 4.14. De omgekeerde bewering is een gevolg van Propositie 4.25. □

Het ligt in de lijn der verwachting dat een product van aftelbaar veel separabele ruimten weer separabel is — dit is waar en redelijk eenvoudig te bewijzen (Vraagstuk 4.9). Er geldt echter veel meer; voor de betekenis van $2^{\aleph_0}$ in de volgende stelling verwijzen we naar Bijlage A.

4.29. Stelling (Hewitt-Marczewski-Pondiczery). *Elk product van $2^{\aleph_0}$ (of minder) separabele ruimten is weer separabel.*

Een bewijs van deze stelling is te vinden in Vraagstuk 10.4 en in Vraagstuk 10.5 wordt aangetoond dat $2^{\aleph_0}$ het maximale aantal factoren is.

4.30. PROPOSITIE. *Zij $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ een familie topologische ruimten, en zij $(X, \mathcal{T})$ de productruimte. Zij verder $(A_i, \mathcal{T}_{(A_i)})$ een deelruimte van X_i, en zij $A = \prod_{i \in I} A_i$. Dan is de relatieve topologie $\mathcal{T}_A$ van A als deelruimte van X precies de producttopologie $\mathcal{T}'$ van de $(A_i, \mathcal{T}_{(A_i)})$.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{B}$ de kanonieke basis voor $\mathcal{T}$. Wegens Propositie 4.7 is dan $\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ een basis voor $\mathcal{T}_A$. Maar het is eenvoudig in te zien dat de verzamelingen $B \cap A$ met $B \in \mathcal{B}$ precies de elementen van de kanonieke basis voor $\mathcal{T}'$ zijn, en dus $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ wegens Propositie 2.3(b). □

Het Keuzeaxioma

In de bovenstaande bespreking hebben we aangenomen dat u bekend bent met het begrip product*verzameling* van zowel eindige als oneindige families verzamelingen. Over het *bestaan* van zulke oneindige producten nog het volgende.

Het fundament van de hedendaagse verzamelingenleer werd in de vorige eeuw gelegd door Georg Cantor. Cantor gebruikte daarbij de intuïtieve notie van een verzameling als een 'geheel van onderscheiden objecten'. Aan het eind van de vorige eeuw en het begin van deze eeuw werd echter duidelijk dat het ongebreidelde gebruik van verzamelingen tot tegenspraken aanleiding geeft. Zo gaf Bertrand Russell in 1902 het voorbeeld van de verzameling van alle verzamelingen die geen element zijn van zichzelf. Dat wil zeggen hij nam $y = \{x : x \notin x\}$; maar voor deze y geldt $y \in y \iff y \notin y$. Om dit soort paradoxen te voorkomen werden diverse axiomasystemen ontwikkeld, waarvan dat van Zermelo en Fraenkel (ZF) wel het bekendste is. Deze systemen geven een limitatieve opsomming van de wijzen waarop uit oude verzamelingen nieuwe geconstrueerd kunnen worden. Aanvankelijk is alleen $\varnothing$ gegeven, daarna mogen we bijvoorbeeld twee verzamelingen verenigen en de machtsverzameling nemen, en kunnen we onder meer ook de productverzameling construeren. Al te grote verzamelingen (zoals die van Russell) kunnen we op deze wijze niet krijgen, en algemeen wordt aangenomen dat het aldus verkregen systeem vrij is van tegenspraken. In Bijlage C geven we een lijst van de axioma's van ZF.

Het feit dat de productverzameling in het systeem ZF *bestaat* betekent echter nog niet dat het ook mogelijk is een *element* van die verzameling aan te wijzen!

Daarvoor is het nodig om nog een extra axioma aan de axioma's van Zermelo-Fraenkel toe te voegen, het zogenaamde Keuzeaxioma (AC = Axiom of Choice), dat luidt:

KEUZEAXIOMA (AC). Als $\{X_i\}_{i \in I}$ een niet-lege familie van niet-lege topologische ruimten is, dan is $\prod_{i \in I} X_i$ ook niet leeg.

Dit axioma kan niet uit de overige axioma's van ZF worden afgeleid (vergelijk de situatie van het Parallellenpostulaat van Euclides), maar men kan bewijzen dat als ZF niet tot tegenspraken leidt, ook ZF+AC = ZFC niet tot tegenspraken leidt. Het grootste deel van de wiskundige wereld accepteert AC als axioma en gebruikt het (vaak zonder het te beseffen), en ook in dit dictaat zullen we verder het systeem ZFC als grondslag nemen.

Wie denkt dat het Keuzeaxioma een open deur intrapt moet de volgende opgave maar eens maken.

▶ **4.31.** Opgave. Zij $\mathcal{P}^+(\mathbb{R})$ de familie van alle niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Geef een punt in het product $\prod\{A : A \in \mathcal{P}^+(\mathbb{R})\}$ aan.

Er is een groot aantal met het keuzeaxioma equivalente (equivalent in ZF!) beweringen bekend, waarvan we er hier twee vermelden. Eerst nog een definitie.

4.32. Definitie. Zij $(X, \leqslant)$ een partieel geordende verzameling.

(a) Een *keten* in X is een deelverzameling van X die door $\leqslant$ lineair geordend wordt.

(b) Een *maximaal element* in X is een $x \in X$ zodat voor elke $y \in X$ met $x \leqslant y$ geldt dat $x = y$.

(c) $(X, \leqslant)$ is een *welgeordende verzameling* (en $\leqslant$ een *welordening*) als elke niet-lege deelverzameling van X een kleinste element heeft.

Er zij opgemerkt dat een maximaal element niet noodzakelijk een grootste element hoeft te zijn (een maximaal element hoeft niet met elk element vergelijkbaar te zijn), en dat een welgeordende verzameling in het bijzonder lineair geordend is (elke deelverzameling met twee elementen heeft een kleinste element).

Dan nu de twee equivalenten van het Keuzeaxioma.

Lemma van Zorn. *Elke partieel geordende verzameling waarin elke keten een bovengrens heeft, heeft een maximaal element.*

Merk op dat de lege keten een bovengrens heeft dan en slechts dan als de partieel geordende verzameling niet-leeg is.

Stelling van Zermelo. *Elke verzameling kan worden welgeordend.*

De Stelling van Zermelo heet ook wel de *Welordeningsstelling*. In Bijlage D bewijzen we de onderlinge equivalentie van deze beweringen.

Quotiëntruimten

We keren nu terug naar onze bespreking van de constructiemethoden van topologische ruimten. De laatste methode die we behandelen is die van de quotiëntruimte. Hierbij krijgt de topologie $\mathcal{T}_f$ uit Opgave 3.16 een naam.

4.33. Definitie. Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ een topologische ruimte, Y een verzameling, en $f : (X, \mathcal{T}_X) \to Y$ een surjectie. De *quotiënttopologie op Y met betrekking tot X en f* is $\mathcal{T} = \{O \subseteq Y : f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X\}$.

Als duidelijk is welke X en f bedoeld worden spreken we gewoon over 'de quotiënttopologie op Y'. De quotiënttopologie heet ook wel de *identificatietopologie*.

De volgende stelling geeft het verband weer met de in het vorige hoofdstuk gedefinieerde quotiëntafbeelding.

4.34. Stelling. *Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ een topologische ruimte, $f : X \to Y$ een surjectie, en zij $\mathcal{T}$ de quotiënttopologie op Y (met betrekking tot X en f).*

(a) *De functie* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T})$ *is een quotiëntafbeelding. In het bijzonder is* f *continu.*

(b) *Als* $\mathcal{T}_Y$ *een topologie op* Y *is zó dat* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *continu is, dan* $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$.

(c) *Als* $\mathcal{T}_Y$ *een topologie op* Y *is zó dat* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *een quotiëntafbeelding is, dan* $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}$.

BEWIJS. (a) Per definitie van $\mathcal{T}$ geldt $O \in \mathcal{T}$ dan en slechts dan als $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X$. Dus f is een quotiëntafbeelding.

(b) Zij $O \in \mathcal{T}_Y$. Daar f continu is, is dan $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X$ en dus $O \in \mathcal{T}$.

(c) Uit (b) volgt al dat $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$, dus zij $O \in \mathcal{T}$. Dan is $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X$ per definitie van $\mathcal{T}$, en dus $O \in \mathcal{T}_Y$ omdat $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ een quotiëntafbeelding is. □

De stelling houdt in dat de quotiënttopologie op Y de fijnste topologie op Y is die f continu maakt (gegeven $\mathcal{T}_X$).

Om een nieuwe topologische ruimte te definiëren door middel van de quotiënttopologie is het noodzakelijk dat reeds een ruimte X, een verzameling Y, en een functie $f : X \to Y$ gegeven zijn. De verzameling Y en de functie f worden vaak gedefinieerd door middel van een equivalentierelatie op X, op de volgende wijze.

Zij R een equivalentierelatie op X, zij X/R de verzameling van alle equivalentieklassen $[x]_R = \{x' \in X : x \, R \, x'\}$ $(x \in X)$, en $q : X \to X/R$ de kanonieke surjectie $x \mapsto [x]_R$. Als we nu X/R voorzien van de quotiënttopologie met betrekking tot X en q dan heet X/R de quotiëntruimte van X met betrekking tot R.

4.35. VOORBEELD. Zij X een verzameling, en $A \subseteq X$. Definieer een equivalentierelatie op X door

$$x \, R \, x' \iff x, x' \in A \text{ of } x = x'.$$

De quotiëntruimte X/R geven in dit geval ook wel aan met X/A. Een interessant voorbeeld verkrijgt men bijvoorbeeld door $X = \mathbb{R}$ en $A = \mathbb{N}$ te nemen.

De laatste stelling van dit hoofdstuk laat zien dat de hierboven beschreven constructie van een quotiëntafbeelding door middel van een equivalentierelatie op X in feite de enige is.

4.36. STELLING. *Zij* $f : X \to Y$ *een quotiëntafbeelding. Definieer een equivalentierelatie op* X *door*

$$x \, R \, x' \iff f(x) = f(x'),$$

dat wil zeggen R *is de equivalentierelatie met als equivalentieklassen de vezels* $f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$. *Zij* $q : X \to X/R$ *de kanonieke (quotiënt)afbeelding* $x \mapsto [x]_R$, *en definieer* $h : X/R \to Y$ *door* $h([x]_R) = f(x)$ $(x \in X)$. *Dan* $h : X/R \simeq Y$.

BEWIJS. We merken eerst op dat h welgedefinieerd is en injectief. Immers, $[x]_R = [x']_R$ dan en slechts dan als $f(x) = f(x')$. Verder volgt uit de definitie van h dat $h \circ q = f$ dus h is surjectief (en dus bijectief) omdat f een surjectie is. Tenslotte volgt uit $h \circ q = f$ en $h^{-1} \circ f = q$ dat h en h^{-1} continu zijn: gebruik Propositie 3.19 en het feit dat f en q continu zijn. □

Vraagstukken

► **4.1.** VRAAGSTUK. Zij $(X, \leqslant)$ een geordende ruimte, met orde-topologie $\mathcal{T}_\leqslant$. Zij $A \subseteq X$, en zij $\leqslant_A$ de door $\leqslant$ op A geïnduceerde ordening. Dan kunnen op A op natuurlijke wijze twee topologieën gedefinieerd worden: de relatieve topologie $(\mathcal{T}_\leqslant)_A$ en de topologie $(\mathcal{T})_{\leqslant_A}$ geïnduceerd door de relatieve ordening.

a) Laat zien dat $(\mathcal{T})_{\leqslant_A} \subseteq (\mathcal{T}_\leqslant)_A$.

b) Laat zien dat $(\mathcal{T})_{\leqslant_A}$ en $(\mathcal{T}_\leqslant)_A$ in het algemeen niet samenvallen.

► **4.2.** VRAAGSTUK. Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$. Zij $A \subseteq X$ en $B \subseteq Y$ zó dat $f[A] \subseteq B$, en definieer $g : A \to B$ door $g(x) = f(x)$ $(x \in A)$.

a) Toon aan: als f continu is dan is ook g continu.

b) Toon aan dat g niet noodzakelijk open (respectievelijk gesloten) is als f open (respectievelijk gesloten) is.

► **4.3.** VRAAGSTUK. Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$. Zij $B \subseteq Y$, en definieer $g : f^{-1}[B] \to B$ door $g(x) = f(x)$ $(x \in f^{-1}[B])$.

a) Toon aan: als f continu (respectievelijk open, gesloten) is, dan is ook g continu (respectievelijk open, gesloten).

b) Zij nu $X = [0, 1]$ en $A = \mathbb{Q} \cap X$, zij Y de quotiëntruimte X/A, en f de quotiëntafbeelding. Neem $B = Y \setminus \{[A]\}$, waarbij $[A] = f(a)$ voor zekere (elke) $a \in A$. Bewijs dat g geen quotiëntafbeelding is. *Aanwijzing*: Als g een quotiëntafbeelding is dan is g een homeomorfisme. Leid een tegenspraak af door achtereenvolgens te laten zien:
(1) $\{[A]\}$ is niet open in Y.
(2) $[A] \in O$ voor elke niet-lege open O in Y.
(3) $U \cap V \neq \varnothing$ voor alle niet-lege open U en V in $Y \setminus \{[A]\}$.

► **4.4.** VRAAGSTUK. Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$. Zij $\mathcal{A}$ een familie deelverzamelingen van X zó dat $\bigcup \mathcal{A} = X$. Neem aan dat voor elke $A \in \mathcal{A}$ de beperking $f \restriction A : A \to Y$ continu is.

a) Als elke A open is dan is f continu.

b) Als elke A gesloten is en $\mathcal{A}$ eindig dan is f continu.

c) Als, in het vorige onderdeel, $\mathcal{A}$ oneindig is dan hoeft f niet continu te zijn.

► **4.5.** VRAAGSTUK. Zij $\{X_i\}_{i \in I}$ een familie topologische ruimten, en zij $A_i \subseteq X_i$ voor elke $i \in I$. Laat zien dat $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

► **4.6.** VRAAGSTUK. Zij $\{X_i\}_{i \in I}$ een familie topologische ruimten, zij X de productruimte, en $p_i : X \to X_i$ de projectie. Laat zien dat p_i een open afbeelding is.

► **4.7.** VRAAGSTUK. Zij $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ een familie topologische ruimten, zij X de productruimte, en $p_i : X \to X_i$ de projectie. Zij verder Y een topologische ruimte, en $f : Y \to X$. Toon aan dat f continu is dan en slechts dan als $p_i \circ f$ continu is voor elke $i \in I$.

► **4.8.** VRAAGSTUK. Een product van overaftelbaar veel kopiën van de Sierpiński-ruimte is niet een $\mathrm{C_I}$-ruimte.

► **4.9.** VRAAGSTUK. Zij $\{X_i\}_{i\in I}$ een familie topologische ruimten, en zij X de productruimte. Toon aan:

a) Als X separabel is, dan is X_i separabel voor elke $i \in I$.

b) Als I aftelbaar is, en X_i is separabel voor elke $i \in I$, dan is X separabel.

► **4.10.** VRAAGSTUK. Zij $Y = \mathbb{R}/\mathbb{N}$ als in Voorbeeld 4.35. Toon aan dat Y geen $\mathrm{C_I}$-ruimte is, zodat het continue beeld van een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte niet noodzakelijk $\mathrm{C_I}$ is.

Hoofdstuk 5

Scheidingsaxioma's

Om over een topologische ruimte interessante topologische uitspraken (in de zin van Hoofdstuk 3) te kunnen doen is het noodzakelijk dat de topologie van de ruimte uit voldoende verzamelingen bestaat. Het ligt voor de hand dat met name over de indiscrete ruimte in topologische zin niet veel interessants te zeggen is! Daarom is een veel voorkomende eis die we aan een topologische ruimte opleggen dat er in ieder geval voldoende open verzamelingen zijn om (topologisch!) onderscheid te kunnen maken tussen de punten van de onderliggende verzameling. De topologische eigenschappen die dit in meer of minder sterke mate bewerkstelligen noemen we *scheidingsaxioma's*. Zij vormen het onderwerp van dit hoofdstuk.

Punten onderscheiden

5.1. DEFINITIE. Een topologische ruimte X heet een T_1*-ruimte* als voor elk tweetal (verschillende) punten $x, y \in X$ een omgeving U van x bestaat met $y \notin U$.

De omgeving U kan uiteraard altijd open gekozen worden.

De letter T in deze benaming is afkomstig van de Duitse terminologie: een scheidingsaxioma is daar een *Trennungsaxiom*.

De definitie ziet er asymmetrisch uit maar is het niet: de eigenschap moet voor *elk* tweetal gelden. Als we twee verschillende punten a en b hebben dan vinden we een omgeving U van a met $b \notin U$ (bekijk het tweetal 'a en b') èn een omgeving V van b met $a \notin V$ (bekijk het tweetal 'b en a').

De echt asymmetrische versie van deze definitie geeft ons de T_0-eigenschap: voor elk tweetal verschillende punten x en y is er een open verzameling O die maar één van de punten x en y bevat (we zeggen niet welke); in Vraagstuk 5.1 komt de T_0-eigenschap terug.

5.2. VOORBEELDEN.

1. Niet T_1 zijn bijvoorbeeld een indiscrete ruimte met meer dan één punt, en de Sierpiński-ruimte.
2. Elke metrische ruimte is een T_1-ruimte: als $d(x, y) = \varepsilon$ dan $y \notin B(x, \varepsilon)$.
3. Zij X voorzien van de co-eindige topologie, dan is X een T_1-ruimte daar y geen element is van de omgeving $X \setminus \{y\}$ van x (als $y \neq x$).

5.3. PROPOSITIE. (a) *X is een T_1-ruimte dan en slechts dan als $\{x\}$ gesloten is voor elke $x \in X$.*

(b) *X is een T_1-ruimte dan en slechts dan als $\{x\} = \bigcap\{U : U$ is een omgeving van $x\}$ voor elke $x \in X$*

.

BEWIJS. We bewijzen alleen (a). Als X een T_1-ruimte is en $y \notin \{x\}$ dan is er een omgeving U van y met $x \notin U$; dus $X \setminus \{x\}$ is open en $\{x\}$ is gesloten. Omgekeerd, als $\{x\}$ gesloten is en $y \neq x$ dan $y \notin \{x\} = \overline{\{x\}}$ dus bestaat een omgeving U van y met $U \cap \{x\} = \varnothing$, dat wil zeggen $x \notin U$. □

Punten scheiden

5.4. DEFINITIE. Een topologische ruimte X heet een T_2-*ruimte* of *Hausdorff ruimte* als voor elk tweetal (verschillende) punten $x, y \in X$ omgevingen U van x en V van y bestaan zodat $U \cap V = \varnothing$.

Opnieuw geldt dat U en V altijd open gekozen kunnen worden.

5.5. PROPOSITIE. *Elke* T_2-*ruimte is* T_1.

5.6. VOORBEELDEN.

1. Elke metrische ruimte is een T_2-ruimte: $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \varnothing$ als $\varepsilon = d(x,y)/2$.
2. De Sorgenfrey-lijn en het Niemytzki-vlak zijn Hausdorff.
3. Een oneindige verzameling X met de co-eindige topologie is niet T_2: als U en V niet-lege open verzamelingen zijn dan is $U \cap V \neq \varnothing$.

► **5.7.** OPGAVE. Toon aan dat elke geordende ruimte is een Hausdorff ruimte is.

5.8. PROPOSITIE. *X is een T_2-ruimte dan en slechts dan als* $\{x\} = \bigcap\{\overline{U} : U$ *is een omgeving van* $x\}$ *voor elke* $x \in X$.

BEWIJS. Als X Hausdorff is en $y \notin \{x\}$ dan zijn er omgevingen U van x en V van y met $U \cap V = \varnothing$, dus $y \notin \overline{U}$. Omgekeerd, als $\{x\} = \bigcap\{\overline{U} : U$ is een omgeving van $x\}$ en $y \neq x$, dan $y \notin \{x\}$ en dus bestaat er een omgeving U van x met $y \notin \overline{U}$. Maar dan is er een omgeving V van y met $U \cap V = \varnothing$ (namelijk $X \setminus \overline{U}$). □

De Hausdorff-eigenschap is meestal de minimumeis die we aan een topologische ruimte opleggen: Hausdorff ruimten gedragen zich in veel opzichten redelijk regelmatig, hoewel zich zekere nog wel pathologieën voordoen.

In de volgende propositie laten we zien dat in een Hausdorff ruimte een rijtje ten hoogste één limiet heeft, iets wat in een T_1-ruimte niet hoeft te gelden!

5.9. PROPOSITIE. *Zij X een* T_2-*ruimte, en zij* $\langle x_n \rangle_n$ *een rijtje in X dat zowel naar x als naar y convergeert. Dan* $x = y$.

BEWIJS. Stel dat $x \neq y$, dan zijn er omgevingen U van x en V van y met $U \cap V = \varnothing$. Omdat x limiet is bestaat er dan een $N_1 \in \mathbb{N}$ zodat $x_n \in U$ voor alle $n \geqslant N_1$, en omdat y limiet is bestaat er ook een $N_2 \in \mathbb{N}$ zodat $x_n \in V$ voor alle $n \geqslant N_2$. Kies nu $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, dan $x_n \in U \cap V$, een tegenspraak. □

We kunnen in een T_2-ruimte dus spreken over *de* limiet van een convergente rij.

► **5.10.** OPGAVE. Zij $\mathbb{N}$ voorzien van de co-eindige topologie; toon aan dat de rij $\langle n \rangle_n$ naar elk punt van $\mathbb{N}$ convergeert.

5.11. STELLING. (a) *Zij $f : X \to Y$ continu. Als Y een* T_2-*ruimte is, dan is de grafiek van f gesloten in $X \times Y$.*

(b) *Laat* $f, g : X \to Y$ *continue functies zijn. Als* Y *een* T_2*-ruimte is, dan is* $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ *gesloten in* X.

BEWIJS. (a) Zij $\mathrm{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ de grafiek van f. Als $(x, y) \notin \mathrm{graf}(f)$ dan is $y \neq f(x)$, en dus bestaan er omgevingen V van y en W van $f(x)$ zó dat $V \cap W = \varnothing$. Omdat f continu is in x is er dan ook een omgeving U van x zó dat $f[U] \subseteq W$. Maar dan is $U \times V$ een omgeving van (x, y) die $\mathrm{graf}(f)$ niet snijdt. Immers, als $(a, b) \in U \times V$ dan $f(a) \in W$ dus $f(a) \neq b$ omdat $V \cap W = \varnothing$.

(b) Zij $x \notin A$, dan is $f(x) \neq g(x)$, en dus bestaan er omgevingen V van $f(x)$ en W van $f(y)$ zó dat $V \cap W = \varnothing$. Daar f en g continu zijn bestaan er omgevingen U_1 en U_2 van x met $f[U_1] \subseteq V$ en $g[U_2] \subseteq W$. Dan is $(U_1 \cap U_2) \cap A = \varnothing$. □

5.12. VOORBEELDEN.

1. Zij $X = Y$ oneindig, met de co-eindige topologie, en zij $f : X \to Y$ de identiteit. Dan is de grafiek van f niet gesloten in $X \times Y$.
2. Zij $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{S}$, en $f : X \to Y$ de identiteit. Dan is de grafiek van f gesloten in $X \times Y$ maar f is niet continu.

▶ **5.13.** OPGAVE.

a) Bewijs dat X een T_2-ruimte is dan en slechts dan als $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ (de *diagonaal*) gesloten is in $X \times X$.

b) Wat is de afsluiting van de diagonaal in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, als $\mathbb{N}$ de co-eindige topologie draagt?

Punten en gesloten verzamelingen scheiden

In het volgende scheidingsaxioma gaat het niet om het scheiden van punten, maar om het scheiden van punten en gesloten verzamelingen.

5.14. DEFINITIE. (a) Een topologische ruimte X heet T_3-ruimte als voor elke gesloten deelverzameling F van X en elke $x \notin F$ er open verzamelingen U en V bestaan zó dat $x \in U$, $F \subseteq V$ en $U \cap V = \varnothing$.

(b) Een topologische ruimte heet *regulier* als deze zowel T_3 als T_1 is.

Een waarschuwing met betrekking tot de terminologie is hier op zijn plaats: waar wij T_3 gebruiken, gebruiken sommige auteurs regulier, en omgekeerd. Soms ook worden de begrippen regulier en T_3 als equivalenten beschouwd.

5.15. VOORBEELD. Een indiscrete ruimte is altijd T_3; immers, er bestaan helemaal geen gesloten F en x met $x \notin F$.

Dit voorbeeld is de achtergrond van de definitie van regulariteit: in een T_1-ruimte zijn punten gesloten (Propositie 5.3(a)) en is het kunnen scheiden van punten en gesloten verzamelingen dus daadwerkelijk een sterkere eigenschap dan het slechts kunnen scheiden van punten:

▶ **5.16.** OPGAVE. Elke reguliere ruimte is Hausdorff.

De volgende 'duale' formulering van de T_3-eigenschap is vaak nuttig.

5.17. PROPOSITIE. *X is een T_3-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ en elke omgeving U van x een (open) omgeving V van x bestaat zó dat $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

BEWIJS. Zij eerst X regulier, en zij U een omgeving van x. We mogen aannemen dat U open is. Dan is $F = X \setminus U$ een gesloten deelverzameling van X met $x \notin F$, en dus zijn er open V en W zó dat $x \in V$, $F \subseteq W$ en $V \cap W = \varnothing$. Maar dan is ook $W \cap \overline{V} = \varnothing$, en dus $\overline{V} \subseteq U$. De omkering wordt analoog bewezen. □

5.18. VOORBEELDEN.

1. De Sorgenfrey-lijn is regulier: als U een omgeving is van x dan is er een $a > 0$ zó dat $x \in [x, x+a) = \overline{[x, x+a)} \subseteq U$. (Waarom is $\mathbb{S}$ een T_1-ruimte?)
2. Zij $X = \mathbb{R}$ (als verzameling), en zij $F = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$. Zij $\mathcal{T}$ de topologie op X met als basis $\mathcal{B} = \big\{(a,b) : a < b\big\} \cup \big\{(a,b) \setminus F : a < 0 < b\big\}$. Omdat deze topologie fijner is dan de gewone topologie van $\mathbb{R}$ is $(X, \mathcal{T})$ een Hausdorff ruimte. X is echter niet regulier: F is gesloten in X en $0 \notin F$, maar 0 en F kunnen niet gescheiden worden door open verzamelingen. Immers, neem U en V open met $0 \in U$ en $F \subseteq V$. Dan zijn er $a < 0 < b$ met $(a,b) \setminus F \subseteq U$. Kies $n \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $p = \frac{1}{n} \in (a,b)$. Dan $p \in V$ en dus zijn er c en d zó dat $a < c < d < b$ en $(c,d) \subseteq V$. Maar $(c,d) \nsubseteq F$, en dus $V \cap U \neq \varnothing$.

▶ **5.19.** OPGAVE. Toon aan dat het Niemytzki-vlak een T_3-ruimte is.

Gesloten verzamelingen scheiden

5.20. DEFINITIE. (a) Een topologische ruimte X heet een T_4-ruimte als voor elk tweetal disjuncte gesloten deelverzamelingen A en B van X disjuncte open verzamelingen U en V bestaan zó dat $A \subseteq U$ en $B \subseteq V$.

(b) Een topologische ruimte X heet *normaal* als deze zowel T_4 als T_1 is.

Met betrekking tot de terminologie geldt dezelfde opmerking als voor regulariteit.

5.21. VOORBEELD. Een indiscrete ruimte is T_4.

▶ **5.22.** OPGAVE. Elke normale ruimte is regulier.

Analoog aan Propositie 5.17 hebben we de volgende karakterisering van de T_4-eigenschap.

5.23. PROPOSITIE. *X is normaal dan en slechts dan als voor elke gesloten deelverzameling A van X en elke open U met $A \subseteq U$ er een open V bestaat zodat $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subset U$.*

5.24. VOORBEELD. Zij (X, d) een metrische ruimte, dan is X normaal. Immers, laat A en B gesloten en disjunct zijn. Definieer $f : X \to [0,1]$ door $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$. Dan is f continu, f is identiek 0 op A en f is identiek 1 op B, dus $f^{-1}[0, \frac{1}{2})$ en $f^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$ zijn disjuncte open verzamelingen om respectievelijk A en B.

▶ **5.25.** OPGAVE. De Sorgenfrey-lijn is normaal. *Aanwijzing*: Laat A gesloten en U open zijn met $A \subseteq U$. Kies voor elke $a \in A$ een $n_a \in \mathbb{N}$ met $[a, a + \frac{1}{n_a}) \subseteq U$ en zij $V = \bigcup_{a \in A} [a, a + \frac{1}{n_a})$; toon aan dat V clopen is.

We geven ook twee voorbeelden van reguliere ruimten die niet normaal zijn. Daartoe bewijzen we eerst het *Lemma van Jones*, dat gebruik maakt van kardinaalgetallen, zie Bijlage A.

5.26. Lemma van Jones. *Als X een T_4-ruimte is, S een gesloten en discrete deelruimte van X en D een dichte deelverzameling van X dan geldt $2^{|S|} \leqslant 2^{|D|}$.*

Bewijs. We zullen een injectie $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(D)$ definiëren en passen dan Stelling A.13 toe. Zij $A \subseteq S$. Dan zijn A en $S \setminus A$ gesloten disjuncte deelverzamelingen van X, en dus zijn er wegens normaliteit disjuncte open U_A en V_A met $A \subseteq U_A$ en $S \setminus A \subseteq V_A$. Definieer nu $f(A) = U_A \cap D$; dan is f injectief. Immers, als bijvoorbeeld, $A \setminus B \neq \varnothing$, dan $U_A \cap V_B \neq \varnothing$ qant $A \setminus B$ zit er in. Maar dan $U_A \cap V_B \cap D \neq \varnothing$ en dus $U_A \cap D \neq U_B \cap D$. □

5.27. Voorbeelden.

1. Het Niemytzki-vlak is regulier maar niet normaal. Immers, zij $S = \bigl\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\bigr\}$. Dan is S gesloten en discreet (Voorbeeld 4.5.2) en $|S| = 2^{\aleph_0}$. Maar $\mathbf{N}$ heeft een aftelbare dichte deelruimte D; voor die D geldt $2^{|D|} < 2^{|S|}$ wegens Stelling A.14; normaliteit van het Niemytzki-vlak zou tot een tegenspraak met het Lemma van Jones leiden.
2. $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ is regulier maar niet normaal. De regulariteit van $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ volgt net als die van $\mathbb{S}$: alle rechthoekjes $[a, b) \times [c, d)$ zijn clopen. Dat $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ niet normaal is volgt weer uit het Lemma van Jones: zij $S = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$. Dan is S gesloten en discreet en $|S| = 2^{\aleph_0}$, maar $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ is separabel: $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ is aftelbaar en dicht. Dat S discreet is volgt uit $[x, x+1) \times [-x, -x+1) \cap S = \{(x, -x)\}$.

We zullen nu onderzoeken hoe de scheidingsaxioma's zich gedragen onder de deelruimte- en productoperaties.

5.28. Stelling. *Zij A een deelruimte van X.*

(a) *Als X een T_1-ruimte (of een T_2-ruimte of een T_3-ruimte) is dan is A het ook.*

(b) *Als X een T_4-ruimte is en A is gesloten in X, dan is ook A een T_4-ruimte.*

Bewijs. Doe het bewijs voor de T_1- en T_2-eigenschappen zelf.

Zij $x \in A$ en F gesloten in A met $x \notin F$. Dan is er een F' gesloten in X zó dat $F = F' \cap A$. Maar dan $x \notin F'$ zodat er wegens regulariteit van X open U' en V' in X bestaan met $x \in U'$, $F' \subseteq V'$ en $U' \cap V' = \varnothing$. Dan zijn $U = U' \cap A$ en $V = V' \cap A$ open in A, en verder $x \in U$, $F \subseteq V$ en $U \cap V = \varnothing$.

(b) Laat C en D gesloten disjuncte deelverzamelingen zijn van A. Dan zijn C en D ook gesloten in X, en dus bestaan er open U' en V' in X zó dat $C \subseteq U'$, $D \subseteq V'$ en $U' \cap V' = \varnothing$. Dan zijn $U = U' \cap A$ en $V = V' \cap A$ open in A, en voldoen aan $C \subseteq U$, $D \subseteq V$ en $U \cap V = \varnothing$. □

De stelling kan in woorden als volgt geformuleerd worden: T_1, T_2 en T_3 zijn erfelijke eigenschappen, T_4 is *gesloten-erfelijk*. We geven nu een voorbeeld van een normale ruimte met een niet-normale deelruimte. We maken gebruik van ordinaalgetallen, zie Bijlage B, in het bijzonder Definitie B.19.

5.29. Definitie. Zij α een ordinaalgetal. De *ordinaalruimte* $W(\alpha)$ is de geordende verzameling $(W(\alpha), \leqslant)$, voorzien van de orde-topologie (Voorbeeld 2.8.2).

5.30. Propositie. *Zij α een ordinaalgetal en $W(\alpha)$ de ordinaalruimte.*

(a) *Als $0 < \beta < \alpha$ dan vormen de intervallen $(\gamma, \beta]$ $(\gamma < \beta)$ een lokale basis in β.*

(b) *Als $\beta + 1 < \alpha$ dan is $\beta + 1$ een geïsoleerd punt van $W(\alpha)$. Ook 0 is een geïsoleerd punt van $W(\alpha)$ (mits $\alpha > 0$).*

BEWIJS. (a) Merk op dat $(\gamma, \beta] = (\gamma, \beta + 1)$.

(b) Merk op dat $\{\beta + 1\} = (\beta, \beta + 2)$ en $\{0\} = [0, 1) = (\leftarrow, 1)$. $\square$

5.31. VOORBEELD. Zij X de productruimte $W(\omega_1 + 1) \times W(\omega + 1)$. In Hoofdstuk 6 zullen we zien dat X een T_4-ruimte is. De deelruimte $T = X \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$ van X heet de *Tychonoff-plank*. De Tychonoff-plank is niet normaal. Immers, zij $A = \{\omega_1\} \times W(\omega)$ (rechter-rand) en $B = W(\omega_1) \times \{\omega\}$ (bovenrand). Dan zijn A en B gesloten in T en disjunct. Laat U en V open zijn in T met $A \subseteq U$ en $B \subseteq V$. Dan is $(\omega_1, n) \in U$ voor elke $n \in W(\omega)$, dus omdat $\{n\}$ open is in $W(\omega)$ is er voor elke n een $\alpha_n < \omega_1$ zó dat $(\alpha_n, \omega_1] \times \{n\} \subseteq U$. Zij $\alpha = \sup_n \alpha_n$. Op grond van Stelling B.21 is dan $\alpha < \omega_1$, en dus $(\alpha, \omega_1] \times W(\omega) \subseteq U$. Maar $(\alpha + 1, \omega) \in B \subseteq V$ en $\{\alpha + 1\}$ is open in $W(\omega_1)$, dus is er een $n \in W(\omega)$ met $\{\alpha + 1\} \times (n, \omega] \subseteq V$. Maar dan is $(\alpha + 1, n + 1) \in U \cap V$.

5.32. STELLING. *Zij $\{X_i\}_{i \in I}$ een familie niet-lege topologische ruimten, en zij X de productruimte.*

(a) *Als X een T_1-ruimte (respectievelijk een T_2-ruimte, een T_3-ruimte, een T_4-ruimte) is, dan is elke X_i een T_1-ruimte (respectievelijk een T_2-ruimte, een T_3-ruimte, een T_4-ruimte).*

(b) *Als elke X_i een T_1-ruimte (respectievelijk een T_2-ruimte, een T_3-ruimte) is, dan is ook X een T_1-ruimte (respectievelijk een T_2-ruimte, een T_3-ruimte).*

BEWIJS. (a) Kies voor elke $i \in I$ een vast punt $a_i \in X_i$, en zij $\tilde{X}_i = \{x \in X : x_j = a_j \text{ voor elke } j \neq i\}$. Dan is $\tilde{X}_i$ een deelruimte van X die homeomorf is met X_i. Voor T_1, T_2 en T_3 kunnen we direct Stelling 5.28 toepassen. Voor de T_4-eigenschap nemen we disjuncte gesloten verzamelingen A en B in X_i en disjuncte omgevingen U en V in X van respectievelijk $p_i^{-1}[A]$ en $p_i^{-1}[B]$; dan zijn, in feite, $U \cap \tilde{X}_i$ en $V \cap \tilde{X}_i$ disjuncte omgevingen van A en B.

(b) Neem aan dat elke X_i een T_1-ruimte is. Als nu $x, y \in X$ met $x \neq y$ dan is er een $i \in I$ met $x_i \neq y_i$, en dus bestaat er een omgeving U van x_i met $y_i \notin U$. Zij $p_i : X \to X_i$ zoals gewoonlijk de projectie op X_i, dan is $p_i^{-1}[U]$ een omgeving van x die y niet bevat. Het bewijs voor T_2 gaat analoog. Voor regulariteit gebruiken we Propositie 5.17: zij U open in X en $x \in U$. Dan is er een basis omgeving $B = \prod_{i \in I} U_i$ met dat $x \in B \subseteq U$. Zij I' de eindige verzameling $\{i \in I : U_i \neq X_i\}$, en kies voor elke $i \in I'$ een omgeving V_i van x_i met $\overline{V_i} \subseteq U_i$. Definieer verder $V_i = X_i$ als $i \notin I'$, dan is $x \in \prod_{i \in I} V_i \subseteq \overline{\prod_{i \in I} V_i} = \prod_{i \in I} \overline{V_i} \subseteq B \subseteq U$. $\square$

5.33. VOORBEELD. De Sorgenfrey-lijn is normaal (Opgave 5.25); het product $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ is dat niet (Voorbeeld 5.27.2). Een product van normale ruimten is dus niet noodzakelijk normaal.

Scheiden met behulp van continue functies

In Voorbeeld 5.24(a) hebben we gezien dat we twee disjuncte gesloten verzamelingen in een metrische ruimte kunnen scheiden door gebruik te maken van een continue functie naar het eenheidsinterval die 0 is op de ene verzameling en 1 op de andere. De volgende stelling toont aan dat we zulke functies in *elke* T_4-ruimte kunnen definiëren.

5.34. Lemma van Urysohn. *Een ruimte X is T_4 dan en slechts dan als voor elk tweetal gesloten en disjuncte verzamelingen A en B een continue functie $f : X \to [0,1]$ bestaat zó dat $f[A] \subseteq \{0\}$ en $f[B] \subseteq \{1\}$.*

Bewijs. Als zo'n continue functie bestaat dan zijn $f^{-1}[0, \frac{1}{2})$ en $f^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$ open verzamelingen die A en B scheiden. De omkering heeft wat meer voeten in aarde.

Neem een aftelling $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ van $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, waarbij we aannemen dat alle q_n verschillend zijn en bovendien $q_1 = 0$ en $q_2 = 1$. Met recursie zullen we voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een open deelverzameling V_{q_n} van X definiëren zó dat

(1) $$\overline{V}_q \subseteq V_r \text{ als } q < r\ ;$$

(2) $$A \subseteq V_0, B \subseteq X \setminus V_1.$$

Stel dat dit kan. Definieer dan $f : X \to [0,1]$ door

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{q \in Q : x \in V_q\} & \text{als } x \in V_1, \\ 1 & \text{als } x \notin V_1. \end{cases}$$

Wegens (2) is dan $f(x) = 0$ als $x \in A$ en $f(x) = 1$ als $x \in B$. We moeten bewijzen dat f continu is. Wegens Propositie 3.7(iv) is het voldoende aan te tonen dat $f^{-1}[0,p)$ en $f^{-1}(p,1]$ open zijn voor elke p

Bewering: $f^{-1}[0,p)$ is open. Merk op dat

$$x \in f^{-1}[0,p) \iff f(x) < p \iff \exists q \in Q : q < p \text{ en } x \in V_q.$$

Dus $f^{-1}[0,p) = \bigcup\{V_q : q \in Q, q < p\}$ is open in X.

Bewering: $f^{-1}(p,1]$ is open. Als $f(x) > p$ dan zijn er $q, q' \in Q$ zó dat $p < q < q' < f(x)$. Dan is $x \notin V_{q'}$ dus $x \notin \overline{V}_q$ wegens (1). Als er omgekeerd een $q > p$ bestaat met $x \notin \overline{V}_q$ dan geldt voor elke $q' < q$ dat $x \notin V_{q'}$ en dus $f(x) \geqslant q > p$. We vinden dus dat $f^{-1}(p,1] = \bigcup\{X \setminus \overline{V}_q : q \in Q, q > p\}$ open is in X.

Nu nog de constructie van de V_q. Daar $A \cap B = \varnothing$ bestaat er wegens normaliteit van X een open U zó dat $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus B$ (Propositie 5.23). Zij $V_{q_1} = V_0 = U$ en $V_{q_2} = V_1 = X \setminus B$, dan is aan (1) en (2) voldaan. Stel nu $n > 2$ en neem aan dat V_{q_i} gedefinieerd is voor alle $i < n$. Zij

$$r = \max\{q_i : i < n, q_i < q_n\} \text{ en } s = \min\{q_i : i < n, q_n < q_i\}.$$

Dan is op grond van de inductiehypothese $\overline{V}_r \subseteq V_s$, en dus bestaat er weer een open V_{q_n} zó dat $\overline{V}_r \subseteq V_{q_n} \subseteq \overline{V}_{q_n} \subseteq V_s$, en het is duidelijk dat nog steeds aan (1) voldaan is. □

Een functie f als in bovenstaande stelling heet een *Urysohn-functie voor A en B*. Als we het bestaan van Urysohn-functies slechts eisen voor singletons A (en willekeurige gesloten B) dan krijgen we een eigenschap die doet denken aan regulariteit, maar daar toch niet mee equivalent is.

5.35. Definitie. (a) Een topologische ruimte X heet een $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-ruimte als voor elke gesloten deelverzameling F van X en elke $x \notin F$ een continue functie $f : X \to [0,1]$ bestaat met $f(x) = 0$ en $f[F] \subseteq \{1\}$.

(b) Een *volledig regulier* is een ruimte die zowel $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ als T_1 is.

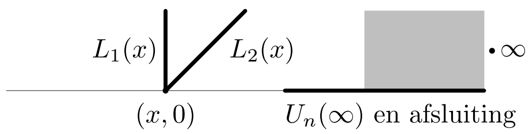
Een volledig reguliere of $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-ruimte heet ook wel een *Tychonoff-ruimte*.

Uit het Lemma van Urysohn volgt onmiddelijk dat een normale ruimte volledige regulier is. Bovendien zijn in bovenstaande definitie $f^{-1}[0,\frac{1}{2})$ en $f^{-1}(\frac{1}{2},1]$ disjuncte open verzamelingen om x en F, dus een $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-ruimte is T_3. In tegenstelling tot normaliteit is de $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-eigenschap erfelijk en productief, en onder andere om die reden wordt in grote delen van de topologische theorie vooraf verondersteld dat alle besproken ruimten (tenminste) volledig regulier zijn.

Omdat de $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-eigenschap erfelijk is laat de Tychonoff-plank zien dat niet elke Tychonoff ruimte normaal is. Er is ook een reguliere ruimte die niet volledig regulier is.

5.36. VOORBEELD. We maken een topologie op het bovenhalfvlak.

De punten boven de x-as maken we geïsoleerd, dat wil zeggen, als z niet op de x-as ligt dan is $\{\{z\}\}$ een lokale basis in z. Voor een punt $(x,0)$ op de x-as maken we



FIGUUR 1. Omgevingen in $\mathbf{M}$

basisomgevingen als volgt: eerst stellen we $L_1(x)=\{(x,y):0\leqslant y\leqslant 1\}$ (het verticale lijntje ter lengte 1 vanuit $(x,0)$) en $L_2(x)=\{(x+y,y):0\leqslant y\leqslant 1\}$ (het lijntje dat onder een hoek van $\pi/4$ vanuit $(x,0)$ vertrekt). Vervolgens zetten we $L_x=L_1(x)\cup L_2(x)$. Als lokale basis in $(x,0)$ nemen we $\mathcal{B}_x=\{L_x\setminus F : F \text{ is eindig en } (x,0)\notin F\}$. De zo verkregen ruimte is regulier, zelfs volledig regulier want elke basisomgeving is clopen.

We voegen nog één punt ∞ toe, met basisomgevingen

$$U_n(\infty)=\{\infty\}\cup\{(x,y):x>n\}\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Ga na dat $\overline{U}_{n+1}=U_{n+1}\cup\{(x,0):n<x\leqslant n+1\}$; de zo verkregen ruimte $\mathbf{M}$ is dus nog steeds regulier: $\overline{U}_{n+1}\subseteq U_n$. Zie ook Figuur 1. Het bewijs dat $\mathbf{M}$ niet volledig regulier is stellen we uit tot Vraagstuk 5.14.

Het Lemma van Urysohn werpt verder nog de vraag op of we ook niet altijd een continue functie f kunnen vinden zodat de punten van A de *enige* punten zijn die op 0 worden afgebeeld, en de punten van B de *enige* punten die op 1 worden afgebeeld, met andere woorden $f^{-1}(0)=A$ en $f^{-1}(1)=B$. Dit nu is niet noodzakelijk het geval. Als namelijk $A=f^{-1}(0)$ dan is $A=\bigcap_n f^{-1}[0,\frac{1}{n})$ een aftelbare doorsnede van open verzamelingen, en in een normale ruimte hoeft niet elke gesloten deelverzameling van die vorm te zijn.

5.37. DEFINITIE. (a) Een deelverzameling van een ruimte heet een *G_δ-verzameling* als deze te schrijven is als een doorsnede van aftelbaar veel open deelverzamelingen.

(b) Een deelverzameling van een ruimte heet een *F_σ-verzameling* als deze te schrijven is als een vereniging van aftelbaar veel gesloten deelverzamelingen.

5.38. VOORBEELDEN.

1. Zij (X,d) een metrische ruimte, en A gesloten in X. Dan is $A = \bigcap_n \{x \in X : d(x,A) < \frac{1}{n}\}$, dus A is een G_δ-verzameling in X.
2. In de ordinaalruimte $W(\omega_1+1)$ is de gesloten verzameling $\{\omega_1\}$ geen G_δ-verzameling. Immers, als U_n open is met $\omega_1 \in U_n$ dan is er een $\alpha_n < \omega_1$ zó dat $(\alpha_n, \omega_1] \subseteq U_n$. Maar $\alpha = \sup_n \alpha_n < \omega_1$ wegens Stelling B.21 en dus $(\alpha, \omega_1] \subseteq \bigcap_n U_n$.

5.39. LEMMA. *Zij X een T_4-ruimte en A een gesloten deelverzameling van X. Als A een G_δ-verzameling is in X dan bestaat er een continue functie $f : X \to [0,1]$ met $A = f^{-1}(0)$.*

BEWIJS. Zij $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, met elke U_n open in X. Zij f_n een Urysohn-functie voor A en $X \setminus U_n$, en definieer $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n$. Dan is de reeks $\sum_n f_n$ uniform convergent wegens Stelling 3.23, dus de somfunctie f is continu. Als $x \in A$ dan is $f_n(x) = 0$ voor elke n, en dus $f(x) = 0$. En als $x \notin A$ dan $x \in X \setminus U_n$ voor zekere n, zodat $f(x) \geqslant 2^{-n} f_n(x) = 2^{-n} > 0$. □

5.40. STELLING. *Zij X een T_4-ruimte. Dan bestaat er een continue functie $f : X \to [0,1]$ met $f^{-1}(0) = A$ en $f^{-1}(1) = B$ dan en slechts dan als A en B gesloten disjuncte G_δ-verzamelingen zijn in X.*

BEWIJS. Neem aan dat A en B gesloten disjuncte G_δ-verzamelingen zijn. Volgens Lemma 5.39 bestaan er continue functies $g, h : X \to [0,1]$ zó dat $g^{-1}(0) = A$ en $h^{-1}(0) = B$. Definieer nu $f = \frac{g}{g+h}$, dan heeft f de gewenste eigenschap. De omgekeerde bewering volgt uit wat hierboven reeds opgemerkt is. □

5.41. DEFINITIE. Een topologische ruimte X heet *perfect normaal* als X normaal is en elke gesloten deelverzameling van X een G_δ-verzameling is in X.

De bewering dat elke gesloten verzameling een G_δ-verzameling is is equivalent met de bewering dat elke open verzameling een F_σ-verzameling is.

Uit Voorbeelden 5.24(a) en 5.38(a) volgt dat metrische ruimten perfect normaal zijn, en uit Voorbeeld 5.38(b) dat $W(\omega_1+1)$ niet perfect normaal is (maar wel normaal, zie Voorbeeld 5.24(b), of Voorbeeld 6.3.5 met Stelling 6.8). Uit Stelling 5.40 volgt nu direct:

5.42. STELLING. *X is perfect normaal dan en slechts dan als er voor elk tweetal gesloten en disjuncte verzamelingen A en B een continue functie $f : X \to [0,1]$ bestaat zó dat $A = f^{-1}(0)$ en $B = f^{-1}(1)$.*

Tot slot van dit hoofdstuk bewijzen we nog een belangrijke zogenaamde *uitbreidingsstelling*. We beginnen met een lemma.

5.43. LEMMA. *Zij X een T_4-ruimte, zij A een gesloten deelruimte van X, en zij $g : A \to \mathbb{R}$ een continue functie zó dat $|g(a)| \leqslant K$ voor alle $a \in A$. Dan is er een continue $h : X \to \mathbb{R}$ met $\big|h(x)\big| \leqslant \frac{1}{3}K$ voor alle $x \in X$ en $\big|g(a) - h(a)\big| \leqslant \frac{2}{3}K$ voor alle $a \in A$.*

BEWIJS. Zij $B_1 = g^{-1}[-K, -\frac{1}{3}K]$ en $B_2 = g^{-1}[\frac{1}{3}K, K]$. Dan zijn B_1 en B_2 gesloten en disjunct in A en dus in X. Er is dus volgens het Lemma van Urysohn een continue functie $\bar{h} : X \to [0,1]$ met $\bar{h}[B_1] \subseteq \{0\}$ en $\bar{h}[B_2] \subseteq \{1\}$. Neem nu $h = \frac{2}{3}K(\bar{h} - \frac{1}{2})$. □

5.44. STELLING VAN TIETZE. *Zij X een T_4-ruimte, zij A een gesloten deelruimte van X, en zij $f : A \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan bestaat er een continue functie $F : X \to \mathbb{R}$ zó dat $F \restriction A = f$. Bovendien geldt dat als $\bigl|f(a)\bigr| \leqslant c$ voor alle $a \in A$ (of $\bigl|f(a)\bigr| < c$ voor alle a), ook de uitbreiding F zo gekozen kan worden dat $\bigl|F(x)\bigr| \leqslant c$ voor alle $x \in X$ (of $\bigl|F(a)\bigr| < c$ voor alle x).*

BEWIJS. We nemen eerst aan dat $\bigl|f(a)\bigr| \leqslant c$ voor alle $a \in A$. Definieer met recursie functies $h_n : X \to \mathbb{R}$ zó dat

$$(3) \qquad \bigl|h_n(x)\bigr| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot c \qquad \text{voor alle } x \in X;$$

$$(4) \qquad \Bigl|f(a) - \sum_{i=0}^{n} h_i(a)\Bigr| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot c \qquad \text{voor alle } a \in A.$$

De functie h_0 krijgen we door het lemma toe te passen op $g = f$ en $K = c$, en als h_i gedefinieerd is voor $i \leqslant n$ zodat aan (3) en (4) voldaan is, dan krijgen we h_{n+1} door het lemma toe te passen op $g = f - \sum_{i=0}^{n} h_i$ en $K = (\frac{2}{3})^{n+1} \cdot c$.

Volgens (3) en Stelling 3.23 is nu $\sum_i h_i$ een uniform convergente reeks, en dus is de som een continue functie $F : X \to \mathbb{R}$, waarbij $\bigl|F(x)\bigr| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\bigl|h_i(x)\bigr| \leqslant \frac{1}{3}c\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^i = c$ voor alle $x \in X$. Uit (4) volgt dat $f(a) = F(a)$ voor alle $a \in A$.

Als $\bigl|f(a)\bigr| < c$ voor alle $a \in A$ dan zeker $\bigl|f(a)\bigr| \leqslant c$ voor alle $a \in A$ en dus bestaat er volgens het eerste deel van het bewijs een continue functie $F_0 : X \to \mathbb{R}$ met $F_0 \restriction A = f$ en $\bigl|F_0(x)\bigr| \leqslant c$ voor alle $x \in X$. Zij $B = \bigl\{x \in X : \bigl|F_0(x)\bigr| = c\bigr\}$. Dan is B gesloten in X en $B \cap A = \varnothing$. Volgens het Lemma van Urysohn is er dus een continue functie $\phi : X \to [0,1]$ met $\phi[B] \subseteq \{0\}$ en $\phi[A] \subseteq \{1\}$. Definieer nu $F(x) = F_0(x)\phi(x)$ $(x \in X)$. Dan is $F \restriction A = f$ en $\bigl|F(x)\bigr| < c$ op heel X.

Tenslotte, als f niet noodzakelijk begrensd is, definieer dan $f_0 = \arctan \circ f$. Volgens het vorige deel van het bewijs is er dan een continue $F_0 : X \to \mathbb{R}$ zó dat $F_0 \restriction A = f_0$ en $\bigl|F_0(x)\bigr| < \frac{\pi}{2}$ voor alle $x \in X$. Dan is $F = \tan \circ F_0$ de gewenste uitbreiding van f. □

Vraagstukken

▶ **5.1.** VRAAGSTUK. Een topologische ruimte X heet een T_0-ruimte als voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$ er een open verzameling U is die maar één van de twee punten x en y bevat.

a) Toon aan: X is T_0 dan en slechts dan als voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$ geldt dat $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.
b) Geef een voorbeeld van een T_0-ruimte die niet T_1 is.
c) Geef een voorbeeld van een ruimte die niet T_0 is.
d) In een T_3-ruimte zijn de T_0- en T_1-eigenschappen equivalent, en dus: regulier = $T_3 + T_0$.
e) Geef een voorbeeld van een een ruimte die T_0 en T_4 is maar niet normaal.
f) De T_0-eigenschap is productief.

▶ **5.2.** VRAAGSTUK. Zij X een T_1-ruimte, en zij $A \subseteq X$. Toon aan:

a) $A'' \subseteq A'$.
b) A' is gesloten.

▶ **5.3.** VRAAGSTUK. Laat $f, g : X \to Y$ continue functies zijn. Neem aan dat Y een T_2-ruimte is, en zij D een dichte deelverzameling van X. Toon aan: als $f(x) = g(x)$ voor elke $x \in D$ dan is $f = g$.

▶ **5.4.** VRAAGSTUK. Een topologische ruimte X heet een $T_{2\frac{1}{2}}$-ruimte (of Urysohn-ruimte) als voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$ er (open) omgevingen U van x en V van y bestaan met $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

a) Toon aan dat elke $T_{2\frac{1}{2}}$-ruimte een T_2-ruimte is.
b) Toon aan dat elke T_3-ruimte een $T_{2\frac{1}{2}}$-ruimte is.
c) Geef een voorbeeld van een T_3-ruimte die niet $T_{2\frac{1}{2}}$ is.
d) Laat zien dat de ruimte X uit Voorbeeld 5.18.2 een $T_{2\frac{1}{2}}$-ruimte is.

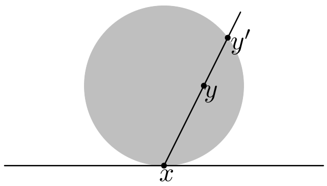
▶ **5.5.** VRAAGSTUK. We werken in het Niemytzki-vlak $\mathbf{N}$; we nemen het punt $x = (0,0)$ en zijn nulde omgeving:

$$B(0,0,0) = \bigl\{(0,0)\bigr\} \cup \bigl\{(s,t) \in \mathbf{N} : \bigl\|(s,t) - (0,1)\bigr\| < 1\bigr\}.$$

Definieer $f : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ door: $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ als $y \notin B(0,0,0)$ en, tenslotte,

$$f(y) = \frac{\|y - x\|}{\|y' - x\|}, \quad \text{als } y \in B(0,0,0);$$

hierbij is y' als in het plaatje aangegeven en stelt $\|\cdot\|$ de gewone Euclidische norm voor.



Toon aan dat f continu is en bewijs vervolgens dat $\mathbf{N}$ volledig regulier is.

▶ **5.6.** VRAAGSTUK. Laat zien dat een deelruimte van een volledig reguliere ruimte weer volledig regulier is.

▶ **5.7.** VRAAGSTUK.

a) Zij $\mathcal{S}$ een subbasis voor de topologie van X, en neem aan dat voor elke $S \in \mathcal{S}$ en elke $x \in S$ een continue functie $f : X \to [0,1]$ bestaat met $f(x) = 0$ en $f[X \setminus S] \subseteq \{1\}$. Bewijs dat X volledig regulier is.
b) Bewijs met behulp van het vorige onderdeel dat een willekeurig product van volledig reguliere ruimten weer volledig regulier is.

▶ **5.8.** VRAAGSTUK. Zij X een topologische ruimte. Bewijs dat X T_4 is dan en slechts dan als voor elk tweetal gesloten en disjuncte deelverzamelingen A en B van X er open U en V in X bestaan met $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ en $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.

▶ **5.9.** VRAAGSTUK. Zij X een topologische ruimte zó dat voor elke gesloten $A \subseteq X$ en elke continue $f : A \to \mathbb{R}$ een continue $F : X \to \mathbb{R}$ bestaat met $F \restriction A = f$. Toon aan dat X een T_4-ruimte is.

► **5.10.** VRAAGSTUK.

a) Zij X een topologische ruimte. Bewijs dat X perfect normaal is dan en slechts dan als voor elke gesloten deelverzameling A van X een continue functie $f : X \to [0,1]$ bestaat met $A = f^{-1}(0)$.

b) Toon aan dat perfect normaal een erfelijke eigenschap is.

► **5.11.** VRAAGSTUK. Toon aan dat de Sorgenfrey-lijn perfect normaal is. *Aanwijzing*: Zij O open en zij $U = \{x \in O : \text{er zijn } p, q \in \mathbb{Q} \text{ met } p < x < q \text{ en } [p,q] \subseteq O\}$. Ga na dat U een F_σ-verzameling is en dat $O \setminus U$ aftelbaar is.

► **5.12.** VRAAGSTUK. Zij $f : X \to Y$ een continue gesloten surjectie. Toon aan: als X een T_1-ruimte (een T_4-ruimte) is, dan is ook Y een T_1-ruimte (een T_4-ruimte).

► **5.13.** VRAAGSTUK. Een ruimte heet *erfelijk normaal* als elke deelruimte normaal is. Twee verzamelingen A en B heten *gescheiden* als $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$.

a) Toon aan dat voor een T_1-ruimte X de volgende uitspraken equivalent zijn:
1. X is erfelijk normaal.
2. Elke *open* deelruimte van X is normaal.
3. Voor elk tweetal gescheiden deelverzamelingen A en B van X zijn er disjuncte open verzamelingen U en V met $A \subseteq U$ en $B \subseteq V$.

b) Toon aan: als X normaal is en A en B zijn gescheiden F_σ-verzamelingen dan hebben A en B disjuncte omgevingen. *Aanwijzing*: Schrijf $A = \bigcup_n A_n$ met elke A_n gesloten en doe hetzelfde voor B; vind open U_n met $A_n \subseteq U_n$ en $\overline{U_n} \cap \overline{B} = \varnothing$ en vind, op dezelfde manier, open verzamelingen V_n om de B_n. Maak hieruit U en V.

c) Toon aan: als X normaal is en A een F_σ-verzameling in X dan is ook A normaal.

► **5.14.** VRAAGSTUK. De ruimte $\mathbf{M}$ uit Voorbeeld 5.36 is niet volledig regulier.

a) De verzameling $F = \{(x,0) : x \leqslant 0\}$ is gesloten, en $\infty \notin F$.

Zij nu $f : \mathbf{M} \to [0,1]$ continu met $f(x,0) = 0$ als $x \leqslant 0$; we bewijzen dat $f(\infty) = 0$.

b) Het is voldoende aan te tonen de verzameling $N = \{x : f(x,0) > 0\}$ aftelbaar is.

c) Als $f(x,0) = 0$ dan is $A_x = \{y \in L_x : f(y) \neq 0\}$ aftelbaar. *Aanwijzing*: $\{y \in L_x : f(y) > 2^{-n}\}$ is eindig voor elke n.

We bewijzen met inductie: voor elke $n \geqslant 0$ is $N \cap [n-1, n)$ aftelbaar.

d) De bewering klopt voor $n = 0$.

Neem aan $N \cap [n-1, n)$ is aftelbaar

e) Er is een stijgende rij $(x_i)_i$ in $[n-1, n) \setminus N$ met n als supremum.

f) De projectie A van $\bigcup_i A_{x_i}$ op de x-as is aftelbaar.

g) Als $x \in [n, n+1) \setminus A$ dan $f(x,0) = 0$. *Aanwijzing*: Er zijn oneindig veel i zó dat $L_1(x) \cap L_2(x_i) \neq \varnothing$; omdat $x \notin A$ geldt $f(y) = 0$ voor het punt in die doorsnede.

► **5.15.** VRAAGSTUK. Elke geordende ruimte is normaal. Zij $(X, \leqslant)$ een geordende ruimte en $\preccurlyeq$ een welordening van $X \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}$. Laat A en B disjuncte gesloten verzamelingen zijn. Voor $a \in A$ definiëren we x_a en y_a als volgt:

$$x_a = \begin{cases} \leftarrow & \text{als } (\leftarrow, a) = \varnothing, \\ \max(\leftarrow, a) & \text{als } \max(\leftarrow, a) \text{ bestaat,} \\ \preccurlyeq\text{-}\min\{x < a : [x,a] \cap B = \varnothing\} & \text{anders.} \end{cases}$$

Definieer $y_a > a$ en voor $b \in B$ punten u_b en v_b op dezelfde manier.

a) Toon aan: $(x_a, y_a) \cap B = \varnothing$ als $a \in A$.

b) Toon aan: als $a \in A$ en $b \in B$ dan $(x_a, y_a) \cap (u_b, v_b) = \varnothing$.
Aanwijzing: Als, bijvoorbeeld, $a < b$ dan geldt $y_a \leqslant u_b$.

c) A en B hebben disjuncte open omgevingen.

Hoofdstuk 6

Compactheid

De in de cursus Metrische Topologie geïntroduceerde definitie van het begrip compactheid kan zonder meer ook gebruikt worden voor willekeurige topologische ruimten.

Definitie en eerste eigenschappen

6.1. DEFINITIE. (a) Een familie $\mathcal{O}$ van (open) deelverzamelingen van X heet een *(open) overdekking* van X als $\bigcup \mathcal{O} = X$.

(b) Een *(open) deeloverdekking* van een (open) overdekking $\mathcal{O}$ van X is een deelfamilie $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ met $\bigcup \mathcal{O}' = X$.

6.2. DEFINITIE. Een topologische ruimte heet *compact* als elke open overdekking een eindige deeloverdekking heeft.

6.3. VOORBEELDEN.

1. Elke eindige ruimte is compact.
2. Elke ruimte met de indiscrete topologie is compact.
3. Elke ruimte met de co-eindige topologie is compact.
4. Een deelverzameling A van $\mathbb{R}^n$ is compact dan en slechts dan als A gesloten is en begrensd met betrekking tot de standaard metriek.
5. Zij α een ordinaalgetal, dan is $W(\alpha + 1)$ compact. Immers, zij $\mathcal{O}$ een open overdekking van $W(\alpha + 1)$. Zij $\alpha_0 = \alpha$. Als $\alpha_0 \neq 0$, kies dan $U_0 \in \mathcal{O}$ en $\alpha_1 < \alpha_0$ zó dat $(\alpha_1, \alpha_0] \subseteq U_0$ (Propositie 5.30(a)). Als $\alpha_1 \neq 0$, kies dan $U_1 \in \mathcal{O}$ en $\alpha_2 < \alpha_1$ zó dat $(\alpha_2, \alpha_1] \subseteq U_1$, etcetera. Omdat de ordinaalgetallen welgeordend zijn is er een n met $\alpha_n = 0$. Kies dan tenslotte $U_n \in \mathcal{O}$ met $0 \in U_n$; dan is $\{U_0, \ldots, U_n\}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{O}$.

We kunnen compactheid ook definiëren in termen van gesloten verzamelingen.

6.4. DEFINITIE. Een familie $\mathcal{F}$ van deelverzamelingen van X heeft de *finite intersection property (f.i.p)* als voor elke eindige $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ geldt dat $\bigcap \mathcal{F}' \neq \varnothing$.

6.5. PROPOSITIE. *Een topologische ruimte is compact dan en slechts dan als elke familie van gesloten deelverzamelingen met de f.i.p. een niet-lege doorsnede heeft.*

BEWIJS. Zij X compact, en zij $\mathcal{F}$ is een familie gesloten deelverzamelingen met de f.i.p.. Als $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$ dan is $\mathcal{O} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ een open overdekking van X. Maar als $\mathcal{O}'$ een eindige deeloverdekking is van $\mathcal{O}$, dan is $\mathcal{F}' = \{X \setminus U : U \in \mathcal{O}'\}$ een eindige deelfamilie van $\mathcal{F}$ met $\bigcap \mathcal{F}' = \varnothing$, een tegenspraak. De omkering wordt analoog bewezen. $\square$

Als A een deelruimte is van X dan kan compactheid van A ook in termen van de open verzamelingen van X gedefinieerd worden:

6.6. PROPOSITIE. *Zij A een deelruimte van X. Dan is A compact dan en slechts dan als voor iedere familie $\mathcal{O}$ van open deelverzamelingen van X met $A \subseteq \bigcup \mathcal{O}$ een eindige $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ bestaat zó dat $A \subseteq \bigcup \mathcal{O}'$.*

BEWIJS. Als A compact is en $\mathcal{O}$ is een familie open deelverzamelingen van X met $A \subseteq \bigcup \mathcal{O}$ dan is $\{U \cap A : U \in \mathcal{O}\}$ een open overdekking van A. Er bestaat dus een eindige deelfamilie $\mathcal{O}'$ van $\mathcal{O}$ met $A = \bigcup\{U \cap A : U \in \mathcal{O}'\} \subseteq \bigcup \mathcal{O}'$.

Omgekeerd, als $\mathcal{O}$ een open overdekking is van A dan bestaat er voor elke $U \in \mathcal{O}$ een open deelverzameling O_U van X zó dat $O_U \cap A = U$. Zij $\mathcal{V} = \{O_U : U \in \mathcal{O}\}$, dan is $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Er bestaat dus een eindige $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ zó dat $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}'$. Dan is $\{U : O_U \in \mathcal{V}'\}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{O}$. □

In bovenstaande propositie noemen we $\mathcal{O}$ wel een 'overdekking van A met open deelverzamelingen van X', en $\mathcal{O}'$ gewoon een eindige deeloverdekking.

We gebruiken deze propositie om de volgende stelling te bewijzen:

6.7. STELLING. (a) *Als X compact is en A is gesloten in X dan is ook A compact.*
(b) *Zij X een T_2-ruimte, en zij A een compacte deelruimte van X. Dan is A gesloten in X.*

BEWIJS. (a) Zij $\mathcal{O}$ een overdekking van A met open deelverzamelingen van X. Dan is $\mathcal{O} \cup \{X \setminus A\}$ een open overdekking van X, dus er bestaat een eindige deeloverdekking $\mathcal{V}$ van $\mathcal{O} \cup \{X \setminus A\}$. Dan is $\mathcal{O}' = \mathcal{V} \cap \mathcal{O}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{O}$, en dus is A compact wegens Propositie 6.6.

(b) Zij $x \notin A$. Omdat X Hausdorff is bestaan er voor elke $a \in A$ een open omgeving U_a van a en een open omgeving V_a van x zó dat $U_a \cap V_a = \varnothing$. Dan is $\mathcal{O} = \{U_a : a \in A\}$ een overdekking van A met open deelverzamelingen van X, en dus heeft $\mathcal{O}$ een eindige deeloverdekking $\mathcal{O}'$, zeg $\mathcal{O}' = \{U_a : a \in A'\}$ met A' eindig. Dan is $V = \bigcap\{V_a : a \in A'\}$ een omgeving van x met $V \cap A = \varnothing$. □

Uit Voorbeeld 6.3.2 zien we dat een compacte ruimte niet noodzakelijk aan enig scheidingsaxioma voldoet. Echter, als een compacte ruimte Hausdorff is dan is de ruimte meteen ook normaal.

6.8. STELLING. *Elke compacte Hausdorff ruimte is normaal.*

BEWIJS. Omdat X Hausdorff is, is X zeker T_1, dus het volstaat te bewijzen dat X de T_4-eigenschap heeft. Laat dus A en B gesloten disjuncte deelverzamelingen van X zijn, en merk op dat A en B compact zijn op grond van Propositie 6.7(a).

Zij $a \in A$ vast. Kies nu voor elke $b \in B$ disjuncte open U_b en V_b zó dat $a \in U_b$ en $b \in V_b$. Dan is $B \subseteq \bigcup\{V_b : b \in B\}$, en dus bestaat er een eindige $B' \subseteq B$ zó dat $B \subseteq \bigcup\{V_b : b \in B'\} = Z_a$. Definieer $W_a = \bigcap\{U_b : b \in B'\}$, dan is W_a een open omgeving van a, en $W_a \cap Z_a = \varnothing$.

Als W_a en Z_a geconstrueerd zijn voor elke $a \in A$ dan is $A \subseteq \bigcup\{W_a : a \in A\}$ en dus is er een eindige $A' \subseteq A$ zó dat $A \subseteq \bigcup\{W_a : a \in A'\} = W$. Zij $Z = \bigcap\{Z_a : a \in A'\}$, dan is $B \subseteq Z$, W en Z zijn open in X, en $W \cap Z = \varnothing$. □

Merk op dat het bewijs van deze stelling in feite oplevert dat in een Hausdorff ruimte disjuncte compacte verzamelingen door open verzamelingen te scheiden zijn. Intuïtief kunnen we redeneren dat compacte deelverzamelingen een soort "dikke punten" zijn.

6.9. STELLING. *Zij $f : X \to Y$ een continue surjectie. Als X compact is dan is ook Y compact.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{O}$ een open overdekking van Y. Dan is $\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{O}\}$ een open overdekking van X, en dus bestaat er een eindige $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ zó dat $\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{O}'\}$ X nog overdekt. Dan is $\mathcal{O}'$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{O}$. □

Passen we deze stelling toe op de projecties van een (niet-lege) productruimte naar elke van de factoren, dan zien we dat als een productruimte compact is ook elk van de factoren compact is. Ook de omkering van deze stelling is waar, maar het bewijs is gecompliceerd, en maakt een essentieel gebruik van het Keuzeaxioma en wel twee keer, eerst in de vorm van het Lemma van Zorn en daarna nog een keer om een keuze te maken.

De stelling van Tychonoff

Bij wijze van lemma laten we zien dat we in de definitie van compactheid zouden kunnen volstaan met open overdekkingen die bestaan uit elementen van een vast gekozen basis of zelfs subbasis.

6.10. LEMMA VAN ALEXANDER. *Zij $\mathcal{S}$ een subbasis voor X. Dan is X compact dan en slechts dan als elke open overdekking $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{S}$ van X een eindige deeloverdekking heeft.*

BEWIJS. Neem aan dat elke open overdekking van X met elementen van $\mathcal{S}$ een eindige deeloverdekking heeft, maar dat er toch een open overdekking van X bestaat zonder eindige deeloverdekking. We zullen laten zien dat als er eenmaal maar één zo'n open overdekking zonder eindige deeloverdekking is, er zelfs een open overdekking $\mathcal{O}$ zonder eindige deeloverdekking bestaat zó dat $\mathcal{O} \cap \mathcal{S}$ ook X al overdekt. Wegens de aanname is er dan echter wel een eindige deeloverdekking van $\mathcal{O}$, en we hebben de gewenste tegenspraak. Het idee is om de open overdekking "zo groot mogelijk" te maken, zodat daarmee ook de "kans" dat de subbasiselementen al overdekken zo groot mogelijk is. Om dat te bewerkstelligen gebruiken we het Lemma van Zorn.

We definiëren eerst een partieel geordende verzameling: zij

$$\mathbf{A} = \{\mathcal{V} : \mathcal{V} \text{ is een open overdekking van } X \text{ zonder eindige deeloverdekking}\},$$

partieel geordend door inclusie. Volgens aanname is $\mathbf{A} \neq \varnothing$. Zij $\mathbf{K} = \{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}$ een niet-lege keten in $\mathbf{A}$, en definieer $\mathcal{V} = \bigcup \mathbf{K}$. Dan is $\mathcal{V}$ een open overdekking van X en als $\mathcal{V}'$ een eindige deelfamilie van $\mathcal{V}$ eindig is dan is $\mathcal{V}$ een eindige deelfamilie van zekere $\mathcal{V}_i$ (want $\mathbf{K}$ is een keten!) zodat $\mathcal{V}'$ niet X overdekt. Dus $\mathcal{V} \in \mathbf{A}$, zodat $\mathcal{V}$ een bovengrens is van $\mathbf{K}$. Volgens het Lemma van Zorn heeft $\mathbf{A}$ nu een maximaal element, zeg $\mathcal{O}$. We zullen laten zien dat $\mathcal{O} \cap \mathcal{S}$ een overdekking is van X. Zij $x \in X$. Omdat $\mathcal{O} \in \mathbf{A}$ is $\mathcal{O}$ in het bijzonder een open overdekking van X, en dus bestaan er een $U \in \mathcal{O}$ en eindig vele $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ zó dat $x \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subseteq U$.
Bewering: één van de S_i is element van $\mathcal{O}$ (en dus $x \in S_i \in \mathcal{O} \cap \mathcal{S}$). Anders zou voor elke i de familie $\mathcal{O}_i = \mathcal{O} \cup \{S_i\}$ een open overdekking van X zijn met $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{O}_i$ en dus geen element van $\mathbf{A}$. Maar dat betekent dat elke $\mathcal{O}_i$ een eindige deeloverdekking heeft, en dus bestaat een eindige $\mathcal{O}_i' \subseteq \mathcal{O}$ zó dat $\mathcal{O}_i' \cup \{S_i\}$ een overdekking is van X. Zij nu $\mathcal{O}' = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i' \cup \{U\}$. Dan is $\mathcal{O}'$ een eindige deelfamilie van $\mathcal{O}$, dus we zijn klaar als we

kunnen laten zien dat $\mathcal{O}'$ een overdekking is van X. Zij daartoe $y \in X$ willekeurig. Als $y \in \bigcup \mathcal{O}'_i$ voor zekere i dan zeker $y \in \bigcup \mathcal{O}'$, dus neem aan dat $y \notin \bigcup \mathcal{O}'_i$ voor elke i. Omdat $\mathcal{O}'_i \cup \{S_i\}$ een overdekking is van X moet dan $y \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subseteq U$. □

Met behulp van het Lemma van Alexander bewijzen we nu dat het product van compacte ruimten weer compact is.

6.11. STELLING VAN TYCHONOFF. *Zij $\{X_i\}_{i\in I}$ een familie niet-lege topologische ruimten, en zij X de productruimte. Dan is X compact dan en slechts dan als elke X_i compact is.*

BEWIJS. Zoals we al hebben opgemerkt volgt uit Stelling 6.9 dat elke X_i compact is als X compact is. Dus neem aan dat X compact is. Zij $\mathcal{S}$ de subbasis van X bestaande uit alle verzamelingen $p_i^{-1}[U]$ met $i \in I$ en U open in X_i, en zij $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{S}$ een open overdekking van X. Zij

$$\mathcal{O}_i = \{U \text{ open in } X_i : p_i^{-1}[U] \in \mathcal{O}\}.$$

Als voor elke $i \in I$ geldt dat $\mathcal{O}_i$ geen overdekking van X_i is dan is er, volgens het Keuzeaxioma, een punt $(x_i)_i$ in X met $x_i \in X \setminus \bigcup \mathcal{O}_i$ voor alle i. Echter, voor dit punt $x = (x_i)_i$ zijn er een $j \in I$ en een open U in X_j met $x \in p_j^{-1}[U] \in \mathcal{O}$, en dus $p_j(x) = x_j \in U \subseteq \bigcup \mathcal{O}_j$, een tegenspraak. Er is dus een $i \in I$ zodat $\mathcal{O}_i$ een open overdekking is van X_i. Omdat X_i compact is heeft deze overdekking een eindige deeloverdekking $\mathcal{O}'_i$, en dan is $\{p_i^{-1}[U] : U \in \mathcal{O}'_i\}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{O}$. Pas nu het Lemma van Alexander toe. □

6.12. VOORBEELDEN.

1. De ruimte X uit Voorbeeld 5.31 is compact op grond van Voorbeeld 6.3.5 en de Stelling van Tychonoff. Omdat X ook Hausdorff is, is X dus normaal (Stelling 6.8).
2. De *Hilbert-kubus* $Q = \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] = [0,1]^{\infty}$ is een compacte metrische ruimte. Men kan laten zien dat voor elke separabele metrische ruimte X een inbedding $j : X \to Q$ bestaat (Vraagstuk 9.8).

Aftelbaar compact en Lindelöf

6.13. DEFINITIE. Een topologische ruimte heet *aftelbaar compact* als elke *aftelbare* open overdekking een eindige deeloverdekking heeft.

6.14. VOORBEELDEN.

1. In Hoofdstuk 0 hebben we gezien dat in metrische ruimten compactheid en aftelbaar compactheid equivalent zijn (Stelling 0.14).
2. De ordinaalruimte $W(\omega_1)$ is aftelbaar compact, maar niet compact. Immers, zij $\mathcal{O} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare open overdekking van X, en neem aan dat $\mathcal{O}$ geen eindige deeloverdekking heeft. Dan bestaat er voor elke $n \in \mathbb{N}$ een $\alpha_n < \omega_1$ met $\alpha_n \notin \bigcup_{i=1}^n U_i$. Zij $\alpha = \sup_n \alpha_n$, dan $\alpha < \omega_1$ (Stelling B.21). Maar dan is $\{U_n \cap [0,\alpha] : n \in \mathbb{N}\}$ een open overdekking van $W(\alpha+1)$ zonder eindige deeloverdekking, in tegenspraak met Voorbeeld 6.3.5. Dus $W(\omega_1)$ is aftelbaar compact. Anderzijds is $W(\omega_1)$ niet compact: de open overdekking $\big\{[0,\alpha) : \alpha < \omega_1\big\}$ heeft geen eindige deeloverdekking.

6.15. DEFINITIE. Een topologische ruimte heet *Lindelöf* als elke open overdekking een *aftelbare* deeloverdekking heeft.

Uiteraard geldt:

6.16. STELLING. *Een ruimte is compact dan en slechts dan als deze zowel aftelbaar compact als Lindelöf is.*

6.17. VOORBEELDEN.

1. $W(\omega_1)$ is aftelbaar compact maar niet compact, en dus niet Lindelöf.
2. $\mathbb{N}$ is Lindelöf maar niet aftelbaar compact.

6.18. STELLING. *Elke* $\mathrm{C_{II}}$*-ruimte is Lindelöf.*

BEWIJS. Zij X een topologische ruimte met aftelbare basis $\mathcal{B}$, en zij $\mathcal{O}$ een open overdekking van X. Kies voor elke $x \in X$ een $B_x \in \mathcal{B}$ en $U_x \in U$ zó dat $x \in B_x \subseteq U_x$. Omdat $\mathcal{B}$ aftelbaar is, is er een aftelbare $X' \subseteq X$ met $\{B_x : x \in X\} = \{B_x : x \in X'\}$. Dan is $\{U_x : x \in X'\}$ een aftelbare deeloverdekking van $\mathcal{O}$. □

▶ **6.19.** OPGAVE.

a) Bewijs dat aftelbaar compact gesloten-erfelijk is, maar niet erfelijk.

b) Bewijs dat Lindelöf gesloten-erfelijk is, maar niet erfelijk.

▶ **6.20.** OPGAVE. Zij $f : X \to Y$ een continue surjectie. Toon aan:

a) Als X aftelbaar compact is dan is ook Y aftelbaar compact.

b) Als X Lindelöf is dan is ook Y Lindelöf.

Lokaal Compacte ruimten

We introduceren nu de eigenschap van lokale compactheid. Er zijn daarvan verschillende 'redelijke' definities mogelijk (zie Propositie 6.23), die in het algemeen niet equivalent zijn. Echter, in Hausdorff ruimten zijn ze dat wel, en dat is de reden dat we in onze definitie van lokaal compactheid de Hausdorff-eigenschap zullen vooronderstellen.

6.21. DEFINITIE. Zij X een T_2-ruimte. X heet *lokaal compact* als voor elke $x \in X$ en elke omgeving U van x een compacte omgeving V van x bestaat met $x \in V \subseteq U$.

Uit de definitie volgt meteen dat een lokaal compacte ruimte regulier is:

6.22. STELLING. *Elke lokaal compacte ruimte is regulier.*

BEWIJS. Zij U een omgeving van $x \in X$, en zij V een compacte omgeving van x met $V \subseteq U$. Omdat X volgens aanname Hausdorff is, is $V = \overline{V}$ en dus $x \in V = \overline{V} \subseteq U$. □

We zulen straks zien dat een lokaal compacte ruimte in feite zelfs volledig regulier is. Echter, een lokaal compacte ruimte is in het algemeen niet normaal (zie Voorbeeld 6.27.2).

6.23. PROPOSITIE. *Zij X een* T_2*-ruimte. De volgende beweringen zijn equivalent.*

1. *Elke $x \in X$ heeft een compacte omgeving.*
2. *Voor elke $x \in X$ bestaat een omgeving V van x zó dat $\overline{V}$ compact is.*

3. *X is lokaal compact.*

Bewijs. (1) $\Longrightarrow$ (2): Neem voor V een compacte omgeving van x, dan is $V = \overline{V}$ op grond van Stelling 6.7(b).

(2) $\Longrightarrow$ (3) Zij U een omgeving van x, en zij W een omgeving van x met $\overline{W}$ compact. Dan is $\overline{W}$ een compacte T_2-ruimte, en dus normaal (Stelling 6.8) en daarmee regulier. Omdat $U \cap W$ een omgeving is van x in X, en dus in $\overline{W}$, bestaat er een open deelverzameling O van $\overline{W}$ zó dat $x \in O$ en $\mathrm{Cl}_{\overline{W}}(O) \subseteq U \cap W$. Omdat $\overline{W}$ gesloten is, is $\mathrm{Cl}_X(O) \subseteq \overline{W}$ en dus is $\mathrm{Cl}_{\overline{W}}(O) = \mathrm{Cl}_X(O) \cap \overline{W} = \mathrm{Cl}_X(O)$. Zij nu $V = \mathrm{Cl}_X(O \cap U \cap W)$. Dan is V een omgeving van x in X en V is compact omdat V een gesloten deelverzameling is van $\overline{W}$, en tenslotte geldt $V \subseteq \mathrm{Cl}_X(O) \subseteq U$.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Pas Definitie 6.21 toe op $U = X$. □

6.24. Voorbeelden.

1. Elke compacte Hausdorff ruimte is lokaal compact.
2. Elke discrete ruimte is lokaal compact.
3. $\mathbb{R}^n$ is lokaal compact.
4. $\mathbb{S}$ is niet lokaal compact: als U een compacte omgeving is van x en $x \in [x, x+\varepsilon) \subseteq U$ dan is ook $[x, x+\varepsilon)$ compact want $[x, x+\varepsilon)$ is gesloten in $\mathbb{S}$ dus in U. Maar $\big\{[x, x+a) : 0 < a < \varepsilon\big\}$ is een open overdekking van $[x, x+\varepsilon)$ zonder eindige deeloverdekking, een tegenspraak.

6.25. Stelling. *Zij X een lokaal compacte ruimte, en zij A een deelruimte van X.*

(a) *Als A open is in X dan is A lokaal compact.*

(b) *Als A gesloten is in X dan is A lokaal compact.*

(c) *Als F gesloten is in X en O open is in X, en $A = O \cap F$, dan is A lokaal compact.*

Bewijs. (a) Zij $x \in X$, en zij V een compacte omgeving van x zodat $V \subseteq A$, dan is V een compacte omgeving van x in A. Dus A is lokaal compact wegens Propositie 6.23(1).

(b) Zij V een compacte omgeving van x in X, dan is $V \cap A$ een omgeving van x in A, en $V \cap A$ is compact omdat $V \cap A$ gesloten is in V.

(c) Wegens (a) is O lokaal compact, en A is een gesloten deelruimte van O dus lokaal compact op grond van (b). □

In aanvulling op (c) merken we nog op dat A van de vorm $O \cap F$ is met O open en F gesloten dan en slechts dan als A open is in $\overline{A}$.

De volgende stelling toont aan dat de deelverzamelingen van de vorm $O \cap F$ als in (c) de *enige* lokaal compacte deelruimten zijn van een lokaal compacte ruimte X.

6.26. Stelling. *Zij X een Hausdorff ruimte, en zij A een lokaal compacte deelruimte van X. Dan zijn er een open O en een gesloten F in X zó dat $A = O \cap F$.*

Bewijs. Zoals hierboven opgemerkt moeten we bewijzen dat A open is in $\overline{A} = \mathrm{Cl}_X(A)$. Zij $x \in A$, en zij V een compacte omgeving van x in A. Dan is er een open U in $\overline{A}$ met $x \in U \cap A \subseteq V$. Omdat $\overline{A}$ gesloten is in X geldt dat $\mathrm{Cl}_X(U) = \mathrm{Cl}_{\overline{A}}(U)$, en omdat A dicht is in $\overline{A}$ geldt dat $\mathrm{Cl}_{\overline{A}}(U) = \mathrm{Cl}_{\overline{A}}(U \cap A)$. Verder is $\mathrm{Cl}_{\overline{A}}(V) = V$ omdat V compact is en X een Hausdorff ruimte. Dus $x \in U \subseteq \mathrm{Cl}_X(U) = \mathrm{Cl}_{\overline{A}}(U \cap A) \subseteq \mathrm{Cl}_{\overline{A}}(V) = V \subseteq A$. Dus $x \in \mathrm{Int}_{\overline{A}}(A)$, hetgeen te bewijzen was. □

6.27. VOORBEELDEN.

1. Elke ordinaalruimte $W(\alpha)$ is lokaal compact als open deelruimte van de compacte ruimte $W(\alpha+1)$.
2. Zij T de Tychonoff-plank. Dan is T niet normaal, maar omdat T open is in de compacte ruimte $W(\omega_1+1)\times W(\omega+1)$ is T wel lokaal compact.
3. $\mathbb{Q}$ is niet lokaal compact want $\mathbb{Q}$ is niet open in $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

6.28. STELLING. *Zij $\{X_i\}_{i\in I}$ een familie niet-lege topologische ruimten, en zij X de productruimte. Dan is X lokaal compact dan en slechts dan als elke X_i lokaal compact is en bovendien $\{i\in I : X_i \text{ is niet compact}\}$ eindig is.*

BEWIJS. Neem eerst aan dat X lokaal compact is. Kies voor elke $i\in I$ een vast punt a_i in X_i, en zij $\tilde{X}_i=\{x\in X : x_j=a_j \text{ voor elke } j\neq i\}$. Dan is $\tilde{X}_i$ een gesloten deelruimte van X die homeomorf is met X_i, en dus is elke X_i lokaal compact wegens Stelling 6.25(b). Zij verder $a=(a_i)_i$, en zij V een compacte omgeving van a. Op grond van Stelling 6.9 is dan voor elke $i\in I$ de projectie $p_i[V]$ compact. Maar $\{i\in I : p_i[V]\neq X_i\}$ is eindig omdat V een element van de kanonieke basis voor de producttopologie bevat.

Omgekeerd, neem aan dat elke X_i lokaal compact is, en $I'=\{i\in I : X_i \text{ is niet compact}\}$ eindig is. Zij $x\in X$. Kies voor elke $i\in I'$ een compacte omgeving V_i, en zij $V_i=X_i$ als $i\in I\setminus I'$. Dan is $\prod_{i\in I}V_i$ een compacte omgeving van x op grond van de Stelling van Tychonoff. Verder is X Hausdorff wegens Stelling 5.32, en dus is X lokaal compact. $\square$

In het bijzonder is dus een eindig product van lokaal compacte ruimten weer lokaal compact.

6.29. VOORBEELD. Uit Stelling 6.28 volgt dat $\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{R}=\mathbb{R}^{\infty}$ niet lokaal compact is. Dit kan ook uit Stelling 6.26 worden afgeleid. Immers, $\mathbb{R}^{\infty}$ is homeomorf met de deelruimte $(-1,1)^{\infty}$ van de Hilbert-kubus Q (Voorbeeld 6.12.2). Deze deelruimte is dicht maar niet open in Q, en dus niet open in zijn afsluiting.

Eénpuntscompactificatie

Tenslotte behandelen we nog kort de zogenaamde éénpuntscompactificatie van een lokaal compacte niet-compacte ruimte.

6.30. STELLING. *Zij X een lokaal compacte niet-compacte ruimte. Dan bestaan er een compacte T_2-ruimte αX en een inbedding $j : X\to\alpha X$ zó dat $\alpha X\setminus j[X]$ uit één punt bestaat.*

BEWIJS. Kies een punt $\infty\notin X$, en neem $X\cup\{\infty\}$ als onderliggende verzameling van αX. Zij $\mathcal{T}_X$ de topologie van X, en definieer een topologie $\mathcal{T}$ op αX door

$$O\in\mathcal{T} \iff O\in\mathcal{T}_X \text{ of } X\setminus O \text{ is compact in } (X,\mathcal{T}).$$

Omdat $O\cap X\in\mathcal{T}_X$ voor elke $O\in\mathcal{T}$ is de voor de hand liggende afbeelding $j : X\to\alpha X$ een inbedding.
Bewering: X *is* T_2. Immers, als $x,y\in X$ en $x\neq y$ dan zijn x en y te scheiden met elementen van $\mathcal{T}_X\subseteq\mathcal{T}$ omdat X een T_2-ruimte is. Als $x\in X$ en $y=\infty$, zij dan U

een compacte omgeving van x in X, dan is $V = \alpha X \setminus U \in \mathcal{T}$ een omgeving van y, en $U \cap V = \varnothing$.

Bewering: X is compact. Zij $\mathcal{O}$ een open overdekking van αX. Kies $U \in \mathcal{O}$ met $\infty \in U$. Dan is $X \setminus U$ compact, en dus is er een eindige $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$ met $X \setminus U \subseteq \bigcup \mathcal{O}'$. Nu is $\mathcal{O}' \cup \{U\}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{O}$. □

▶ **6.31.** Opgave. Bewijs dat $\mathcal{T}$ inderdaad een topologie is.

Merk op dat, omdat X niet compact is, $j[X]$ dicht is in αX. Een compacte T_2-ruimte waarin X als dichte deelverzameling ligt ingebed heet in het algemeen een *compactificatie* van X, en de ruimte αX in bovenstaande stelling heet dan ook begrijpelijkerwijze de *éénpuntscompactificatie van X*. De éénpuntscompactificatie (eigenlijk: het paar $(\alpha X, j)$ is uniek 'op homeomorfisme na' (zie Vraagstuk 6.15).

Een gevolg van het bestaan van een éénpuntscompactificatie is dat een lokaal compacte ruimte volledig regulier is.

6.32. Stelling. *Elke lokaal compacte ruimte is volledig regulier.*

Bewijs. Als X compact is dan is X zelfs normaal wegens Stelling 6.8. Als X niet compact is dan is X homeomorf met de deelruimte $j[X]$ van αX. Omdat αX een compacte T_2-ruimte is en dus normaal en dus volledig regulier, is ook X volledig regulier daar volledig regulier een erfelijke eigenschap is. □

Vraagstukken

▶ **6.1.** Vraagstuk. Zij X een topologische ruimte, met compacte deelruimten $A_1, \ldots, A_n$. Toon aan dat $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ compact is.

▶ **6.2.** Vraagstuk. Laat A en B compacte deelruimten zijn van X en Y, en zij O open in $X \times Y$ met $A \times B \subseteq O$. Toon aan dat er open $U \subseteq X$ en $V \subseteq Y$ bestaan zó dat $A \times B \subseteq U \times V \subseteq O$.

▶ **6.3.** Vraagstuk. Laat X en Y topologische ruimten zijn, met X compact. Toon aan dat de projectie $p : X \times Y \to Y$ ('projectie langs een compacte factor') een gesloten afbeelding is.

▶ **6.4.** Vraagstuk. Bewijs dat elke compacte deelverzameling van de Sorgenfrey-lijn aftelbaar is. *Aanwijzing*: Als K compact is en $x \in K$ dan is er een $a < x$ met $K \cap (a, x) = \varnothing$.

▶ **6.5.** Vraagstuk. Bewijs dat $[0, 1]$ compact is door het Lemma van Alexander toe te passen op de subbasis $\mathcal{S} = \bigl\{[0, a) : 0 < a \leqslant 1\bigr\} \cup \bigl\{(a, 1] : 0 \leqslant a < 1\bigr\}$.

▶ **6.6.** Vraagstuk. Zij $(X, <)$ is lineair geordende verzameling voorzien van de ordetopologie.

a) Bewijs: als X compact is, dan is $<$ volledig (dat wil zeggen, elke deelverzameling van X heeft een kleinste bovengrens en een grootste ondergrens).

b) Bewijs: als $<$ volledig is, dan is X compact. *Aanwijzing*: Pas het Lemma van Alexander toe.

▶ **6.7.** VRAAGSTUK.

a) Zij X een compacte ruimte, Y een T_2-ruimte en zij $f : X \to Y$ continu. Toon aan dat f een gesloten afbeelding is.

b) Zij $(X, \mathcal{T})$ een compacte T_2-ruimte. Toon aan dat X minimaal Hausdorff en maximaal compact is, dat wil zeggen: als $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ topologieën op X zijn met $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_2$, dan geldt $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$ als $(X, \mathcal{T}_1)$ Hausdorff is, en $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$ als $(X, \mathcal{T}_2)$ compact is.

▶ **6.8.** VRAAGSTUK.

a) Geef een voorbeeld van een Lindelöf ruimte die niet separabel is (en dus niet C_{II}).

b) Toon aan dat een metrische Lindelöf ruimte C_{II} is (en dus separabel).

▶ **6.9.** VRAAGSTUK. Toon aan dat de Sorgenfrey-lijn Lindelöf is. Zij $\mathcal{O}$ een willekeurige familie open verzamelingen. Zij $\mathcal{Q}$ de familie van alle open intervallen (p, q) met rationale eindpunten waarvoor een $O_{p,q} \in \mathcal{O}$ bestaat met $(p, q) \subseteq O_{p,q}$. Zij $A = \bigcup \mathcal{O} \setminus \bigcup \mathcal{Q}$.

a) A is aftelbaar. *Aanwijzing*: Kies voor $a \in A$ een $O_a \in \mathcal{O}$ en $x_a > a$ met $a \in [a, x_a) \subseteq O$; bewijs dat $x_a < b$ als $a < b$.

b) $\mathcal{O}$ heeft een aftelbare deelfamilie $\mathcal{O}'$ met $\bigcup \mathcal{O}' = \bigcup \mathcal{O}$.

▶ **6.10.** VRAAGSTUK. Een reguliere Lindelöf ruimte is normaal. Laat A en B gesloten en disjunct zijn.

a) Er zijn aftelbaar veel open verzamelingen U_n met $\overline{U_n} \cap B = \varnothing$ en $A \subseteq \bigcup_n U_n$.

b) Er zijn aftelbaar veel open verzamelingen V_n met $\overline{V_n} \cap A = \varnothing$ en $B \subseteq \bigcup_n V_n$.

c) $U = \bigcup_n (U_n \setminus \bigcup_{m \leqslant n} \overline{V_m})$ en $V = \bigcup_n (V_n \setminus \bigcup_{m \leqslant n} \overline{U_m})$ zijn disjuncte open omgevingen om A en B.

▶ **6.11.** VRAAGSTUK. De ruimte uit Voorbeeld 5.18.2 is Lindelöf. *Aanwijzing*: De ruimte is zelfs een C_{II}-ruimte.

▶ **6.12.** VRAAGSTUK. Zij X een lokaal compacte ruimte, en zij A een compacte deelruimte van X. Toon aan dat voor elke open U in X met $A \subseteq U$ een open V in X bestaat zó dat $\overline{V}$ compact is, en $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

▶ **6.13.** VRAAGSTUK. Laat zien dat het Niemytzki-vlak niet lokaal compact is.

▶ **6.14.** VRAAGSTUK. Zij X een lokaal compacte ruimte, Y een T_2-ruimte, en zij $f : X \to Y$ een continue surjectie.

a) Toon aan dat Y niet noodzakelijk lokaal compact is.

b) Toon aan: als f ook nog open is dan is ook Y lokaal compact.

▶ **6.15.** VRAAGSTUK. Zij X een lokaal compacte niet-compacte ruimte, en zij αX, j en $\mathcal{T}$ als in (het bewijs van) Stelling 6.30.

a) Laat zien dat de familie $\mathcal{T}$ een topologie is op αX.

b) Zij Y een compacte T_2-ruimte, en $i : X \to Y$ een inbedding zó dat $Y \setminus i[X]$ uit één punt bestaat. Laat zien dat er een homeomorfisme $h : \alpha X \to Y$ bestaat met $h \circ j = i$.

▶ **6.16.** VRAAGSTUK. Bepaal de éénpuntscompactificaties van $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$.

Hoofdstuk 7

De Stelling van Baire

De stelling van Baire laat ons in volledige metrische ruimten en in lokaal compacte ruimten onderscheid maken tussen 'grote' en 'kleine' verzamelingen.

Nergens dicht en mager

7.1. Definitie. Een deelverzameling A van een topologische ruimte X heet *nergens dicht* als $\overline{A}^{\circ} = \varnothing$.

7.2. Voorbeelden.

1. $\{0\}$ is nergens dicht in $\mathbb{R}$;
2. de Cantorverzameling C is nergens dicht in $\mathbb{R}$;
3. $\mathbb{Q}$ is dicht in $\mathbb{R}$, dus zeker niet nergens dicht.

▶ **7.3.** Opgave. Toon aan dat equivalent zijn: 1) A is nergens dicht; 2) $X \setminus \overline{A}$ is dicht en 3) voor elke niet lege open verzameling U bestaat een niet-lege open verzameling V met $V \subseteq U \setminus A$.

▶ **7.4.** Opgave. Toon aan: de vereniging van eindig veel nergens dichte verzamelingen is weer nergens dicht.

De bedoeling is dat de nergens dichte verzamelingen in zekere zin topologisch klein zijn. Nu zijn aftelbare verzamelingen eigenlijk ook klein maar, zoals $\mathbb{Q}$ laat zien, niet altijd nergens dicht.

We combineren de twee noties van klein in een nieuwe.

7.5. Definitie. Een deelverzameling A van een topologische ruimte X heet *mager* of *van de eerste categorie* als er een rij $\langle A_n \rangle_n$ van nergens dichte verzamelingen bestaat met $A \subseteq \bigcup_n A_n$. Een verzameling die niet mager is heet ook wel *van de tweede categorie.*

7.6. Opmerking. Nergens dicht en mager zijn *relatieve* eigenschappen. Zo is $\mathbb{R}$ nergens dicht in $\mathbb{R}^2$ maar natuurlijk niet in zichzelf.

De stelling van Baire, voor $\mathbb{R}$

De volgende stelling, *de Categoriestelling van Baire*, garandeert dat mager niet een flauwe eigenschap is.

7.7. Stelling. *De ruimte $\mathbb{R}$ is niet mager in zichzelf: als $\langle A_n \rangle_n$ een rij nergens dichte verzamelingen is dan is $\mathbb{R} \setminus \bigcup_n A_n$ dicht in $\mathbb{R}$.*

Bewijs. Begin met een willekeurige open verzameling I_0 in $\mathbb{R}$. We laten zien dat $I_0 \setminus \bigcup_n A_n$ niet leeg is. Hiertoe kiezen we een rij punten $\langle x_n \rangle_n$ en een rij $\langle I_n \rangle_n$ open intervallen, als volgt.

Omdat $I_0 \setminus \overline{A_1}$ niet leeg is kunnen we er een punt x_1 in kiezen en een interval I_1 met $x_1 \in I_1 \subseteq \overline{I_1} \subseteq I_0 \setminus \overline{A_1}$ en $\operatorname{diam} I_1 \leqslant 1$.

Op dezelfde manier kiezen we $x_2 \in I_1 \setminus \overline{A_2}$ en I_2 met $x_2 \in I_2 \subseteq \overline{I_2} \subseteq I_1 \setminus \overline{A_2}$ en $\operatorname{diam} I_2 \leqslant \frac{1}{2}$.

Algemeen kiezen we $x_n \in I_{n-1} \setminus \overline{A_n}$ en I_n met $x_n \in I_n \subseteq \overline{I_n} \subseteq I_{n-1} \setminus \overline{A_n}$ en $\operatorname{diam} I_n \leqslant \frac{1}{n}$.

De rij $\langle x_n \rangle_n$ is een Cauchy-rij, want $|x_n - x_m| \leqslant \frac{1}{m}$ als $n \geqslant m$. Zij dus $x = \lim_n x_n$; dan geldt $x \in \bigcap_n \overline{I_n} = \bigcap_n I_n$ en dus $x \in I_0 \setminus \bigcup_n A_n$. □

7.8. Voorbeeld. We kunnen deze stelling gebruiken om expliciet te laten zien dat het Niemytzki-vlak $\mathbf{N}$ niet normaal is. De verzamelingen $P = \bigl\{(x,0) : x \in \mathbb{P}\bigr\}$ en $Q = \bigl\{(x,0) : x \in \mathbb{Q}\bigr\}$ zijn gesloten en disjunct in $\mathbf{N}$. We laten zien dat ze geen disjuncte open omgevingen hebben.

Laat $U \supseteq P$ en $V \supseteq Q$ open omgevingen zijn. Voor elke $x \in \mathbb{P}$ kiezen we $n_x \in \mathbb{N}$ zó dat de rakende bol $B\bigl((x, \frac{1}{n_x}), \frac{1}{n_x}\bigr)$ binnen U ligt. Zij nu $A_n = \{x_n \in \mathbb{P} : n_x = n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dan geldt $\mathbb{P} = \bigcup_n A_n$; daar $\mathbb{P}$ niet mager in $\mathbb{R}$ is kan niet elke A_n nergens dicht in $\mathbb{R}$ zijn. Met ander woorden, we kunnen dan een m en een open interval (a,b) vinden met $(a,b) \subseteq \overline{A_m}$.

Neem nu $q \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$ en een rij $\langle x_n \rangle_n$ in A_m die naar q convergeert. Meetkundig is duidelijk dat de bollen $B\bigl((x_n, \frac{1}{m}), \frac{1}{m}\bigr)$ mooi over de bol $B\bigl((q, \frac{1}{m}), \frac{1}{m}\bigr)$ heen schuiven. Formeel: als $y \in B\bigl((q, \frac{1}{m})\frac{1}{m}\bigr)$ kies dan een n zó dat $|q - x_n| < \frac{1}{m} - d\bigl(y, (q, \frac{1}{m})\bigr)$; dan volgt met de driehoeksongelijkheid dat $y \in B\bigl((x_n, \frac{1}{m}), \frac{1}{m}\bigr)$. Conclusie: $B\bigl((q, \frac{1}{m}), \frac{1}{m}\bigr) \subseteq U$ en hieruit volgt snel dat $V \cap U \neq \varnothing$.

De stelling van Baire, algemeen

De stelling van Baire geldt in meer ruimten dan alleen $\mathbb{R}$.

7.9. Stelling. *Als X een volledige metrische ruimte is of een lokaal compacte ruimte dan is X niet mager.*

Bewijs. Het bewijs voor $\mathbb{R}$ is bijna letterlijk te kopiëren. In het eerste geval, als X een volledige metrische ruimte is hoeven we slechts 'intervallen' door 'open verzamelingen' te vervangen. Daarna hoeft niets meer veranderd te worden.

In het tweede geval zorgen we dat $\overline{I_1}$ compact is en laten we de eis $\operatorname{diam} I_n \leqslant \frac{1}{n}$ vallen — die is onzinnig geworden omdat we geen metriek meer hebben. Nu garandeert de compactheid dat $\bigcap_n I_n = \bigcap_n \overline{I_n} \neq \varnothing$. □

De stelling van Baire wordt ook wel complementair geformuleerd.

7.10. Stelling. *Zij X een lokaal compacte ruimte of een volledige metrische ruimte en $\langle U_n \rangle_n$ een rij dichte open deelverzamelingen van X. Dan is $\bigcap_n U_n$ dicht in X.*

Bewijs. Voor elke n is het complement $X \setminus U_n$ nergens dicht. □

Er is geen algemene stelling van Baire voor overaftelbare families nergens dichte verzamelingen.

▶ **7.11.** Opgave. Neem $\mathbb{R}$ met de discrete metriek en topologie. Het product $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is dan ook metrizeerbaar; de gebruikelijke metriek is gedefinieerd door $d(x,y)=0$ als $x=y$ en $d(x,y)=2^{-n(x,y)}$, waar $n(x,y)=\min\{n : x_n \neq y_n\}$ als $x \neq y$.

a) Ga na dat d daadwerkelijk een metriek is die de producttopologie voortbrengt.
b) Toon aan dat d volledig is.
c) Voor $r \in \mathbb{R}$ zij $U_r = \bigl\{x : (\exists n)(x_n = r)\bigr\}$. Toon aan: U_r is open en dicht.
d) Toon aan: als A overaftelbaar is dan is $\bigcap_{r\in A} U_r$ leeg.

Een *Baire ruimte* is een ruimte die aan de Categoriestelling van Baire voldoet, dat wil zeggen dat in zo'n ruimte de doorsnede van aftelbaar veel dichte open verzamelingen dicht is. Dus volledige metrizeerbare en lokaal compacte ruimten zijn Baire ruimten.

▶ **7.12.** Opgave. De Sorgenfrey-lijn is een Baire ruimte. *Aanwijzing*: Volg het bewijs voor $\mathbb{R}$.

Toepassingen

Het complement van een magere verzameling heet wel *co-mager*, *residuaal* of *generiek*.

Generieke verzamelingen vullen, in lokaal compacte of volledige metrische ruimten, in feite de hele ruimte op. Ze zijn zo groot dat zelfs de doorsnede van aftelbaar veel generieke verzamelingen nog steeds generiek is. Zoals we zullen zien kun je het bestaan van bepaalde objecten bewijzen door te bewijzen dat de verzameling van zulke objecten generiek is.

Dit idee passen we toe om aan te tonen dat er continue functies bestaan die in geen enkel punt differentieerbaar zijn. We gebruiken hierbij de ruimte $C\bigl([0,1]\bigr)$ van alle continue functies van $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$, voorzien van de maximum-norm: $\|f\| = \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\bigl|f(x)\bigr|$.

▶ **7.13.** Opgave. De ruimte $C\bigl([0,1]\bigr)$ is volledig. *Aanwijzing*: Als $\langle f_n\rangle_n$ een Cauchy-rij is dan is voor elke x de rij $\bigl\langle f_n(x)\bigr\rangle_n$ ook Cauchy; definieer zo een functie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Bewijs vervolgens: als voor $n,m \geqslant N$ geldt $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ dan geldt voor $n \geqslant N$ en $x \in [0,1]$ de ongelijkheid $\bigl|f(n(x) - f(x)\bigr| \leqslant \epsilon$; dus $\langle f_n\rangle_n$ convergeert uniform naar f.

7.14. Stelling. *De verzameling N van functies die nergens differentieerbaar zijn is generiek in $C\bigl([0,1]\bigr)$.*

Bewijs. Als f differentieerbaar is in x dan is er zeker een $\epsilon > 0$ zó dat voor alle h met $0 < |h| < \epsilon$ geldt $\bigl|f'(x) - \frac{1}{h}\bigl(f(x+h) - f(x)\bigr)\bigr| < 1$. Kies nu n zó groot dat 1) $n > \bigl|f'(x)\bigr| + 1$; 2) $\frac{1}{n} < \epsilon$; en 3) als $x < 1$ dan ook $x < 1 - \frac{1}{n}$ en als $x > 0$ dan ook $x > \frac{1}{n}$. Dan volgt dat f in R_n of in L_n zit waar

$$R_n = \Bigl\{g : \bigl(\exists x \in [0, 1-\frac{1}{n}]\bigr)\bigl(\forall h \in (0,\frac{1}{n})\bigr)\,\Bigl|\frac{1}{h}\bigl(f(x+h)-f(x)\bigr)\Bigr| \leqslant n\Bigr\}$$

en

$$L_n = \Bigl\{g : \bigl(\exists x \in [\frac{1}{n}, 1]\bigr)\bigl(\forall h \in (-\frac{1}{n}, 0)\bigr)\,\Bigl|\frac{1}{h}\bigl(f(x+h)-f(x)\bigr)\Bigr| \leqslant n\Bigr\}.$$

We bewijzen dat elke R_n gesloten en nergens dicht is, bewijzen dat L_n nergens dicht is gaat net zo. Omdat N het complement van $\bigcup_n R_n \cup \bigcup_n L_n$ omvat volgt dan dat N generiek is.

Zij $\langle f_k \rangle_k$ een rij in R_n die naar f convergeert. Kies bij elke f_k een punt x_k als in de definitie. Omdat $[0,1]$ een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}$ is heeft $\langle x_k \rangle_k$ een convergente deelrij; we doen maar alsof $\langle x_k \rangle_k$ zelf convergeert, naar x. Wegens de uniforme convergentie volgt dan dat voor elke $h \in (0, \frac{1}{n})$ geldt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{h}\bigl(f(x_k + h) - f(x_k)\bigr) = \frac{1}{h}\bigl(f(x+h) - f(x)\bigr).$$

Maar dan volgt dat $\bigl|\frac{1}{h}\bigl(f(x+h) - f(x)\bigr)\bigr| \leqslant n$.

Om te bewijzen dat R_n nergens dicht is nemen we f willekeurig en $\epsilon > 0$; we vinden dan g met $\|f - g\| < \epsilon$ en $g \notin R_n$. Hiertoe kiezen we eerst een m zó dat: als $|x - y| < \frac{1}{m}$ dan $\bigl|f(x) - f(y)\bigr| < \frac{1}{3}\epsilon$. We maken hiermee een stuksgewijs lineaire functie l door telkens de punten $\bigl(\frac{i}{m}, f(\frac{i}{m})\bigr)$ en $\bigl(\frac{i+1}{m}, f(\frac{i+1}{m})\bigr)$ met een rechte lijn te verbinden. Als $x \in [0,1]$ dan is er een i met $x \in [\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}]$; dan ligt $l(x)$ tussen $f(\frac{i}{m})$ en $f(\frac{i+1}{m})$ (die liggen hooguit $\frac{1}{3}\epsilon$ uit elkaar) en $f(x)$ ligt minder dan $\frac{1}{3}\epsilon$ van die waarden vandaan, dus $\bigl|l(x) - f(x)\bigr| < \frac{2}{3}\epsilon$. Maak nu een zaagtand-achtige functie g die overal helling $n+1$ heeft en die dichter dan $\frac{1}{3}\epsilon$ bij l blijft. Dan geldt $g \notin R_n$ en $\|g - f\| < \epsilon$. □

Blijkbaar is vrijwel *elke* continue functie op $[0,1]$ nergens differentieerbaar. Onze methode om het bestaan van zulke functies aan te tonen is nogal indirect, we hebben er niet expliciet eentje aangegeven. Dat deed de wiskundige Weierstraß in de jaren 1860 wel. De somfunctie van de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

met $0 < b < 1$, a een oneven natuurlijk getal (groter dan 1) en waarbij $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, is nergens differentieerbaar.

▶ **7.15.** Opgave. Bewijs dat de nergens monotone functies een generieke deelverzameling van $C\bigl([0,1]\bigr)$ vormen. *Aanwijzing*: Tel de verzameling intervallen met rationale eindpunten af: Q_1, Q_2, Q_3, … Zij O_n de verzameling van de functies f waarvoor drie punten $x < y < z$ in Q_n te vinden zijn met $f(x) < f(y) > f(z)$ of $f(x) > f(y) < f(z)$. Elke O_n is dicht en open en als $f \in \bigcap_n O_n$ dan is f op geen enkel interval in $[0,1]$ monotoon.

Een topologische toepassing van de stelling van Baire is de volgende stelling van Sierpiński.

▶ **7.16.** Opgave. Als $\langle F_n \rangle_n$ een disjuncte rij gesloten verzamelingen in $[0,1]$ is dan geldt $[0,1] \neq \bigcup_n F_n$. Neem aan $[0,1] = \bigcup_n F_n$.

a) Er is een n met $F_n^\circ \neq \varnothing$.

b) Voor elk interval $[a,b]$ (met $a < b$) is er een n met $F_n^\circ \cap [a,b] \neq \varnothing$.

c) De vereniging $O = \bigcup_n F_n^\circ$ is dicht (en open) in $[0,1]$; zij $H = [0,1] \setminus O$.

d) Als $H = \varnothing$ dan is er een n zó dat $F_n = [0,1]$. *Aanwijzing*: Gebruik de samenhang om aan te tonen dat er maar één n kan zijn met $F_n^\circ \neq \varnothing$.

e) Als $H \neq \varnothing$ dan zijn er een open interval (a, b) en een n zó dat $\varnothing \neq (a, b) \cap H \subseteq F_n$. *Aanwijzing*: H is compact, pas de stelling van Baire toe op de verzamelingen $F_n \cap H$.

f) Er is een $m \neq n$ met $(a, b) \cap F_m^\circ \neq \varnothing$. *Aanwijzing*: Anders $(a, b) \subseteq F_n$, dus ...

g) $F_m \cap H \cap (a, b) \neq \varnothing$ en dus $F_m \cap F_n \neq \varnothing$.

Duidelijk is het volgende: als f een functie is zó dat $f^{(n)} = 0$ voor een bepaalde n, dan is f een polynoom (van graad $n - 1$ of minder), dus als $(\exists n)(\forall x) f^{(n)}(x) = 0$ dan is f een polynoom. Uit de volgende stelling blijkt dat het formeel (veel) zwakkere $(\forall x)(\exists n) f^{(n)}(x) = 0$ ook volstaat.

7.17. Stelling. *Zij $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ oneindig vaak differentieerbaar en zó dat voor elke x een n bestaat met $f^{(n)}(x) = 0$; dan is f een polynoom.*

▶ **7.18.** Opgave. Bewijs deze stelling.

Hoofdstuk 8

Samenhang

De in de cursus Metrische Topologie behandelde resultaten over samenhangende metrische ruimten, alsmede de bewijzen daarvan, zijn vrijwel ongewijzigd van toepassing op willekeurige topologische ruimten. We zullen de behandeling van samenhang dan ook beknopt houden.

8.1. Definitie. Laat A en B deelverzamelingen zijn van X. We zeggen dat A en B *gescheiden* zijn als $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$.

De formulering van samenhang is een negatieve; daarom definiëren we eerst een positief klinkende eigenschap (splitsbaarheid) en definiëren dan samenhang als de negatie daarvan.

8.2. Definitie. Een topologische ruimte X heet *splitsbaar* als er niet-lege gescheiden deelverzamelingen A en B van X zijn met $X = A \cup B$; we noemen het paar $\{A, B\}$ wel een *ontbinding* of een *splitsing* van X. Als X niet splitsbaar is dan noemen we X *samenhangend*.

De termen 'niet samenhangend', 'onsamenhangend' en 'splitsbaar' betekenen alle hetzelfde; we gebruiken ze daarom door elkaar.

We kunnen splitsbaarheid (en dus samenhang) op diverse manieren karakteriseren.

8.3. Propositie. *Voor een topologische ruimte X zijn equivalent:*

1. *X is splitsbaar.*
2. *Er zijn niet-lege disjuncte open deelverzamelingen A en B van X met $X = A \cup B$.*
3. *Er zijn niet-lege disjuncte gesloten deelverzamelingen A en B van X met $X = A \cup B$.*
4. *Er is een clopen deelverzameling C van X zó dat $C \neq \varnothing$ en $C \neq X$.*

Als we over samenhang spreken dan gebruiken we de negaties van de hierboven genoemde karakteriseringen van splitsbaarheid: "X is *niet* te schrijven als $A \cup B$ met A en B niet leeg en open" of "$\varnothing$ en X zijn de enige clopen deelverzamelingen van X".

8.4. Voorbeelden.

1. Een indiscrete ruimte is samenhangend.
2. Zij X een oneindige verzameling met de co-eindige topologie. Dan is X samenhangend, want alleen de eindige verzamelingen zijn gesloten.
3. Een discrete ruimte met meer dan één punt is onsamenhangend.
4. De Sorgenfrey-lijn is onsamenhangend: alle "spelden" (basis open verzamelingen) zijn clopen. Concreet: $\big\{(-\infty, 0), [0, \infty)\big\}$ is een splitsing van $\mathbb{S}$.
5. Uit de cursus Metrische Topologie is bekend dat de samenhangende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ precies de intervallen (orde-convexe verzamelingen) zijn.

Eigenschappen

We bekijken het gedrag van samenhang onder de diverse topologische operaties.

8.5. STELLING. *Zij $f : X \to Y$ een continue surjectie. Als X samenhangend is dan is ook Y samenhangend.*

BEWIJS. Als C clopen is in Y dan is $f^{-1}[C]$ clopen in X, dus als Y splitsbaar is dan is X het ook. □

In het bijzonder is samenhang dus een topologische eigenschap.

Net als bij compactheid is het voor deelruimten wel eens makkelijk om splitsbaarheid en samenhang met behulp van verzamelingen uit de grote ruimte te beschrijven.

8.6. PROPOSITIE. *Voor een deelruimte A van een ruimte X zijn equivalent:*

1. *A is splitsbaar.*
2. *er zijn open verzamelingen P en Q in X met $A \cap P \neq \varnothing \neq A \cap Q$, $A \subseteq P \cup Q$ en $A \cap P \cap Q = \varnothing$.*
3. *er zijn gesloten verzamelingen P en Q in X met $A \cap P \neq \varnothing \neq A \cap Q$, $A \subseteq P \cup Q$ en $A \cap P \cap Q = \varnothing$.*

De volgende stelling laat zien dat een ruimte die een samenhangende dichte deelverzameling bevat zelf samenhangend is.

8.7. STELLING. *Zij A een samenhangende deelruimte van de topologische ruimte X. Als $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ dan is B samenhangend.*

BEWIJS. We bewijzen dat A splitsbaar is als B het is.

Neem dus aan dat er open verzamelingen U en V in X zijn met $B \cap U \neq \varnothing \neq B \cap V$, $B \subseteq U \cup V$ en $B \cap U \cap V = \varnothing$. Dan geldt zeker dat $A \subseteq U \cup V$ en $A \cap U \cap V = \varnothing$. Omdat blijkbaar $\overline{A} \cap U \neq \varnothing$ volgt meteen dat $A \cap U \neq \varnothing$; evenzo geldt $A \cap V \neq \varnothing$. We zien dat A ook splitsbaar is. □

8.8. VOORBEELDEN.

1. Het Niemytzki-vlak is samenhangend. Immers, $\mathbb{R}^2$ is samenhangend (Metrische Topologie, of Voorbeeld 8.4.5 met Stelling 8.10) en homeomorf met de dichte deelruimte $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ van het Niemytzki-vlak.
2. Zij $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin \frac{1}{x}, 0 < x \leqslant 1\}$. Dan is A samenhangend als beeld van $(0, 1]$ onder de continue functie $\phi(x) = (x, \sin \frac{1}{x})$. Dus ook $X = \overline{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ is samenhangend. Deze deelruimte X van $\mathbb{R}^2$ heet wel de *(gesloten) topologische sinus* ("topologist's sine curve").

8.9. STELLING. *Zij A een samenhangende deelruimte van X, en $\{A_i\}_{i \in I}$ een familie samenhangende deelruimten van X zó dat A en A_i voor geen enkele $i \in I$ gescheiden zijn. Dan is $A \cup \bigcup_{i \in I} A_i$ samenhangend.*

BEWIJS. Zij C een clopen deelverzameling van $Y = A \cup \bigcup_{i \in I} A_i$ met $C \neq \varnothing$; we bewijzen dat $C = Y$.

Merk op: als $C \cap A \neq \varnothing$ dan $A \subseteq C$, en evenzo voor elke A_i, want $C \cap A$ is clopen in A.

Verder, als $C \cap A_i \neq \varnothing$ voor een i, en dus $A_i \subseteq C$, dan volgt $C \cap A \neq \varnothing$ (en dus $A \subseteq C$). Immers, als $\overline{A} \cap A_i \neq \varnothing$ dan volgt dit omdat C een omgeving van A_i is en als $A \cap \overline{A_i} \neq \varnothing$ dan het omdat $\overline{A_i} \subseteq C$.

We kunnen hoe dan ook aannemen dat $A \subseteq C$, maar dan volgt, als boven dat $A_i \subseteq C$ voor alle i en dus $C = Y$. □

8.10. STELLING. *Zij $\{X_i\}_{i\in I}$ een familie niet-lege topologische ruimten, en zij X de productruimte. Dan is X samenhangend dan en slechts dan als elke X_i samenhangend is.*

BEWIJS. Als X samenhangend is, dan is $p_i[X] = X_i$ samenhangend voor elke $i \in I$ wegens Stelling 8.5. Neem dus aan dat elke X_i samenhangend is.

Als Y en Z samenhangende ruimten zijn, en $z_0 \in Z$ is vast, dan is $Y \times Z = (Y \times \{z_0\}) \cup \bigcup_{y\in Y}(\{y\} \times Z)$ samenhangend op grond van Stelling 8.9. Met inductie volgt eenvoudig dat elk eindig product van samenhangende ruimten weer samenhangend is.

Kies nu voor elke $i \in I$ een vast punt $a_i \in X_i$ en definieer voor elke eindige deelverzameling J van I,

$$A_J = \{x \in X : x_i = a_i \text{ voor elke } i \in I \setminus J\}.$$

Omdat $A_J \simeq \prod_{i\in J} X_i$, een eindig product, is elke A_J samenhangend. Verder is $(a_i)_i \in A_J$ voor elke eindige $J \subseteq I$, dus $A = \bigcup\{A_J : J \subseteq I \text{ eindig}\}$ is samenhangend, weer op grond van Stelling 8.9. Maar A is dicht in X, en dus is X samenhangend wegens Stelling 8.7. □

Componenten

Een niet samenhangende ruimte kan best samenhangende deelverzamelingen hebben. Een zo groot mogelijke samenhangende deelverzameling noemen we een component.

8.11. DEFINITIE. Zij X een topologische ruimte.

(a) Een *component van X* is een maximale (met betrekking tot inclusie) samenhangende deelruimte van X.

(b) Als $x \in X$ dan is de *component van x* de component van X die x bevat.

Dus C is een component van X als C samenhangend is en voor geen enkele samenhangende deelruimte A van X geldt dat $C \subsetneq A$.

We moeten wel even laten zien dat (b) een zinnige definitie is.

8.12. PROPOSITIE. *Zij X een topologische ruimte, en $x \in X$. Dan is er een component C van X met $x \in C$.*

BEWIJS. Zij $C = \bigcup\{A : A \text{ is samenhangend en } x \in A\}$. Omdat $\{x\}$ samenhangend is, is C samenhangend wegens Stelling 8.9, en $x \in C$. Als nu $A \supseteq C$ samenhangend is dan $x \in A$, en dus per definitie $A \subseteq C$, dus $A = C$. □

8.13. PROPOSITIE. (a) *Als C_1 en C_2 componenten zijn van X dan is $C_1 = C_2$ of $C_1 \cap C_2 = \varnothing$.*

(b) *Elke component van X is gesloten.*

Bewijs. (a) Als $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$ dan is $C_1 \cup C_2$ samenhangend en dus zowel $C_1 \cup C_2 \subseteq C_1$ als $C_1 \cup C_2 \subseteq C_2$.

(b) Als C een component van X is dan is $\overline{C}$ een samenhangende deelruimte van X die C omvat (Stelling 8.7), dus $C = \overline{C}$ wegens maximaliteit van C. □

De componenten vormen dus een partitie van X.

8.14. Voorbeelden.

1. Als X samenhangend is dan is X de enige component van X.
2. In een discrete ruimte zijn de componenten de singletons.
3. In de Sorgenfrey-lijn zijn de componenten de singletons. Immers, als $x, y \in A$ en $x < y$ dan is $C = A \cap [y, \infty)$ een clopen deelverzameling van A, maar $\varnothing \neq C \neq A$. Dus A is niet samenhangend.

▶ **8.15.** Opgave. Bekijk de volgende deelverzameling van het vlak

$$F = \bigl\{(0,0),(1,0)\bigr\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigl([0,1] \times \{2^{-n}\}\bigr).$$

(Maak een plaatje.) Bepaal alle componenten van F.

Twee variaties op splitsbaarheid

Ruimten kunnen erg of minder erg onsamenhangend zijn.

We noemen een ruimte X *totaal onsamenhangend* als voor elk tweetal verschillende punten x en y in X er een clopen verzameling C is met $x \in C$ en $y \notin C$. De Sorgenfrey-lijn is totaal onsamenhangend, zie Voorbeeld 8.4.4 net als $\mathbb{Q}$, $\mathbb{P}$ en de Cantorverzameling. De verzameling F uit Opgave 8.15 is onsamenhangend maar zeker niet totaal onsamenhangend.

In een totaal onsamenhangende ruimte bestaan alle componenten uit één punt; een ruimte met die eigenschap heet *erfelijk onsamenhangend*. Niet elke erfelijk onsamenhangende ruimte is totaal onsamenhangend, zie Opgave 8.32. Dat dit in de lijn der verwachting ligt blijkt uit de volgende opgave.

▶ **8.16.** Opgave. Toon aan dat elke clopen verzameling in de ruimte F uit Opgave 8.15 die $(0,0)$ bevat ook het punt $(1,0)$ bevat.

Wegsamenhang

8.17. Definitie. Een topologische ruimte heet *wegsamenhangend* als voor elke $x, y \in X$ een continue functie $f : [0,1] \to X$ bestaat zó dat $f(0) = x$ en $f(1) = y$.

Een functie als in deze definitie heet een *weg* of *pad* van x naar y.

8.18. Stelling. *Een wegsamenhangende ruimte is samenhangend.*

Bewijs. Als $X = \varnothing$ dan is de stelling zeker waar, dus zij $p \in X$ vast. Kies voor elke $x \in X$ een weg f_x van p naar x. Op grond van Stelling 8.5 is elke $f_x[0,1]$ samenhangend. Omdat $p \in f_x[0,1]$ voor elke $x \in X$ is dan $X = \bigcup_{x \in x} f_x[0,1]$ samenhangend op grond van Stelling 8.9. □

8.19. VOORBEELD. Zij X de ruimte uit Voorbeeld 8.8.2. Dan is X samenhangend, maar niet wegsamenhangend. Immers, stel dat f een weg is van $(0,0)$ naar $(\frac{1}{\pi},0)$. Zij $f_1 = p_1 \circ f$ en $f_2 = p_2 \circ f$, dan zijn $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ en $f_2 : [0,1] \to [-1,1]$ continu. Zij $a = \inf\{x : f_1(x) \neq 0\}$, en merk op dat $a < 1$ en $f_1(a) = 0$ wegens continuïteit van f_1. Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er een $z \in (a, a+\varepsilon)$ zó dat $f_1(z) > 0$, en omdat $f_1[a,z]$ samenhangend is bestaan er dan ook een $n \in \mathbb{N}$ en $x, y \in (a,z)$ met $f_1(x) = x_n = (2n\pi + \frac{1}{2}\pi)^{-1}$ en $f_1(y) = y_n = (2n\pi - \frac{1}{2}\pi)^{-1}$. Maar dan $f_2(x) = 1$ en $f_2(y) = -1$. Omdat ε willekeurig was zien we dat f_2 in elke omgeving van a zowel de waarde 1 als de waarde -1 aanneemt, in tegenspraak met de continuïteit van f_2.

Lokale samenhang

8.20. DEFINITIE. Een topologische ruimte X heet *lokaal samenhangend* als voor elke $x \in X$ en elke omgeving U van x een samenhangende omgeving V van x bestaat zó dat $V \subseteq U$.

8.21. STELLING. *X is lokaal samenhangend dan en slechts dan als voor elke open deelruimte O geldt dat de componenten van O open zijn (in O of, equivalent, in X).*

BEWIJS. Zij eerst X lokaal samenhangend, zij O open in X, en zij C een component van O. Als $x \in C$ dan is O een omgeving van x en dus is er een samenhangende omgeving V van x met $V \subseteq O$. Maar dan $x \in V \subseteq C$ omdat C maximaal samenhangend is in O. Dus $x \in \operatorname{Int} C$.

Omgekeerd, neem aan dat componenten van open deelruimten open zijn. Als dan U een omgeving is van x dan is de component V van $\operatorname{Int} U$ die x bevat een samenhangende omgeving van x met $V \subseteq U$. $\square$

Merk op dat dus in het bijzonder de componenten van X zelf open zijn als X lokaal samenhangend is.

8.22. VOORBEELDEN.

1. Een discrete ruimte met meer dan één punt is lokaal samenhangend maar niet samenhangend.
2. Zij X de deelruimte $\big([0,1] \times \{0\}\big) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]) \cup \big(\{0\} \times [0,1]\big)$ van $\mathbb{R}^2$ (maak een plaatje). Dan is X wegsamenhangend (ga na) en dus samenhangend, maar niet lokaal samenhangend. Immers, zij $O = \{(x,y) \in X : y > 0\}$, dan is O open in X, en de componenten van O zijn $C = \{0\} \times (0,1]$ en $\{\frac{1}{n}\} \times (0,1]$, $(n \in \mathbb{N})$. De component C is niet open in X.

De Waaier van Knaster en Kuratowski

Zij C de gewone Cantorverzameling in het interval $[0,1]$, opgevat als liggend in $\mathbb{R}^2$ en $t = (\frac{1}{2}, 1)$. Voor $x \in C$ is L_x het rechte lijnstuk van t naar $(x,0)$ (inclusief $(x,0)$ exclusief t).

► **8.23.** OPGAVE. Toon aan dat $T = \{t\} \cup \bigcup_{x \in C} L_x$ samenhangend is. De ruimte T wordt wel de Cantor-tent genoemd.

▶ **8.24.** Opgave. Toon aan dat de deelruimte $T \setminus \{t\}$ niet samenhangend is en dat L_x de component van $(x, 0)$ in deze deelruimte is.

▶ **8.25.** Opgave. Toon aan dat T niet lokaal samenhangend is.

Voor $x \in C$ kiezen we een deelverzameling M_x van L_x als volgt. Als x een eindpunt van een weggelaten interval is $(0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \ldots)$ dan $M_x = \bigl\{(u, v) \in L_x : v \text{ is rationaal}\bigr\}$. Voor alle andere punten van C nemen we net het complement: $M_x = \bigl\{(u, v) \in L_x : v \text{ is irrationaal}\bigr\}$.

De ruimte $W = \{t\} \cup \bigcup_{x \in C} M_x$ is de Waaier van Knaster en Kuratowski. We bewijzen dat W samenhangend is. Hiertoe nemen we een clopen verzameling O met $t \in O$ en bewijzen dat deze gelijk is aan W.

▶ **8.26.** Opgave. Toon aan dat $W \cap \overline{O} \cap \overline{W \setminus O} = \varnothing$ (afsluiting in $\mathbb{R}^2$).

Voor elke x zij q_x het infimum van alle q waarvoor geldt $\bigl\{(u, v) \in M_x : q < v < 1\bigr\} \subseteq O$. Van nu af aan bedoelen we met (x, s) het punt op L_x waarvan de y-coördinaat gelijk is aan s.

▶ **8.27.** Opgave. Toon aan: $(x, q_x) \in \overline{O}$ en als $q_x > 0$ dan $(x, q_x) \in \overline{W \setminus O}$ (afsluiting in $\mathbb{R}^2$).

▶ **8.28.** Opgave. Als $O \neq W$ dan is er een interval (a, b) in $[0, 1]$ zó dat $q_x > 0$ voor alle $x \in C \cap (a, b)$. *Hint.* Als $p \notin O$ dan is er een bol om p die disjunct is van O; projecteer die bol vanuit t op $[0, 1]$.

▶ **8.29.** Opgave. Als x een eindpunt is dan geldt $q_x \notin \mathbb{Q}$; als x geen eindpunt is dan $q_x \in \mathbb{Q}$

Uit de Categoriestelling van Baire (Stelling 7.9) volgt dat er een vaste $q \in \mathbb{Q}$ is en een interval (c, d) binnen (a, b) zó dat $R = \{x : q_x = q\}$ dicht ligt in $C \cap (c, d)$.

▶ **8.30.** Opgave. In $\mathbb{R}^2$ geldt: $\bigl\{(x, q) : x \in R\bigr\} \subseteq \overline{O} \cap \overline{W \setminus O}$.

▶ **8.31.** Opgave. Als $x \in C \cap (c, d)$ dan $(x, q) \in \overline{O} \cap \overline{W \setminus O}$; neem nu een eindpunt x dat in (c, d) ligt en vind een tegenspraak.

▶ **8.32.** Opgave. De deelruimte $W \setminus \{t\}$ van W is erfelijk onsamenhangend maar niet totaal onsamenhangend.

Vraagstukken

▶ **8.1.** Vraagstuk. Zij X samenhangend en Y een samenhangende deelverzameling van X zó dat $X \setminus Y = A \cup B$ met A en B gescheiden. Toon aan dat $Y \cup A$ en $Y \cup B$ samenhangend zijn.

▶ **8.2.** Vraagstuk. Toon aan dat $\mathbb{R}^2 \setminus \{*\}$ samenhangend is; hier stelt $*$ een willekeurig punt van $\mathbb{R}^2$ voor.

▶ **8.3.** Vraagstuk. Bewijs dat $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ niet homeomorf zijn.

▶ **8.4.** Vraagstuk. Bewijs dat $\mathbb{R}^2 \setminus A$ samenhangend is; hierbij stelt A één of andere aftelbare deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ voor.

▶ **8.5.** VRAAGSTUK.

a) Toon aan: als $\langle F_n \rangle_n$ een dalende rij niet-lege gesloten verzamelingen in een compacte ruimte X is en U een omgeving van $\bigcap_n F_n$ dan is er een n met $F_n \subseteq U$.

b) Toon aan: als $\langle F_n \rangle_n$ een dalende rij niet-lege gesloten samenhangende verzamelingen in een compacte Hausdorff ruimte X is dan is $\bigcap_n F_n$ samenhangend.

c) Geef een voorbeeld van een dalende rij $\langle G_n \rangle_n$ gesloten samenhangende verzamelingen in $\mathbb{R}^2$ zó dat $\bigcap_n G_n$ niet samenhangend is.

▶ **8.6.** VRAAGSTUK. Een topologische ruimte X heet *extreem onsamenhangend* als de afsluiting van elke open deelverzameling van X open is. Elke discrete ruimte is uiteraard extreem onsamenhangend. [Er zijn ook andere extreem onsamenhangende ruimten.] Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

a. X is extreem onsamenhangend.

b. Elke dichte deelverzameling van X is extreem onsamenhangend (in de relatieve topologie).

c. Elke open deelverzameling van X is extreem onsamenhangend.

d. Als U en V open deelverzamelingen zijn van X dan geldt:
$$\overline{U} \cap \overline{V} = \overline{U \cap V}.$$

e. Als U en V *disjuncte* open deelverzamelingen zijn van X dan geldt:
$$\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing.$$

▶ **8.7.** VRAAGSTUK.

a) Geef een voorbeeld van een extreem onsamenhangende ruimte die samenhangend is.

b) Toon aan dat een extreem onsamenhangende Hausdorff ruimte totaal onsamenhangend is.

c) Toon aan dat een extreem onsamenhangende, reguliere, $\mathrm{C_I}$-ruimte discreet is.
Aanwijzing: Stel x is niet geïsoleerd. Maak een aftelbare lokale basis $\{U_n\}_n$ in x zó dat $U_n \setminus \overline{U_{n+1}} \neq \varnothing$. Bekijk $U = \bigcup_n U_{2n} \setminus \overline{U_{2n+1}}$.

▶ **8.8.** VRAAGSTUK. Zij X een geordende verzameling voorzien van de orde-topologie. Een *sprong* in X is een tweetal punten a en b met $a < b$ en $(a, b) = \varnothing$. We noemen X *zwak volledig* als elke niet-lege naar boven begrensde deelverzameling een supremum heeft.

a) Toon aan: X is samenhangend dan en slechts dan als X zwak volledig is en geen sprongen heeft.

b) Toon aan dat een samenhangende geordende ruimte lokaal compact is.

▶ **8.9.** VRAAGSTUK.

a) Bewijs dat een aftelbare reguliere ruimte normaal is.

b) Bewijs dat een aftelbare reguliere ruimte niet samenhangend is.

▶ **8.10.** VRAAGSTUK. Definieer een topologie op $X = \{(p, q) \in \mathbb{Q}^2 : q \geqslant 0\}$, met behulp van locale bases, als volgt: $\mathcal{B}_{(p,q)} = \{B(p, q, n) : n \in \mathbb{N}\}$, waarbij $B(p, q, n)$ gelijk is aan

- $(p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}) \times \{0\}$ (intervalletje op de x-as) als $q = 0$;

- de vereniging van $\{(p,q)\}$ en de intervalletjes $(p - q\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{n}, p - q\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{n}) \times \{0\}$ en $(p + q\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{n}, p + q\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{n}) \times \{0\}$ op de x-as als $q > 0$.

(Teken een plaatje.)

a) Toon aan dat zo een geldige toekenning van lokale bases is gedaan.

b) Toon aan dat X Hausdorff is.

c) Toon aan dat X samenhangend is. *Aanwijzing*: Toon aan dat altijd $\overline{B(p,q,n)} \cap \overline{B(r,s,m)} \neq \varnothing$.

Hoofdstuk 9

Paracompactheid en metrizeerbaarheid

Dit laatste hoofdstuk behandelt een eigenschap — paracompactheid — die aan compact verwant is in die zin dat deze in termen van overdekkingen en eindigheid is geformuleerd. Hoewel er veel overeenkomsten zijn, elke paracompacte Hausdorff ruimte is bijvoorbeeld normaal, zijn er ook verschillen. Zo is elke metrische ruimte paracompact. Paracompactheid is ook een cruciaal ingrediënt bij metrizeringsstellingen.

Overdekkingen en verfijningen

9.1. DEFINITIE. Zij $\mathcal{O}$ een overdekking van X. Een overdekking $\mathcal{V}$ van X heet een *verfijning* van $\mathcal{O}$ (notatie $\mathcal{V} \prec \mathcal{O}$) als bij iedere $V \in \mathcal{V}$ een $U \in \mathcal{O}$ bestaat met $V \subseteq U$. $\mathcal{V}$ heet een *open (gesloten) verfijning* als $\mathcal{V}$ uit open (gesloten) verzamelingen bestaat.

9.2. DEFINITIE. Zij $\mathcal{A}$ een familie deelverzamelingen van X.

(a) $\mathcal{A}$ heet *lokaal eindig* als voor elke $x \in X$ een omgeving U van x bestaat zó dat $\{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \varnothing\}$ eindig is.

(b) $\mathcal{A}$ heet *discreet* als voor elke $x \in X$ een omgeving U van x bestaat zó dat $\{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \varnothing\}$ ten hoogste één element heeft.

(c) $\mathcal{A}$ heet *σ-lokaal eindig* als $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$, waarbij iedere $\mathcal{A}_n$ lokaal eindig is.

(d) $\mathcal{A}$ heet *σ-discreet* als $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$, waarbij iedere $\mathcal{A}_n$ discreet is.

▶ **9.3.** OPGAVE.

a) Een discrete familie bestaat uit paarsgewijs disjuncte verzamelingen.

b) Een (σ-)discrete familie is (σ-)lokaal eindig.

▶ **9.4.** OPGAVE. Zij $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ lokaal eindig. Dan geldt $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$.

Paracompactheid

We kunnen nu de volgende belangrijke overdekkingseigenschap definiëren:

9.5. DEFINITIE. Een ruimte heet *paracompact* als elke open overdekking een lokaal eindige open verfijning heeft.

9.6. VOORBEELDEN.

1. Elke compacte ruimte is paracompact: een deeloverdekking is een verfijning.
2. Elke discrete ruimte is paracompact: de familie van singletons verfijnt elke overdekking.

Het eerste voorbeeld laat zien dat een paracompacte ruimte niet noodzakelijk aan enig scheidingsaxioma voldoet. Echter, als een paracompacte ruimte Hausdorff is, dan is deze ook meteen normaal.

9.7. STELLING. *Elke paracompacte Hausdorff ruimte is normaal.*

BEWIJS. Omdat X Hausdorff is, is X zeker T_1, dus het volstaat te bewijzen dat X normaal is. Laat dus A en B gesloten disjuncte deelverzamelingen van X zijn.

Zij $a \in A$ vast. Kies nu voor elke $b \in B$ disjuncte open U_b en V_b met $a \in U_b$ en $b \in V_b$. Dan is $\{V_b : b \in B\} \cup \{X \setminus B\}$ een open overdekking van X, en dus bestaat er een lokaal eindige open verfijning $\mathcal{Z}'$. Zij $\mathcal{Z} = \{Z \in \mathcal{Z}' : Z \cap B \neq \varnothing\}$, dan is $\mathcal{Z}$ een lokaal eindige familie, en $B \subseteq Z_a = \bigcup \mathcal{Z}$. Als nu $Z \in \mathcal{Z}$ dan $Z \subseteq V_b$ voor zekere $b \in B$. Omdat $U_b \cap V_b = \varnothing$ is $a \notin \overline{V_b} \supseteq \overline{Z}$. Maar dan is $a \notin \overline{Z_a} = \bigcup \{\overline{Z} : Z \in \mathcal{Z}\}$ wegens Opgave 9.4. Definieer $W_a = X \setminus \overline{Z_a}$, dan $a \in W_a$, $B \subseteq Z_a$ en $W_a \cap Z_a = \varnothing$.

Zij nu $\mathcal{W}'$ een open lokaal eindige verfijning van $\{W_a : a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$, en zij $\mathcal{W} = \{W \in \mathcal{W}' : W \cap A \neq \varnothing\}$. Net als hiervoor is dan $A \subseteq U = \bigcup \mathcal{W} \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus B$. Dus X is normaal. $\square$

Een onmiddellijk gevolg van deze stelling is dat een product van paracompacte ruimten niet noodzakelijk paracompact is (Voorbeeld 5.33), en dat niet elke deelruimte van een paracompacte ruimte paracompact is (Voorbeeld 5.31).

Paracompactheid is wel gesloten-erfelijk:

9.8. STELLING. *Zij X een paracompacte ruimte, en A een gesloten deelruimte van X. Dan is A weer paracompact.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{O}$ een open overdekking van A. Kies voor elke $U \in \mathcal{O}$ een open deelverzameling U' van X met $U' \cap A = U$, dan is $\mathcal{O}' = \{U' : U \in \mathcal{O}\} \cup \{X \setminus A\}$ een open overdekking van X. Zij $\mathcal{V}$ een lokaal eindige open verfijning van $\mathcal{O}'$, dan is $\{V \cap A : V \in \mathcal{V}\}$ een open lokaal eindige verfijning van $\mathcal{O}$. $\square$

9.9. STELLING. *Elke reguliere Lindelöf ruimte is paracompact.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{O}$ een open overdekking van X. Kies voor elke $x \in X$ een $U(x) \in \mathcal{O}$ en een open $V(x)$ zó dat $x \in V(x) \subseteq \overline{V(x)} \subseteq U(x)$ en zij $\{V(x_i) : i \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare deeloverdekking van $\{V(x) : x \in X\}$. Definieer nu $W_i = U(x_i) \setminus \bigcup_{j<i} \overline{V(x_j)}$, dan is $\mathcal{W} = \{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ een lokaal eindige open verfijning van $\mathcal{O}$. Immers, als $x \in X$ en $i = \min\{j \in \mathbb{N} : x \in U(x_j)\}$ dan $x \in W_i$, dus $\mathcal{W}$ overdekt X, en het is evident dat de elementen van $\mathcal{W}$ open zijn. Verder geldt $W_i \subseteq U(x_i)$ dus $\mathcal{W} \prec \mathcal{O}$. Tenslotte is $\mathcal{W}$ lokaal eindig: als $x \in X$ en $j \in \mathbb{N}$ is zó dat $x \in V(x_j)$ dan is $V(x_j)$ een omgeving van x en $V(x_j) \cap W_i = \varnothing$ voor alle $i > j$. $\square$

9.10. VOORBEELD. Een overaftelbare discrete ruimte is paracompact maar niet Lindelöf.

Paracompactheid in metrische ruimten

De volgende beroemde stelling werd in 1948 bewezen door A. H. Stone. Het bewijs dat we geven is afkomstig uit een artikel van M. E. Rudin.

9.11. STELLING. *Zij $\mathcal{O}$ een open overdekking van de metrische ruimte (X, d). Dan heeft $\mathcal{O}$ een lokaal eindige, σ-discrete open verfijning. Elke metrische ruimte is dus paracompact.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{O} = \{U_s : s \in S\}$, en zij $<$ een welordening van S (Welordeningsstelling). Definieer voor elke $n \in \mathbb{N}$ een collectie $\mathcal{V}_n = \{V_{s,n}\}_{s \in S}$ van open deelverzamelingen van X door

$$V_{s,n} = \bigcup \{B(x, 2^{-n}) : (x, s, n) \text{ voldoet aan (1), (2) en (3)}\},$$

waarbij

(1) $s = \min\{t \in S : x \in U_t\}$;
(2) $x \notin \bigcup\{V_{t,i} : t \in S, i < n\}$; en
(3) $B(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_s$.

Zij $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, dan is $\mathcal{V}$ de gewenste verfijning.

Bewering: $\mathcal{V}$ is een verfijning van $\mathcal{O}$. Zij $x \in X$, en zij $s = \min\{t \in S : x \in U_t\}$. Kies $n \in \mathbb{N}$ zó dat $B(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_s$. Dan is of $x \in \bigcup\{V_{t,i} : t \in S, i < n\}$, of anders $x \in V_{s,n}$. Dus $\mathcal{V}$ is een overdekking van X. Uit (3) volgt onmiddellijk dat $V_{s,n} \subseteq U_s$.

Bewering: Elke $\mathcal{V}_n$ is discreet. We bewijzen dat voor elke $x \in X$ de bol $B(x, 2^{-(n+1)})$ ten hoogste één $V_{s,n}$ snijdt. Immers, stel $x_1 \in V_{s,n}$ en $x_2 \in V_{t,n}$ met $s < t$ en kies y_1 en y_2 zó dat (y_1, s, n) en (y_2, t, n) aan (1), (2) en (3) voldoen, en $x_1 \in B(y_1, 2^{-n})$ en $x_2 \in B(y_2, 2^{-n})$.

Dan geldt $y_2 \notin U_s$ en $B(y_1, 3 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_s$, en dus $d(y_1, y_2) \geqslant 3 \cdot 2^{-n}$. Uit de driehoeksongelijkheid volgt nu dat $d(x_1, x_2) \geqslant 2^{-n}$; x_1 en x_2 kunnen dus niet beide in $B(x, 2^{-(n+1)})$ zitten.

Bewering: $\mathcal{V}$ is lokaal eindig: Zij $x \in X$, en kies $k, n \in \mathbb{N}$ en $s \in S$ zó dat $B(x, 2^{-k}) \subseteq V_{s,n}$ ($\mathcal{V}$ is een open overdekking). We laten zien dat $B(x, 2^{-n-k}) \cap V_{t,i} = \varnothing$ voor elke $t \in S$ en elke $i \geqslant n + k$. Samen met de voorgaande bewering volgt dan dat $B(x, 2^{-(n+k)})$ een omgeving is van x die ten hoogste $n + k - 1$ veel elementen van $\mathcal{V}$ snijdt. Stel maar dat $y \in B(x, 2^{-(n+k)}) \cap V_{t,i}$ voor zekere $t \in S$ en $i \geqslant n + k$. Dan is er een $z \in X$ zó dat (z, t, i) aan (1), (2) en (3) voldoet, en $y \in B(z, 2^{-i})$. Dan is $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < 2^{-n-k} + 2^{-i} \leqslant 2^{1-n-k} \leqslant 2^{-k}$. Anderzijds is $n < n + k \leqslant i$ dus $z \notin V_{s,n}$ wegens (2), dus $z \notin B(x, 2^{-k})$, een tegenspraak. □

In combinatie met de Stellingen 0.11 en 9.11 geeft de volgende stelling de reeds in Hoofdstuk 0 aangekondigde generalisatie van Stellingen 0.10 en 0.14.

9.12. STELLING. *Elke aftelbaar compacte paracompacte ruimte is compact.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{O}$ een open overdekking van X, en zij $\mathcal{V}$ een open lokaal eindige verfijning van $\mathcal{O}$. We laten zien dat $\mathcal{V}$ eindig is.

Neem aan dat $\mathcal{V} \supseteq \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ waarbij $V_n \neq V_m$ als $n \neq m$. Definieer $W_n = X \setminus \overline{\bigcup_{k \geqslant n} V_k}$ ($n \in \mathbb{N}$), en $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dan is elke W_n open, en $\mathcal{W}$ overdekt X: immers, als $x \in X$, en U is een omgeving van x zó dat $\{V \in \mathcal{V} : U \cap V \neq \varnothing\}$ eindig is, dan is er een $n \in \mathbb{N}$ met $U \cap \bigcup_{k \geqslant n} V_k = \varnothing$ en dus $x \notin \overline{\bigcup_{k \geqslant n} V_k}$. Omdat $\bigcup_{k \geqslant n} V_k \neq \varnothing$ is $W_n \neq X$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, dus omdat $W_n \subseteq W_{n+1}$ heeft $\mathcal{W}$ geen eindige deeloverdekking, in tegenspraak met aftelbaar compactheid van X.

Dus $\mathcal{V}$ is eindig. Kies nu voor elke $V \in \mathcal{V}$ een $U_V \in \mathcal{O}$ met $V \subseteq U_V$, dan is $\{U_V : V \in \mathcal{V}\}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{O}$. □

9.13. VOORBEELD. $W(\omega_1)$ is aftelbaar compact, maar niet compact en dus niet paracompact.

► **9.14.** Opgave. De Sorgenfrey-lijn is regulier en Lindelöf en dus paracompact. Toon aan dat elke open overdekking van $\mathbb{S}$ zelfs een *disjuncte* open verfijning heeft.

Metrizeerbaarheid

We keren nu terug naar het onderwerp waarmee we deze syllabus ook begonnen zijn: metrische ruimten. De uitspraak “X is een metrische ruimte” is geen topologische uitspraak: als X homeomorf is met Y wil dat nog niet zeggen dat ook op Y een metriek gedefinieerd is! Daarom is voor de topologie niet zozeer van belang of op een *verzameling* een metriek gedefinieerd *is*, maar of op een *topologische ruimte* een metriek gedefinieerd *kan worden* die bovendien *de gegeven topologie voortbrengt*.

9.15. Definitie. Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ heet *metrizeerbaar* als op X een metriek d gedefinieerd kan worden zó dat $\mathcal{T}$ precies de door d geïnduceerde topologie is.

Metrizeerbaarheid nu is een topologische eigenschap (opgave), maar topologisch gezien is de definitie van het begrip enigszins onbevredigend: er is referentie aan een ‘extern object’, namelijk een functie naar $\mathbb{R}$ (de metriek). Dit leidt tot de vraag naar nodige en voldoende voorwaarden voor het bestaan van dit object *rechtstreeks in termen van de open verzamelingen van de ruimte*. Een stelling deze zulke voorwaarden geeft heet een *metrizeringsstelling*. De twee belangrijkste (vrijwel gelijkluidende) metrizeringsstellingen werden in 1950/1951 bewezen door J. I. Nagata, Yu. M. Smirnov en R. H. Bing.

9.16. Stelling van Nagata-Smirnov. *Een topologische ruimte X is metrizeerbaar dan en slechts dan als X een reguliere ruimte met een σ-lokaal eindige is.*

9.17. Stelling van Bing. *Een topologische ruimte X is metrizeerbaar dan en slechts dan als X een reguliere ruimte met een σ-discrete basis is.*

We zullen deze stellingen tegelijk bewijzen door te laten zien dat een metrische (metrizeerbare) ruimte een σ-discrete basis heeft, en dat een T_3-ruimte met een σ-lokaal eindige basis metrizeerbaar is. We doen dit met behulp van een serie lemmas.

9.18. Lemma. *Elke metrische ruimte heeft een σ-discrete basis.*

Bewijs. Voor $n \in \mathbb{N}$ zij $\mathcal{O}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$. Volgens Stelling 9.11 heeft $\mathcal{O}_n$ een σ-discrete verfijning $\mathcal{B}_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_n^i$ met elke $\mathcal{B}_n^i$ discreet. Dan is $\mathcal{B} = \bigcup_{i,n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n^i$ ook σ-discreet, en een basis voor X. Immers, zij $x \in X$ en O open met $x \in O$. Dan is er $n \in \mathbb{N}$ met $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq O$. Kies nu een $B \in \mathcal{B}_{2n}$ met $x \in B$. Omdat $\mathcal{B}_n < \mathcal{O}_n$ is er dan een $y \in X$ zó dat $B \subseteq B(y, \frac{1}{2n})$. Maar dan is $x \in B \subseteq B(y, \frac{1}{2n}) \subseteq B(x, \frac{1}{n}) \subseteq O$. □

9.19. Lemma. *Elke reguliere ruimte met een σ-lokaal eindige basis is normaal.*

Bewijs. Zij $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ een basis voor X met elke $\mathcal{B}_n$ lokaal eindig. Laat A_1 en A_2 gesloten disjuncte deelverzamelingen zijn van X. Kies voor elke $x \in A_1$ een $B_x \in \mathcal{B}$ met $x \in B_x \subseteq \overline{B_x} \subseteq X \setminus A_2$, en voor elke $x \in A_2$ een $B_x \in \mathcal{B}$ met $x \in B_x \subseteq \overline{B_x} \subseteq X \setminus A_1$, en definieer voor elke $n \in \mathbb{N}$ open verzamelingen G_n en H_n:

$$G_n = \bigcup\{B_x \in \mathcal{B}_n : x \in A_1\} \text{ en } H_n = \bigcup\{B_x \in \mathcal{B}_n : x \in A_2\}.$$

Merk op dat $A_1 \subseteq \bigcup_{x\in A_1} B_x = \bigcup_n G_n$ en, evenzo, $A_2 \subseteq \bigcup_n H_n$. Verder geldt, omdat de families $\mathcal{B}_n$ discreet zijn, dat $\overline{G_n} = \bigcup\{\overline{B_x} : B_x \in \mathcal{B}_n, x \in A_1\}$ disjunct is van A_2 en, evenzo, $\overline{H_n} \cap A_1 = \varnothing$.

Definieer nu $U_n = G_n \setminus \bigcup_{i\leqslant n} \overline{H_i}$ en $V_n = H_n \setminus \bigcup_{i\leqslant n} \overline{G_i}$ voor elke n. Dan geldt (nog steeds) $A_1 \subseteq U = \bigcup_n U_n$ en $A_2 \subseteq V = \bigcup_n V_n$. Verder zijn U en V disjunct want als $m \leqslant n$ dan $U_m \cap V_n \subseteq G_m \cap V_n = \varnothing$; als $m > n$ dan wisselen de rollen om. □

In het bewijs zullen we pseudometrieken nodig hebben; dat zijn 'metrieken' waar verschillende punten toch afstand nul kunnen hebben.

9.20. DEFINITIE. Een functie $d : X \times X \to [0,\infty)$ heet een *pseudometriek op X* als voor elke $x, y, z \in X$ geldt dat

$d(x,x) = 0$;
$d(x,y) = d(y,x)$;
$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

9.21. LEMMA. *Zij X een* T_1*-ruimte, en zij $\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ een familie pseudometrieken op X waarvoor geldt:*

(i) $d_n(x,y) \leqslant 1$ voor elke $x,y \in X$ en elke $n \in \mathbb{N}$;
(ii) $d_n : X \times X \to \mathbb{R}$ is continu voor elke $n \in \mathbb{N}$;
(iii) voor elke $x \in X$ en elke niet-lege gesloten deelverzameling A van X met $x \notin A$ bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zó dat $d_n(x,A) > 0$.

Dan is X metrizeerbaar.

BEWIJS. Definieer $d : X \times X \to \mathbb{R}$ door

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x,y), \quad x, y \in X.$$

Dan is $d(x,y) \in [0,\infty)$ op grond van (i), en het is eenvoudig na te gaan dat d een pseudometriek is omdat elke d_n een pseudometriek is. Zij $x \neq y$. Omdat X een T_1-ruimte is, is $\{y\}$ gesloten, en $x \notin \{y\}$, dus wegens (iii) bestaat een $n \in \mathbb{N}$ met $d_n(x,y) > 0$. Maar dan $d(x,y) \geqslant 2^{-n} d_n(x,y) > 0$, dus d is zelfs een metriek. We moeten nu nog laten zien dat d de topologie van X induceert.

Zij eerst O open in X, en $x \in O$. Dan is $A = X \setminus O$ gesloten en $x \notin A$, dus uit (iii) volgt dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat $r = d_n(x,A) > 0$. Dan geldt voor elke $y \in A$ dat $d(x,y) \geqslant r \cdot 2^{-n}$ en dus $B(x, r\cdot 2^{-n}) \subseteq O$. Elke open verzameling van X is dus open in de door d geïnduceerde metriek.

We bewijzen tenslotte dat elke verzameling die open is in de door d geïnduceerde topologie ook open is in de topologie van X. Zij $\varepsilon > 0$, en zij $A = X \setminus B(x,\varepsilon)$. Wegens Propositie 2.3(a) is het voldoende te bewijzen dat A gesloten is in X. Definieer $f : X \to \mathbb{R}$ door $f(y) = d(y,A)$ $(y \in X)$. Dan is f continu. Immers, op grond van (ii) is elke d_n continu, en dus is met Stelling 3.23 ook d continu daar $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n$ uniform convergent is. Continuïteit van f volgt nu onmiddellijk uit de ongelijkheid $\bigl|d(y_1,A) - d(y_2,A)\bigr| \leqslant d(y_1,y_2)$ $(y_1, y_2 \in X)$. Omdat f continu is geldt wegens Propositie 3.7(v) dat $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$. Zij $y \in \overline{A}$. Omdat $f(a) = 0$ voor elke $a \in A$ is dan $f(y) \in \overline{\{0\}} = \{0\}$, dus $d(y,A) = 0$. Maar $d(y,A) \geqslant d(x,A) - d(x,y) \geqslant \varepsilon - d(x,y)$ zodat $d(x,y) \geqslant \varepsilon$ dus $y \in A$. □

BEWIJS VAN STELLING 9.16 EN STELLING 9.17: Een metrizeerbare ruimte is T_3 (Voorbeelden 5.6(a) en 5.24(a)) en heeft een σ-discrete basis (Lemma 9.18) en dus een σ-lokaal eindige basis (Propositie 9.3(b)). We zullen bewijzen dat in een T_3-ruimte met een σ-lokaal eindige basis een familie pseudometrieken als in Lemma 9.21 bestaat.

Zij $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_i : i \in \mathbb{N}\}$ een basis voor X, met elke $\mathcal{B}_i$ lokaal eindig. Zij $i, k \in \mathbb{N}$ vast. We zullen een $g_{i,k} : X \times X \to \mathbb{R}$ definiëren zó dat $d_{i,k} = \min\{1, g_{i,k}\}$ aan de eisen van het lemma voldoet. Zij $U \in \mathcal{B}_i$, en definieer $V_U = \bigcup\{B \in \mathcal{B}_k : \overline{B} \subseteq U\}$. Dan is $\overline{V_U} \subseteq U$ omdat $\mathcal{B}_k$ lokaal eindig is (Propositie 9.4). Omdat X normaal is (Lemma 9.19) vinden we uit het Lemma van Urysohn een continue functie $f_U : X \to [0,1]$ met $f_U[X \setminus U] \subseteq \{0\}$ en $f_U[\overline{V_U}] \subseteq \{1\}$. Definieer

$$g_{i,k}(x,y) = \sum_{U \in \mathcal{B}_i} \left|f_U(x) - f_U(y)\right|, \quad x, y \in X.$$

We moeten eerst laten zien dat $g_{i,k}$ welgedefinieerd is, immers er is op het eerste gezicht sprake van een oneindige som. Kies voor elke $z \in X$ een open omgeving $O(z)$ van z en een eindige $\mathcal{B}(z) \subseteq \mathcal{B}_i$ zó dat voor elke $U \in \mathcal{B}_i \setminus \mathcal{B}(z)$ geldt dat $U \cap O(z) = \varnothing$, en dus $O(z) \subseteq X \setminus U$. Dan is $f_U(a) = f_U(b) = 0$ voor elke $(a,b) \in O(x) \times O(y)$ en elke $U \in \mathcal{B}_i \setminus (\mathcal{B}(x) \cup \mathcal{B}(y))$, zodat in feite

$$g_{i,k}(a,b) = \sum_{U \in \mathcal{B}_(x) \cup \mathcal{B}(y)} \left|f_U(a) - f_U(b)\right|, \quad (a,b) \in O(x) \times O(y),$$

een eindige som is. Deze gelijkheid impliceert tevens dat $g_{i,k}$ continu is op de open verzameling $O(x) \times O(y)$, en omdat deze open verzamelingen $X \times X$ overdekken volgt dat $g_{i,k}$ continu is op $X \times X$.

Het is nu evident dat elke $g_{i,k}$, en dus ook $d_{i,k}$, een pseudometriek is. We moeten nog nagaan dat ook aan (iii) van Lemma 9.21 voldaan is. Zij dus A een gesloten niet-lege deelverzameling van X, en $x \notin A$. Dan zijn er $B, W \in \mathcal{B}$, zeg $B \in \mathcal{B}_k$ en $W \in \mathcal{B}_i$ met $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq W \subseteq X \setminus A$. Dan is $B \subseteq V_W$ dus $f_W(x) = 1$, en $f_W(a) = 0$ voor elke $a \in A$. Maar dan geldt voor elke $a \in A$ dat $g_{i,k}(x,a) = \sum_{U \in \mathcal{B}_i} \left|f_U(x) - f_U(a)\right| \geqslant \left|f_W(x) - f_W(a)\right| = 1$ en dus $d_{i,k}(A) = 1$. □

Een onmiddellijk gevolg van deze metrizeringsstellingen is de volgende, al veel oudere (1925), metrizeringsstelling voor separabele ruimten.

9.22. STELLING VAN URYSOHN. *Een ruimte is separabel en metrizeerbaar dan en slechts dan als deze een reguliere* C_{II}*-ruimte is.*

BEWIJS. Een separabele metrische ruimte is C_{II} wegens Stelling 2.10. Omgekeerd is een aftelbare basis uiteraard σ-discreet, dus metrizeerbaarheid volgt uit de Stelling van Bing-Nagata-Smirnov. □

Vraagstukken

▶ **9.1.** VRAAGSTUK. Toon aan dat een topologische ruimte compact is dan en slechts dan als elke open overdekking een lokaal eindige deeloverdekking heeft.

▶ **9.2.** VRAAGSTUK. Toon aan: als $\mathcal{O}$ een open overdekking is van X, en $\mathcal{V}$ is een lokaal eindige verfijning van $\mathcal{O}$, dan heeft $\mathcal{O}$ ook een lokaal eindige verfijning $\{W_U : U \in \mathcal{O}\}$ zó dat $W_U \subseteq U$ voor elke $U \in \mathcal{O}$.

▶ **9.3.** VRAAGSTUK. Laat X en Y topologische ruimten zijn, en $f : X \to Y$. Zij $\{A_i : i \in I\}$ een lokaal eindige *gesloten* overdekking van X. Neem aan dat voor elke $i \in I$ de beperking $f \restriction A_i : A_i \to Y$ continu is. Toon aan dat f continu is.

▶ **9.4.** VRAAGSTUK. Laat zien dat een topologische som van paracompacte ruimten weer paracompact is.

▶ **9.5.** VRAAGSTUK. Toon aan dat een separabele paracompacte ruimte Lindelöf is.

▶ **9.6.** VRAAGSTUK. Zij X een topologische ruimte die niet noodzakelijk regulier is, en zij $\mathcal{B}$ een σ-lokaal eindige basis voor X. Toon aan dat X een $\mathrm{C_I}$-ruimte is.

▶ **9.7.** VRAAGSTUK. Zij X een metrizeerbare ruimte, en zij $f : X \to Y$ open en continu. Neem verder aan dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodat voor elke $y \in Y$ de vezel $f^{-1}(y)$ precies n punten heeft.

a) Laat zien dat Y een T_3-ruimte is.

b) Bewijs dat Y metrizeerbaar is. *Aanwijzing*: Zij $\mathcal{B} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{B}_m$ een basis voor X, waarin elke $\mathcal{B}_m$ lokaal eindig is en $\mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{B}_{m+1}$. Definieer

$$\mathcal{U}_m = \Big\{ \bigcap_{i=1}^{n} f[U_i] : U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B}_m \text{ paarsgewijs disjunct} \Big\}.$$

Laat zien dat $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}_m$ een σ-lokaal eindige basis is voor Y.

▶ **9.8.** VRAAGSTUK. We bewijzen dat voor een ruimte X de volgende drie uitspraken equivalent zijn: (1) X is separabel en metrizeerbaar; (2) X is regulier en heeft een aftelbare basis en (3) X kan in de Hilbert-kubus ingebed worden.

a) Bewijs dat (2) uit (1) volgt.

b) Bewijs dat (3) uit (2) volgt. *Aanwijzing*: Neem een aftelbare basis $\mathcal{B}$ en zij $\mathcal{C}$ de verzameling van alle paren (B_1, B_2) uit $\mathcal{B}$ met $\overline{B_1} \subseteq B_2$. Kies voor elk paar (B_1, B_2) een continue functie $f_{(B_1,B_2)} : X \to [0,1]$ met $f_{(B_1,B_2)}[B_1] = \{0\}$ en $f_{(B_1,B_2)}[X \setminus B_2] = \{1\}$. Laat zien dat $f : X \to [0,1]^{\mathcal{C}}$, gedefinieerd door $x \mapsto (f_C(x))_C$ een inbedding is.

c) Bewijs dat (1) uit (3) volgt.

Hoofdstuk 10

Vraagstukken

▶ **10.1.** VRAAGSTUK. Zij X een topologische ruimte. Voor $A \subseteq X$ definieren we $A^c = X \setminus A$ en $A^- = \overline{A}$.

a) Toon aan: $A^{-c-c-c-} = A^{-c-}$.

b) Toon aan dat er, uitgaande van een verzameling A, met behulp van $^-$ en ^{c} niet meer dan veertien verschillende verzamelingen gemaakt kunnen worden.

c) Maak een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ waarbij dit aantal van veertien gehaald wordt.

▶ **10.2.** VRAAGSTUK. Een deelverzameling A van een topologische ruimte X heet *regulier open* als $A = \operatorname{Int} \operatorname{Cl} A$ en *regulier gesloten* als $A = \operatorname{Cl} \operatorname{Int} A$.

a) Toon aan: A is regulier gesloten dan en slechts dan als $X \setminus A$ regulier open is.

b) Toon aan dat het inwendige van een gesloten verzameling regulier open is.

c) Ga na of de doorsnede en vereniging van twee regulier open verzamelingen weer regulier open is (NB 'Ja' vergt een bewijs; 'Nee' vergt een expliciet tegenvoorbeeld).

d) Formuleer de tegenhangers van de voorgaande twee onderdelen voor regulier gesloten verzamelingen.

e) Toon aan: als $f : X \to Y$ continu en open is en A regulier open (gesloten) in Y dan is $f^{-1}[A]$ regulier open (gesloten) in X.

f) Zij $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{N}$ de quotiëntafbeelding (zie Voorbeeld 4.35). Toon aan: q is gesloten, $A = q\big[[0,1]\big]$ is regulier gesloten in $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ maar $q^{-1}[A]$ is niet regulier gesloten in $\mathbb{R}$.

▶ **10.3.** VRAAGSTUK. Zij $\mathcal{B}$ de verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}^\infty$ van de vorm $\prod_{i=0}^\infty U_i$, waarbij elke U_i een open deelverzameling van $\mathbb{R}$ is — in de gewone topologie.

a) Toon aan dat $\mathcal{B}$, zoals vermeld op pagina 28, als basis voor een topologie $\mathcal{T}_b$ kan dienen — de *doostopologie*.

b) Bewijs dat de doostopologie een reguliere topologie is.

c) Bewijs dat de doostopologie niet $\mathrm{C_I}$ en niet separabel is.

d) De afbeelding $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\infty$, gedefinieerd door $f : x \mapsto (x, x, x, \ldots)$, is niet continu als $\mathbb{R}^\infty$ voorzien is van de doostopologie en wel continu als $\mathbb{R}^\infty$ voorzien is van de producttopologie $\mathcal{T}_p$.

e) Bewijs dat de doostopologie een volledig reguliere topologie is. *Aanwijzing*: Kies, als U open is en $x \in U$, een rij $\langle \epsilon_n \rangle_n$ zó dat $\prod_i (x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i) \subseteq U$. Definieer $f : X \to [0,1]$ door

$$f(p) = \begin{cases} 0 & \text{als } p = x, \\ \sup\big\{r \in (0,1] : (\exists i \in \mathbb{N})\big(p_i \notin (x_i - r\epsilon_i, x_i + r\epsilon_i)\big)\big\} & \text{als } p \neq x. \end{cases}$$

Bewijs dat f continu is, dat $f(x) = 0$ en dat $f(p) = 1$ als $p \notin U$.

f) Bewijs dat de doostopologie niet samenhangend is (dat wil zeggen, bepaal een niet-lege open deelverzameling U van X zó dat $X \setminus U$ ook open en niet-leeg is).

► **10.4.** VRAAGSTUK. We bekijken de productruimte $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, waarbij $\mathbb{N}$ de discrete topologie draagt en $\mathbb{R}$ als indexverzameling dient.

a) Is $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ een $\mathrm{C_{II}}$-ruimte? Een $\mathrm{C_I}$-ruimte?

b) Bewijs dat $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ separabel is. *Aanwijzing*: Gebruik de structuur van $\mathbb{R}$: definieer voor elk stijgend rijtje rationale getallen $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \dots, q_k)$ en elk rijtje natuurlijke getallen $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ het punt $x_{\mathbf{q},\mathbf{n}}$ door

$$x_{\mathbf{q},\mathbf{n}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } t < q_0 \text{ of } q_k \leqslant t \\ n_i & \text{als } q_{i-1} \leqslant t < q_i,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ k. \end{cases}$$

De verzameling van dergelijke punten is aftelbaar en dicht.

c) Bewijs nu Stelling 4.29: elk product van $\mathfrak{c}$ veel separabele ruimten is weer separabel.

d) Zij Σ de deelruimte van $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ bestaande uit die punten x waarvoor $S_x = \{t : x(t) \neq 1\}$ aftelbaar is. Onderzoek of Σ separabel is.

► **10.5.** VRAAGSTUK. Zij I een verzameling zó dat de productruimte $\{0,1\}^I$ separabel is ($\{0,1\}$ met de discrete topologie); bewijs dat $|I| \leqslant \mathfrak{c}$. *Aanwijzing*: Zij D een dichte deelverzameling van $\{0,1\}^I$ en bekijk voor elke i de verzameling $D_i = \{d \in D : d_i = 0\}$.

► **10.6.** VRAAGSTUK. Zij X een ruimte en $\mathcal{O}$ een familie open deelverzamelingen van X. Definieer $f : X \to \mathbf{S}^{\mathcal{O}}$ door $x \mapsto \bigl(f_O(x)\bigr)_O$ (zie Opgave 3.3), hierbij is $\mathbf{S}$ de Sierpiński-ruimte.

a) Toon aan dat f continu is. *Aanwijzing*: Vraagstuk 4.7.

b) Toon aan: als X een $\mathrm{T_0}$-ruimte is en $\mathcal{O}$ een basis voor X dan is f een inbedding.

c) Bewijs: X is $\mathrm{T_0}$ en $\mathrm{C_{II}}$ dan en slechts dan als X in te bedden is in $\mathbf{S}^{\aleph_0}$.

► **10.7.** VRAAGSTUK. We bekijken de ruimte $W(\omega_1)$ (met de orde-topologie dus). We noemen een deelverzameling A van $W(\omega_1)$ *begrensd* als er een α is zó dat $A \subseteq [0, \alpha]$.

a) Toon aan: als F en G gesloten en disjunct zijn dan is F of G begrensd. *Aanwijzing*: Zo niet kies dan $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ met $\alpha_{2n} \in F$ en $\alpha_{2n-1} \in G$.

b) Toon aan dat $W(\omega_1)$ normaal is.

Zij $f : W(\omega_1) \to \mathbb{R}$ continu.

c) Toon aan: voor elke $\epsilon > 0$ is er een α zó dat voor elke $\beta \geqslant \alpha$ geldt $\bigl|f(\beta) - f(\alpha)\bigr| < \epsilon$. *Aanwijzing*: Zo niet kies dan $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ met $\bigl|f(\alpha_{n+1}) - f(\alpha_n)\bigr| \geqslant \epsilon, \dots$

d) Toon aan: er is een α zó dat $f(\beta) = f(\alpha)$ voor alle $\beta \geqslant \alpha$.

► **10.8.** VRAAGSTUK. Zij X het eenheidsvierkant in het vlak:

$$X = \bigl\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\bigr\}.$$

We ordenen X lexicografisch als volgt: $(x, y) < (u, v)$ dan en slechts dan als $(x < u)$ of $(x = u$ en $y < v)$. We voorzien X van de orde-topologie.

a) Bewijs dat X compact is. *Aanwijzing*: Zie Opgave 6.6.

b) Bewijs dat X niet separabel is.

c) Laat zien dat X een $\mathrm{C_I}$-ruimte is.

► **10.9.** VRAAGSTUK. Zij X een topologische ruimte. Een *compactificatie* van X is een compacte ruimte Y waarin X als dichte deelruimte ligt ingebed, zoals bijvoorbeeld de éénpuntscompactificatie. Voorbeeld: de cirkel $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ is een compactificatie van $\mathbb{R}$, zo ook het eenheidsinterval $[0, 1]$.

Zij X een volledig reguliere ruimte en zij $\mathcal{F} = C(X, [0, 1])$, de verzameling van alle continue functies $f : X \to [0, 1]$.

a) Laat zien dat de functie $e : X \to [0, 1]^{\mathcal{F}}$ gedefinieerd door

$$e(x)_f = f(x)$$

een inbedding is. (Uiteraard is $[0, 1]^{\mathcal{F}}$ voorzien van de producttopologie.)

We identificeren X nu verder met $e[X]$. Zij βX de afsluiting van X in de (compacte) ruimte $[0, 1]^{\mathcal{F}}$.

b) Bewijs dat elke continue functie $f : X \to [0, 1]$ voortgezet kan worden tot een unieke continue functie $\bar{f} : \beta X \to [0, 1]$.

c) Bewijs dat elke continue functie $f : X \to K$, waarbij K een willekeurige compacte T_2-ruimte is, continu voortgezet kan worden tot een unieke continue functie $\bar{f} : \beta X \to K$.

d) Zij αX een compactificatie van X en neem aan dat αX Hausdorff is. Bewijs dat er een continue functie $f : \beta X \to \alpha X$ bestaat met $f \restriction X$ de indentiteit op X.

► **10.10.** VRAAGSTUK. Zij $X = \beta\mathbb{N}$, waarbij $\mathbb{N}$ is voorzien van de discrete topologie. Bewijs dat de kardinaliteit van X tenminste $\mathfrak{c}$ is. (In feite, $|X| = 2^{\mathfrak{c}}$.)

► **10.11.** VRAAGSTUK. Onderzoek elk van de onderstaande topologische ruimten H, L en L^+ op de volgende topologische eigenschappen: $\mathrm{C_I}$, $\mathrm{C_{II}}$, separabel, $\mathrm{T_1}$, $\mathrm{T_2}$, $\mathrm{T_3}$, compact, aftelbaar compact, Lindelöf, lokaal compact, paracompact, en metrizeerbaar. Voor wat betreft H zal een aantal antwoorden afhangen van de grootte van het kardinaalgetal κ.

a) Zij I een indexverzameling van kardinaliteit κ en maak de verzameling H door in $I \times [0, 1]$ de verzameling $I \times \{0\}$ tot één punt $\mathbf{0}$ te identificeren, als in Voorbeeld 4.35. Definieer een metriek op de verzameling H door

$$d\big((i, x), (j, y)\big) = \begin{cases} |x - y| & \text{als } i = j, \\ x + y & \text{als } i \neq j. \end{cases}$$

(We doen alsof $\mathbf{0} = (i, 0)$ voor alle i.) NB De zoverkregen metrische topologie is *niet* de quotiënttopologie. De ruimte H heet wel de metrische egel met κ stekels.

b) Zij $<$ de lineaire ordening op $L = W(\omega_1) \times [0, 1)$ gedefinieerd door $(\alpha, x) < (\beta, y)$ dan en slechts dan als $\alpha < \beta$ of ($\alpha = \beta$ en $x < y$). We voorzien L van de orde-topologie. Deze ruimte heet de *lange lijn*.

c) Zij L^+ de geordende verzameling L uit (b) uitgebreid met ω_1 als grootste element, weer voorzien van de orde- topologie. (Opmerking: L is op deze wijze een deelruimte van L^+).

Bijlage A

Kardinaalgetallen

In deze appendix en de volgende zullen we een klein stukje verzamelingenleer ontwikkelen. We doen dat op een naïeve manier, dat wil zeggen: we zullen geen formeel axiomasysteem ontwikkelen, maar een intuïtief verzamelingsbegrip hanteren. Zoals we in Hoofdstuk 5 hebben gezien moeten we daarbij wel voorzichtig zijn met met 'te grote' objecten. Om misverstanden te voorkomen zullen we voor dergelijke objecten de benaming *klasse* aanhouden (bijvoorbeeld: de klasse van alle verzamelingen). Verder nemen we aan dat het Keuzeaxioma geldt.

A.1. DEFINITIE. Twee verzamelingen A en B heten *gelijkmachtig* als er een bijectie $f : A \to B$ bestaat.

Gelijkmachtigheid is een equivalentierelatie op de klasse van alle verzamelingen. We noemen de equivalentieklasse van A het *kardinaalgetal* (of de *kardinaliteit*, of de *machtigheid*) van A, notatie $|A|$ (ook wel $\bar{\bar{A}}$).

De volgende definitie benoemt enkele veel voorkomende kardinaalgetallen.

A.2. DEFINITIE. (a) 0 is het kardinaalgetal van $\varnothing$.
(b) Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is n is het kardinaalgetal van $\{0, \ldots, n-1\}$.
(c) $\aleph_0$ (aleph-nul) is het kardinaalgetal van $\mathbb{N}$.
(d) Het kardinaalgetal van $\mathbb{R}$ is $\mathfrak{c}$. De $\mathfrak{c}$ komt van het woord $\mathfrak{c}$ontinuum.

De kardinaalgetallen 0, 1, 2, ... heten de *eindige* kardinaalgetallen, de overige kardinaalgetallen heten *oneindig*. Verder heet een kardinaalgetal $|A|$ *(over)aftelbaar* als A (over)aftelbaar is; dit hangt uiteraard niet af van de keuze van A.

Ordening

Op de klasse van kardinaalgetallen kunnen we op natuurlijke wijze een ordening definiëren.

A.3. DEFINITIE. Laat κ en λ kardinaalgetallen zijn, zeg $\kappa = |A|$ en $\lambda = |B|$. Dan is $\kappa \leqslant \lambda$ dan en slechts dan als er een injectie $f : A \to B$ bestaat.

Het is eenvoudig na te gaan dat deze definitie onafhankelijk is van de keuze van de representanten A en B. Zoals gebruikelijk schrijven we $\kappa < \lambda$ als $\kappa \leqslant \lambda$ maar $\kappa \neq \lambda$. Het is eenvoudig in te zien dat een kardinaalgetal κ eindig is dan en slechts dan als $\kappa < \aleph_0$, en aftelbaar dan en slechts dan als $\kappa \leqslant \aleph_0$. Met Stelling A.6 hierna volgt dan tevens dat $\kappa \geqslant \aleph_0$ als κ oneindig is, en $\kappa > \aleph_0$ als κ overaftelbaar is.

De gedefinieerde ordening is evident reflexief en transitief, en de volgende stelling laat zien dat het een partiële ordening is.

A.4. Stelling van Cantor-Bernstein. *Laat κ en λ kardinaalgetallen zijn. Als $\kappa \leqslant \lambda$ en $\lambda \leqslant \kappa$ dan $\kappa = \lambda$.*

Bewijs. Laat A en B verzamelingen zijn met $|A| = \kappa$ en $|B| = \lambda$. Omdat $\kappa \leqslant \lambda$ bestaat er een injectie $f : A \to B$, en omdat $\lambda \leqslant \kappa$ bestaat er een injectie $g : B \to A$. Definieer recursief $A_1 = A$, $B_1 = B$, $A_{n+1} = (g \circ f)[A_n]$ en $B_{n+1} = (f \circ g)[B_n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat $A_n \supseteq g[B_n] \supseteq A_{n+1}$ en $B_n \supseteq f[A_n] \supseteq B_{n+1}$. Definieer nu $h : A \to B$ door

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in \bigcap_n A_n \cup \bigcup_n (A_n \setminus g[B_n]), \\ g^{-1}(x) & \text{als } x \in \bigcup_n (g[B_n] \setminus A_{n+1}). \end{cases}$$

Dan is h de gezochte bijectie. □

► **A.5.** Opgave. Verifieer dat h inderdaad een bijectie is.

Er geldt zelfs dat $\leqslant$ een lineaire ordening is van de kardinaalgetallen.

A.6. Stelling. *Laat κ en λ kardinaalgetallen zijn. Dan $\kappa \leqslant \lambda$ of $\lambda \leqslant \kappa$.*

Bewijs. Als $A = \varnothing$ of $B = \varnothing$ dan is de stelling triviaal, dus neem aan dat $A \neq \varnothing$ en $B \neq \varnothing$. We nemen verder aan dat op A een welordening $<$ is gedefinieerd (Stelling van Zermelo). We gaan proberen recursief een injectie $f : A \to B$ te definiëren. We beginnen met voor $a_0 = \min A$ een willekeurig element $f(a_0) \in B$ te kiezen. Zij nu $a \in A$ met $a > a_0$, en neem als inductiehypothese dat $f(x)$ reeds gedefinieerd is voor $x < a$ (maar nog voor geen enkele $x \geqslant a$). Definieer $B_a = \{f(x) : x < a\}$. Als $B_a \neq B$, dan kiezen we voor $f(a)$ een willekeurig element uit $B \setminus B_a$.

Als we deze constructie voor elke $a \in A$ kunnen voltooien dan is f een injectie, en volgt $\kappa \leqslant \lambda$. Als de inductieve definitie op zeker moment stokt, dan is dat omdat op dat moment $B_a = B$. Dan bestaat dus voor elke $b \in B$ één $x_b < a$ met $f(x_b) = b$. Maar dan is $b \mapsto x_b$ een injectie van B naar A. □

Het bewijs van de volgende stelling stellen we uit tot we iets meer over welordeningen weten, in Bijlage B.

A.7. Stelling. *De kardinaalgetallen worden welgeordend door $\leqslant$.*

Bewerkingen

We definiëren nu sommen, producten en exponenten van kardinaalgetallen. De definities maken gebruik van representanten, en voor elk geval moet dus nagegaan worden dat de definitie onafhankelijk is van de keuze van de representanten.

A.8. Definitie. Zij $\{\kappa_i\}_{i \in I}$ een verzameling kardinaalgetallen, en zij A_i een verzameling met $|A_i| = \kappa_i$ ($i \in I$).

(a) $\sum_{i \in I} \kappa_i = \left|\bigcup_{i \in I} \{i\} \times A_i\right|$.

(b) $\prod_{i \in I} \kappa_i = \left|\prod_{i \in I} A_i\right|$.

Als A en B verzamelingen zijn, dan is A^B de verzameling van alle afbeeldingen van B naar A.

A.9. DEFINITIE. Laat κ en λ kardinaalgetallen zijn, en A en B verzamelingen met $|A| = \kappa$ en $|B| = \lambda$. Dan is $\kappa^\lambda = |A^B|$.

Met betrekking tot de laatste definitie merken we nog op dat $f(\phi) = \big(b, \phi(b)\big)_{b\in B}$ een bijectie tussen A^B en $\prod_{b\in B}\{b\} \times A$ definieert, dus $\kappa^\lambda = \prod_{b\in B} \kappa$.

Enkele eenvoudige eigenschappen van de gedefinieerde operaties zijn:

A.10. PROPOSITIE. *Laat κ, λ en μ kardinaalgetallen zijn.*

(a) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$.
(b) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu) = \kappa + \lambda + \mu$.
(c) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$.
(d) $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$.
(e) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.
(f) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$.

► **A.11.** OPGAVE. Bewijs deze formules.

Minder eenvoudig is de volgende stelling, die we weer niet zullen bewijzen.

A.12. STELLING. *Laat κ en λ kardinaalgetallen zijn met $\kappa \leqslant \lambda$ en λ oneindig. Dan is $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \lambda$.*

A.13. STELLING. *Zij A een verzameling, en zij $\mathcal{P}(A)$ de machtsverzameling van A. Dan is $\big|\mathcal{P}(A)\big| = 2^{|A|}$.*

BEWIJS. Definieer $f : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ door $f(B) = \chi_B$, waarbij χ_B de karakteristieke functie is van B. Dan is f een bijectie. □

A.14. STELLING VAN CANTOR. *Zij κ een kardinaalgetal. Dan $\kappa < 2^\kappa$.*

BEWIJS. Zij A een verzameling met $|A| = \kappa$, en kies $\mathcal{P}(A)$ als representant van 2^κ (Stelling A.13). Definieer $f : A \to \mathcal{P}(A)$ door $f(a) = \{a\}$ $(a \in A)$, dan is f injectief en dus $\kappa \leqslant 2^\kappa$. We moeten nog laten zien dat er geen bijectie kan bestaan tussen A en $\mathcal{P}(A)$. Zij dus $g : A \to \mathcal{P}(A)$. We zullen zien dat g niet eens surjectief kan zijn. Immers, zij $B = \{a \in A : a \notin g(a)\}$. Als er nu een $a \in A$ zou zijn met $g(a) = B$, dan geldt dat $a \in g(a)$ dan en slechts dan als $a \notin g(a)$, een tegenspraak. □

Een gevolg is:

A.15. STELLING. *Zij K een verzameling kardinaalgetallen. Dan is er een kardinaalgetal λ zó dat $\kappa < \lambda$ voor elke $\kappa \in K$.*

BEWIJS. Zij $\mu = \sum_{\kappa\in K} \kappa$ en $\lambda = 2^\mu$. □

Omdat $\leqslant$ een welordening is op de klasse van alle kardinaalgetallen bestaat dus ook voor elke verzameling K van kardinaalgetallen een *kleinste* kardinaalgetal groter dan elk element van K (en dus is de klasse van alle kardinaalgetallen zelf geen verzameling!). In het bijzonder is er een eerste overaftelbaar kardinaalgetal $\aleph_1$ (het kleinste kardinaalgetal groter dan $\aleph_0$), en algemener voor elke kardinaalgetal κ een kleinste kardinaalgetal κ^+ groter dan κ: de *opvolger* van κ (dus $\aleph_1 = \aleph_0^+$). De achtereenvolgende opvolgers van $\aleph_1$ geven we aan met $\aleph_2$, $\aleph_3$, ... Voor het kleinste kardinaalgetal groter dan elke $\aleph_n$ gebruiken we de notatie $\aleph_\omega$. De achtergrond van deze notatie zal in Bijlage B uiteengezet worden.

A.16. Stelling. (a) *Zij κ een kardinaalgetal. Dan is $\kappa^+ \leqslant 2^\kappa$; in het bijzonder is $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$.*

(b) $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Bewijs. Onderdeel (a) volgt onmiddellijk uit Stelling A.14.

Voor (b) merken we eerst op dat $|\mathbb{R}| = \bigl|(0,1)\bigr|$. Bij elke $x \in (0,1)$ kunnen we een rij $\langle x_n \rangle_n$ van nullen en enen kiezen zó dat $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}$ (een binaire representatie van x). Bij sommige x-en hebben we de keuze uit twee rijen: bij $\frac{1}{2}$ hoort zowel $(1,0,0,0,\ldots)$ als $(0,1,1,1,\ldots)$; in dat geval kiezen we de rij die in nullen eindigt. Dit geeft een injectieve afbeelding van $(0,1)$ naar $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Omgekeerd definieert $\langle x_n \rangle_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n}$ een injectie van van $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ naar $[0,1)$. Pas nu de Stelling van Cantor-Bernstein toe. □

▶ **A.17.** Opgave.

a) Toon aan dat de afbeelding $x \mapsto (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ goedgedefinieerd en injectief is.

b) Toon aan dat $\langle x_n \rangle_n \mapsto \sum_n x_n 3^{-n}$ injectief is.

c) Bewijs dat $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^2$. *Aanwijzing*: maak een bijectie tussen $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ door rijen te mengen.

Deze laatste stelling werpt uiteraard de vraag op of $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Continuumhypothese (CH). $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Men heeft bewezen dat in het axiomasysteem ZFC noch de Continuumhypothese noch de ontkenning ervan bewezen kan worden. De positie van CH ten opzichte van ZFC is daarmee dezelfde als die van het Keuzeaxioma ten opzichte van ZF (zie Hoofdstuk 4).

Dezelfde opmerkingen kunnen gemaakt worden ten aanzien van de voor de hand liggende generalisatie naar willekeurige kardinaalgetallen:

Gegeneraliseerde Continuumhypothese (GCH). Voor elk oneindig kardinaalgetal κ geldt $\kappa^+ = 2^\kappa$.

Bijlage B

Ordinaalgetallen

We gaan nu een verfijning aanbrengen op de gelijkmachtigheidsrelatie uit Appendix A. We beperken daartoe wel het domein: we beschouwen nog slechts lineair geordende verzamelingen.

B.1. Definitie. Laat $(X, \leqslant)$ en $(Y, \leqslant)$ lineair geordende verzamelingen zijn.

(a) Een afbeelding $f : X \to Y$ heet *orde-bewarend* als voor alle $x_1, x_2 \in X$ met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) < f(x_2)$.

(b) $(X, \leqslant)$ en $(Y, \leqslant)$ heten *orde-isomorf* als er een orde-bewarende bijectie (een *orde-isomorfisme*) $f : X \to Y$ bestaat.

Orde-isomorfie is een equivalentierelatie op de klasse van alle (lineair) geordende verzamelingen. De equivalentieklasse van $(X, \leqslant)$ noteren we als $[X, \leqslant]$ en we noemen deze het *ordetype van* $(X, \leqslant)$. Als $(X, \leqslant)$ een welordening is (zie Definitie 4.32(c)) dan heet dit ordetype het *ordinaalgetal van* $(X, \leqslant)$. Merk daarbij op dat als $(X, \leqslant)$ een welordening is, en $(X, \leqslant)$ en $(Y, \leqslant)$ zijn orde-isomorf, ook $(Y, \leqslant)$ een welordening is.

In de volgende definitie bekijken we steeds de natuurlijke getallen in hun gebruikelijke ordening.

B.2. Definitie. (a) 0 is het ordinaalgetal van $\varnothing$.

(b) Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is n is het ordinaalgetal van $\{0, \ldots, n-1\}$.

(c) Het ordinaalgetal van $\mathbb{N}$ is ω_0 of ω.

Merk op dat de lege relatie de enige welordening is op $\varnothing$. Verder is eenvoudig na te gaan dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ alle ordeningen van een verzameling met n elementen orde-isomorf zijn.

De ordinaalgetallen 0, 1, 2, ... heten de *eindige* ordinaalgetallen, de overige ordinaalgetallen heten *oneindig*. Een ordinaalgetal $[X, \leqslant]$ heet weer *(over)aftelbaar* als X (over)aftelbaar is, en dit is weer onafhankelijk van de keuze van $(X, \leqslant)$ (immers, orde-isomorfe verzamelingen zijn in het bijzonder gelijkmachtig).

Ordening

Ook op de klasse van ordinaalgetallen definiëren we een ordeningsrelatie.

B.3. Definitie. Zij $(X, \leqslant)$ een geordende verzameling. Een deelverzameling A van X heet een *beginstuk* van $(X, \leqslant)$ als voor alle $a \in A$ en alle $x \in X$ met $x \leqslant a$ geldt dat $x \in A$.

▶ **B.4.** Opgave.

a) Elk interval van de vorm $(\leftarrow, a)$ is een beginstuk.

b) Elk interval van de vorm $(\leftarrow, a]$ is een beginstuk.

c) Toon aan: $Q = \{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant 0 \text{ of } q^2 < 2\}$ is een beginstuk van $\mathbb{Q}$. Is Q van de vorm $(\leftarrow, a)$ of $(\leftarrow, a]$?

► **B.5.** OPGAVE. Zij $(X, \leqslant)$ een welgeordende verzameling en A een beginstuk. Toon aan: $A = X$ of er is een $a \in X$ met $A = (\leftarrow, a)$.

B.6. DEFINITIE. Laat α en β ordinaalgetallen zijn, zeg $\alpha = [X, \leqslant]$ en $\beta = [Y, \leqslant]$. Dan is $\alpha \leqslant \beta$ dan en slechts dan als er een orde-bewarende $f : X \to Y$ bestaat zó dat $f[X]$ een beginstuk is van $(Y, \leqslant)$.

De definitie is weer onafhankelijk van de keuze van de representanten. Net als bij de kardinaalgetallen vinden we:

B.7. STELLING. *De ordinaalgetallen worden lineair geordend door* $\leqslant$.

► **B.8.** OPGAVE. Bewijs deze stelling. *Aanwijzing*: Gebruik het bewijs van Stelling A.6; neem daarbij aan dat B ook welgeordend is en kies telkens $f(a) = \min B \setminus \{f(x) : x < a\}$.

► **B.9.** OPGAVE. Toon aan: als $(X, \leqslant)$ welgeordend is en $Y \subseteq X$ dan $[Y, \leqslant] \leqslant [X, \leqslant]$.

Een gevolg is:

B.10. STELLING. *Laat α en β ordinaalgetallen zijn, zeg $\alpha = [X, \leqslant]$ en $\beta = [Y, \leqslant]$.*

(a) *Als $\alpha \leqslant \beta$ dan $|X| \leqslant |Y|$.*

(b) *Als $|Y| < |X|$ dan $\beta < \alpha$.*

BEWIJS. Onderdeel (a) volgt onmiddellijk uit het feit dat een orde-bewarende afbeelding injectief is. Onderdeel (b) volgt uit Stelling A.6 door contrapositie van (a). □

Uit deze laatste stelling volgt nu dat voor een eindig ordinaalgetal α geldt dat $\alpha < \omega$, en dat voor een overaftelbaar ordinaalgetal α geldt dat $\omega < \alpha$. Omgekeerd geldt wel dat α eindig is als $\alpha < \omega$ (dit volgt uit het feit dat een oneindig beginstuk van $\mathbb{N}$ meteen heel $\mathbb{N}$ moet zijn), maar anderzijds hoeft een ordinaalgetal $\alpha > \omega$ *niet* overaftelbaar te zijn, zoals Voorbeeld B.17.1 laat zien. We zullen zien dat er zelfs overaftelbaar vele aftelbare ordinaalgetallen bestaan!

Een ander gevolg is:

B.11. STELLING. *Zij O een verzameling ordinaalgetallen. Dan is er een ordinaalgetal β zó dat $\alpha < \beta$ voor elke $\alpha \in O$.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{A}$ een familie welordeningen met $O = \big\{[A, \leqslant] : (A, \leqslant) \in \mathcal{A}\big\}$. Wegens Stelling A.15 is er dan een verzameling X zó dat $|X| > |A|$ voor elke $(A, \leqslant) \in \mathcal{A}$, en volgens de Welordeningsstelling bestaat er een welordening $\leqslant$ op X. Definieer $\beta = [X, \leqslant]$, dan impliceert Stelling B.10(b) dat $\alpha < \beta$ voor elke $\alpha \in O$. □

Stelling B.7 kunnen we uitbreiden tot:

B.12. STELLING. *De ordinaalgetallen worden welgeordend door* $\leqslant$.

Het bewijs staat in Vraagstuk B.1.

Bewerkingen

Omdat de ordinaalgetallen welgeordend worden door $\leqslant$ is er dus in het bijzonder bij ieder ordinaalgetal α een kleinste ordinaalgetal groter dan α, de *opvolger* van α. We zullen nu de som (en het product) van twee ordinaalgetallen definiëren, en vervolgens zien dat de opvolger van α het ordinaalgetal $\alpha + 1$ is.

B.13. DEFINITIE. Laat α en β ordinaalgetallen zijn, zeg $\alpha = [X, \leqslant_X]$ en $\beta = [Y, \leqslant_Y]$, met $X \cap Y = \varnothing$.

(a) $\alpha + \beta = [X \cup Y, \leqslant]$ waarbij $w \leqslant z$ dan en slechts dan als ($w, z \in X$ en $w \leqslant_X z$) of ($w, z \in Y$ en $w \leqslant_Y z$) of ($w \in X$ en $z \in Y$).

(b) $\alpha \cdot \beta = [Y \times X, \leqslant]$, waarbij $\leqslant$ de *lexicografische ordening* is op $Y \times X$: $(y_1, x_1) \leqslant (y_2, x_2)$ dan en slechts dan als ($y_1 <_Y y_2$) of ($y_1 = y_2$ en $x_1 \leqslant_X x_2$).

Let op de volgorde in de definities: $\alpha + \beta$ is een copie van α gevolgd door een kopie van β; het product $\alpha \cdot \beta$ bestaat uit β kopiën van α achter elkaar gelegd.

▶ **B.14.** OPGAVE.

a) Bewijs dat de hierboven gedefinieerde relaties welordeningen zijn.

b) Bewijs dat de definities onafhankelijk zijn van de gekozen representanten.

Omdat zowel optelling als vermenigvuldiging van ordinaalgetallen associatief is kunnen we de gegeven definitie inductief eenvoudig uitbreiden tot eindige sommen en producten. Noch optelling, noch vermenigvuldiging van ordinaalgetallen is commutatief, zie Voorbeelden B.17.1 en B.17.2.

▶ **B.15.** OPGAVE. Laat $(X, \leqslant)$ welgeordend zijn en $f : X \to X$ een orde-bewarende afbeelding. Bewijs dat $f(x) \geqslant x$ voor alle x. *Aanwijzing*: Bekijk $A = \{x : f(x) \geqslant x\}$; laat zien dat $X \setminus A$ geen minimum kan hebben.

B.16. STELLING. *Zij α een ordinaalgetal.*

(a) $\alpha < \alpha + 1$.

(b) $\alpha + 1$ *is de opvolger van* α.

BEWIJS. (a) Zij $\alpha = [X, \leqslant]$. Een representant van $\alpha + 1$ is dan de verzameling $Y = X \cup \{X\}$, waarbij X geordend wordt door zijn ordening $\leqslant$ als representant van α, en X het grootste element is van Y. De voor de hand liggende injectie $f : X \to Y$ laat zien dat $\alpha \leqslant \alpha + 1$. Stel dat $\alpha + 1 \leqslant \alpha$. Er is dan een orde-bewarende afbeelding $g : Y \to X$. Pas nu Opgave B.15 toe op g; dan volgt $g(X) > g(x) \geqslant x$ voor alle $x \in X$ en dus $g(X) \notin X$, een tegenspraak.

(b) Neem weer $\alpha = [X, \leqslant]$, en zij $\beta > \alpha$, zeg $\beta = [Z, \leqslant]$. Dan is er een orde-bewarende afbeelding $f : X \to Z$ zó dat $f[X]$ een beginstuk is van Z, en omdat $\alpha \neq \beta$ is f niet surjectief. Zij nu Y als in (a), en definieer $g : Y \to Z$ door

$$g(y) = \begin{cases} f(y) & \text{als } y \in X, \\ \min\bigl(Z \setminus f[X]\bigr) & \text{als } y = X. \end{cases}$$

Dan is g orde-bewarend en $g[Y]$ is een beginstuk van Z, zodat $\alpha + 1 \leqslant \beta$. $\square$

B.17. Voorbeelden.

1. Uit Stelling B.16 volgt dat $\omega < \omega + 1$. Echter, $1 + \omega = \omega$. Immers, een representant van $1 + \omega$ is de deelverzameling $\{0\} \cup \mathbb{N}$ van $\mathbb{Z}$. De afbeelding $x \mapsto x + 1$ is een orde-isomorfisme. Optelling van ordinaalgetallen is dus niet commutatief.
2. Uit de definitie van optelling en vermenigvuldiging volgt eenvoudig dat $\omega + 1 \leqslant \omega + \omega = \omega \cdot 2$. Echter, $2 \cdot \omega = \omega$: kies $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ met de lexicografische ordening als representant van $2 \times \omega$ en $\mathbb{N}$ als representant van ω, dan definieert $(i, n) \mapsto 2n - 1 + i$ een orde-isomorfisme van $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$. Vermenigvuldiging van ordinaalgetallen is dus niet commutatief.

Volgens Stelling B.11 is er een kleinste overaftelbaar ordinaalgetal, dat we aangeven met ω_1. Elke representant van ω_1 heeft kardinaliteit $\aleph_1$. Immers, als $(X, \leqslant)$ een representant is van ω_1 dan is X per definitie overaftelbaar, dat wil zeggen $|X| \geqslant \aleph_1$. Omgekeerd bestaat er een verzameling Y van kardinaliteit $\aleph_1$, deze kan met de Stelling van Zermelo worden welgeordend, en voor het resulterende ordinaalgetal α geldt wegens minimaliteit van ω_1 dat $\omega_1 \leqslant \alpha$. Maar dan is $|X| \leqslant |Y| = \aleph_1$ op grond van Stelling B.10(a). We zien dat ω_1 het kleinste ordinaalgetal is van kardinaliteit $\aleph_1$ (waarmee we dus bedoelen dat ω_1 het kleinste ordinaalgetal is waarvan de *representant* kardinaliteit $\aleph_1$ heeft). Op dezefde wijze is er een kleinste ordinaalgetalgetal ω_n van kardinaliteit $\aleph_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Recursief kunnen we voor elk ordinaalgetal α een kardinaalgetal $\aleph_\alpha$ en een ordinaalgetal ω_α definiëren, als volgt:

B.18. Definitie. (a) Voor elk ordinaalgetal α is $\aleph_\alpha$ het kleinste kardinaalgetal groter dan elke $\aleph_\beta$ ($\beta < \alpha$).
(b) Voor elk ordinaalgetal α is ω_α het kleinste ordinaalgetal van kardinaliteit $\aleph_\alpha$.

Het is overigens niet geheel triviaal dat zo'n recursieve definitie inderdaad mogelijk is, maar we zullen daar verder niet op in gaan.

De ordinaalgetallen uit deze definitie heten wel *begingetallen*, en er is dus een één-éénduidige (orde-bewarende) correspondentie tussen de klasse van alle kardinaalgetallen en de klasse van alle begingetallen. We zouden kardinaalgetallen dus ook alternatief hebben kunnen benaderen door eerst ordinaalgetallen te definiëren en vervolgens de begingetallen als kardinaalgetallen op te vatten. In deze abstracte benadering vormen de kardinaalgetallen dus een deelklasse van de ordinaalgetallen.

De structuur van de klasse van ordinaalgetallen is nu ongeveer als volgt:

$$\begin{array}{lllll}
0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\ldots, & \omega_0, \omega_0 + 1, \ldots, \omega_0 + \omega_0, \ldots, \omega_0 + \omega_0 + \omega_0, \ldots \\
& \updownarrow \\
& \aleph_0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\ldots, \omega_0 \cdot \omega_0, \ldots\ldots\ldots, & \omega_1, \omega_1 + 1, \ldots, \omega_1 + \omega_0, \ldots, & \omega_2, \ldots, \ldots, & \omega_{\omega_0}, \ldots\ldots. \\
& \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
& \aleph_1 & \aleph_2 & \aleph_{\omega_0}
\end{array}$$

Omdat de ordinaalgetallen door $\leqslant$ welgeordend worden, heeft elke verzameling van ordinaalgetallen zelf ook weer een ordinaalgetal. De volgende stelling (die we niet zullen bewijzen) geeft een goed inzicht in de structuur van welordeningen en in de structuur van de klasse van ordinaalgetallen.

B.19. DEFINITIE. Zij α een ordinaalgetal. Dan is $W(\alpha) = \{\beta : \beta < \alpha\}$.

$W(\alpha)$ heet wel de *voorgangersverzameling* van α.

B.20. STELLING. $[W(\alpha), \leqslant] = \alpha$.

$W(\alpha)$ is daarmee een kanonieke representant van α. Uit de stelling volgt bijvoorbeeld dat $\omega + 1$ als representant heeft de eindige ordinaalgetallen met daarboven ω zelf als grootste element. Verder zien we dat er $\aleph_1$ veel aftelbare ordinaalgetallen zijn: immers, de aftelbare ordinaalgetallen vormen precies $W(\omega_1)$, en als representant van ω_1 heeft deze verzameling kardinaliteit $\aleph_1$.

In een meer abstracte benadering wordt het ordinaalgetal α *geïdentificeerd met* $W(\alpha)$, waardoor een ordinaalgetal de verzameling is van alle kleinere ordinaalgetallen. De op deze wijze gepresenteerde ordinaalgetallen heten *Von Neumann-ordinaalgetallen*.

Gecombineerd met bovengenoemde abstracte benadering van de kardinaalgetallen worden dan ook kardinaalgetallen verzamelingen van ordinaalgetallen, in plaats van intuïtieve klassen.

De volgende stelling geeft nog een belangrijke eigenschap van ω_1.

B.21. STELLING. *Zij* $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ *een aftelbare verzameling ordinaalgetallen met* $\alpha_n < \omega_1$ *voor elke* $n \in \mathbb{N}$. *Dan is ook* $\sup_n \alpha_n < \omega_1$.

BEWIJS. Zij $\alpha = \sup_n \alpha_n$. Volgens Stelling B.20 is dan $W(\alpha)$ een representant van α. Maar $W(\alpha) = \bigcup_n W(\alpha_n)$ is aftelbaar omdat elke α_n een aftelbaar ordinaalgetal is. Uit Stelling B.10(b) volgt dan dat $\alpha < \omega_1$. □

Vraagstukken

▶ **B.1.** VRAAGSTUK. Bewijs Stelling B.12. Zij O een verzameling ordinaalgetallen, dan heeft O een minimum. Kies een familie $\mathcal{A}$ van representanten voor O. Neem één $(A, \leqslant_A)$ in O vast en zij O' de verzameling van $(B, \leqslant_B)$ in O met $[B, \leqslant_B] \leqslant [A, \leqslant_A]$.

a) Als $O' = \{(A, \leqslant A)\}$ dan geldt $[A, \leqslant_A] = \min O$.

b) Voor elke $(B, \leqslant_B)$ in O' ongelijk aan $(A, \leqslant_A)$ is er een punt $a_B \in A$ zó dat B isomorf is met $(\leftarrow, a_B)$.

c) Als B zó is dat a_B minimaal is dan $[B, \leqslant_B] = \min O$.

▶ **B.2.** VRAAGSTUK. Bewijs nu Stelling A.7.

Bijlage C

De Axioma's van Zermelo en Fraenkel

De axioma's van Zermelo en Fraenkel doen voor de verzamelingenleer wat de axioma's van Euclides voor de meetkunde deden, namelijk de vraag "Waar mogen we van uitgaan?" beantwoorden.

De Axioma's

In de verzamelingenleer gebruiken we letters (variabelen), logische symbolen ($\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, ...), het $=$-teken en natuurlijk $\in$. Verder is elk individu dat we tegenkomen een verzameling.

Het eerste axioma formaliseert hoe we gelijkheid van verzamelingen aantonen.

Axioma van Extensionaliteit. Verzamelingen zijn gelijk als ze dezelfde elementen hebben: $(\forall x)(x \in a \leftrightarrow x \in b) \implies (a = b)$.

De volgende drie axioma's geven regels hoe we uit oude verzamelingen nieuwe kunnen vormen.

Axiom van Paarvorming. Voor elk tweetal verzamelingen a en b is er een verzameling die uit alleen de elementen a en b bestaat: $(\forall a)(\forall b)(\exists c)(\forall x)\big(x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b)\big)$.

Axioma van Vereniging. Voor elke verzameling a bestaat een verzameling die uit alle elementen van elementen van a bestaat: $(\forall a)(\exists b)(\forall x)\big(x \in b \leftrightarrow (\exists y)(y \in a \wedge x \in y)\big)$.

Axiom van Machtsverzameling. Voor elke verzameling a bestaat een verzameling die uit alle deelverzamelingen van A bestaat: $(\forall a)(\exists b)(\forall x)\big(x \in b \leftrightarrow (\forall y)(y \in x \implies y \in a)\big)$.

De volgende twee axioma's beschrijven twee stukjes praktijk: we schrijven heel vaak iets als $\{x \in a : \phi(x)\}$ en $F[a]$, als F een afbeelding is.

Afscheidingsaxioma. Als ϕ een formule is en a een verzameling dan bestaat een verzameling die bestaat uit alle elementen van a die aan ϕ voldoen: $(\forall a)(\exists b)(\forall x)(x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge \phi(x)))$.

Substitutieaxioma. Als F een formule is die een 'afbeelding' definieert, dat wil zeggen uit $y = F(x)$ en $z = F(x)$ volgt $y = z$, dan bestaat voor elke verzameling a de beeldverzameling $F[a]$: $(\forall a)(\exists b)(\forall y)(y \in b \leftrightarrow (\exists x)(x \in a \wedge F(x) = y))$.

De axioma's hierboven zijn nog niet sterk genoeg om ons oneindige verzamelingen te geven; die moeten we expliciet postuleren.

Axiom van Oneindigheid. Er is een oneindige verzameling: $(\exists a)(\varnothing \in a \wedge (\forall x)(x \in a \implies x \cup \{x\} \in a)$.

Voor wie dit er een beetje raar uit vindt zien: dit is zo'n beetje de beste manier waarop, *in termen van verzamelingen alleen*, iets als een oneindige beschreven kan worden. Immers, volgens de regels van het spel kunnen we niet zomaar 0, 1, 2, ... uit de lucht plukken; we moeten ze netjes kunnen definiëren. Een verzameling als in het axioma heet *inductief* en ziet er, intuïtief, wel oneindig uit want de keten $\varnothing \in \{\varnothing\} \in \bigl\{\varnothing, \{\varnothing\}\bigr\} \in \cdots$ zit er in. Die keten levert ons de natuurlijke getallen (zie onder): $0 = \varnothing$, $1 = \{\varnothing\} = \{0\}$, $2 = \bigl\{\varnothing, \{\varnothing\}\bigr\} = \{0, 1\}$, enzovoort.

Het laatste axioma zegt dat niet alles een verzameling kan zijn; het verhindert het bestaat van oneindige rijtjes $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots$. Het heet daarom ook wel het *Regulariteitsaxioma*.

AXIOM VAN FUNDERING. Elke niet-lege verzameling heeft een $\in$-minimaal element. $(\forall a)\bigl(a \neq \varnothing \implies (\exists b)(b \in a \wedge (\forall c)(c \in b \implies c \notin a))\bigr)$.

Werken met de axioma's

Uitgaande van de bovenbeschreven axioma's en met gebruik van gangbare logische redeneermethoden kunnen we de hele verzamelingenleer netjes opbouwen.

Als voorbeeld laten we zien hoe het product van twee verzamelingen geheel in termen van verzamelingen beschreven kan worden. Het product $a \times b$ is gedefinieerd als $\{(x, y) : x \in a, y \in b\}$. Hierin is (x, y) nog ongedefinieerd.

Om te beginnen noteren we met $\{a, b\}$ de unieke c met $(\forall x)(x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$; die bestaat wegens de axioma's van Paarvorming en Extensionaliteit. Dan kunnen we ook $\{a\} = \{a, a\}$ en $\bigl\{\{a\}, \{a, b\}\bigr\}$ vormen.

▶ **C.1.** OPGAVE. Toon aan: $\bigl\{\{a\}, \{a, b\}\bigr\} = \bigl\{\{c\}, \{c, d\}\bigr\}$ dan en slechts dan als $a = c$ en $b = d$.

Het object $\bigl\{\{a\}, \{a, b\}\bigr\}$ voldoet dus aan de eisen van geordend paar; we *definiëren* daarom $(a, b) = \bigl\{\{a\}, \{a, b\}\bigr\}$. Nu moeten we nog alle (x, y) met $x \in a$ en $y \in b$ bij elkaar harken tot $a \times b$; dat gaat met het Afscheidingsaxioma.

▶ **C.2.** OPGAVE.

a) Toon aan: als $x \in a$ en $y \in b$ dan $(x, y) \in \mathcal{P}\bigl(\mathcal{P}(a \cup b)\bigr)$.

b) Maak een formule ϕ die je in staat stelt $a \times b$ uit $\mathcal{P}\bigl(\mathcal{P}(a \cup b)\bigr)$ af te scheiden, dus $a \times b = \bigl\{z \in \mathcal{P}\bigl(\mathcal{P}(a \cup b)\bigr) : \phi(z)\bigr\}$.

De natuurlijke getallen kunnen we met behulp van het Oneindigheidsaxioma *maken*. Je kunt namelijk bewijzen dat er een *kleinste* inductieve verzameling I bestaat. Die verzameling I en de afbeelding $S : I \to I$, gedefinieerd door $S(x) = x \cup \{x\}$, voldoen samen aan de axioma's van Peano voor de natuurlijke getallen, waarmee we die ook binen de verzamelingenleer gebracht hebben.

▶ **C.3.** OPGAVE. Zoek op wat de axioma's van Peano zijn en verifieer dat I en S er aan voldoen. Zoek ook op hoe je nu de gehele getallen, de rationale getallen en de reële getallen binnen de verzamelingenleer kunt maken.

Bijlage D

Het Keuzeaxioma

We bewijzen hier dat het Keuzeaxioma, het Lemma van Zorn en de Welordeningsstelling uit elkaar af te leiden zijn. We werken van makkelijk naar moeilijk.

▶ **D.1.** OPGAVE. Leid het Keuzeaxioma af uit de Welordeningsstelling.
Aanwijzing: Neem een welordening op $\bigcup_{i\in I} X_i$.

▶ **D.2.** OPGAVE. Leid de Welordeningsstelling af uit het Lemma van Zorn. Zij P de verzameling van alle welordeningen van deelverzamelingen van X, dat wil zeggen, P bestaat uit alle paren $(A, \preccurlyeq)$ met $\preccurlyeq$ een welordening van A. We zeggen $(A, \preccurlyeq) \leqslant (B, \sqsubseteq)$ als A een beginstuk van B is en $x \preccurlyeq y \iff x \sqsubseteq y$ voor $x, y \in A$.

a) P is niet leeg.

b) P voldoet aan de voorwaarden van het Lemma van Zorn.

c) Als $(A, \preccurlyeq)$ een maximaal element van P is dan $A = X$.

Het afleiden van het Lemma van Zorn uit het Keuzeaxioma kost het meeste moeite. Zij $(X, \leqslant)$ een partiële ordening die aan de voorwaarden van het Lemma van Zorn voldoet. Voor een keten K in X schrijven we $K^+ = \{x \in X : (\forall k \in K)(k < x)\}$.

▶ **D.3.** OPGAVE. Toon aan: als K een keten in X is met $K^+ = \varnothing$ dan heeft K een maximum en dat maximum is een maximaal element van X.

We moeten dus een keten K maken met $K^+ = \varnothing$.

Hiertoe nemen we een keuzefunctie $f : \mathcal{P}^+(X) \to X$ voor de familie van alle niet-lege deelverzamelingen van X. We maken de gewenste keten K door middel van benaderingen. Een *goede* keten is een keten A in X die welgeordend is door $\leqslant$ en die de volgende eigenschap heeft: als $a \in A$ dan geldt $a = f\bigl(\{b \in A : b < a\}^+\bigr)$. De volgende opgave laat zien dat goede ketens nogal speciaal zijn, we zetten $x_0 = f(X)$.

▶ **D.4.** OPGAVE.

a) Toon aan: $\varnothing$ is een goede keten en $\varnothing^+ = X$.

b) Een goede keten kan alleen met x_0 beginnen.

c) Als x_0 niet maximaal is, zij dan $x_1 = f\bigl(\{x_0\}^+\bigr)$; dan is $\{x_0, x_1\}$ de enige goede keten met twee elementen.

▶ **D.5.** OPGAVE. Toon aan: als A en B goede ketens zijn dan is A een beginstuk van B of B een beginstuk van A. *Aanwijzing*: stel $A \setminus B \neq \varnothing$ en zij $x = \min A \setminus B$; toon aan dat $B = \{a \in A : a < x\}$.

▶ **D.6.** OPGAVE. Zij K de vereniging van de familie van *alle* goede ketens. Toon aan dat K een goede keten is en $K^+ = \varnothing$.

Ook de Stelling van Tychonoff is equivalent met het Keuzeaxioma.

▶ **D.7.** OPGAVE. Leid het Keuzeaxioma af uit de Stelling van Tychonoff. Gegeven $\{X_i\}_{i\in I}$, neem een punt p buiten $\bigcup_i X_i$ en maak voor elke i een ruimte Y_i als volgt: de onderliggende verzameling is $X_i \cup \{p\}$ en de topologie is $\mathcal{T}_i = \{\varnothing, \{p\}, Y_i\}$.

a) Elke ruimte Y_i is compact.

b) Voor elke j is $F_j = X_j \times \prod_{i\neq j} Y_i$ gesloten in $\prod_i Y_i$.

c) De familie $\{F_j : j \in I\}$ heeft de f.i.p..

d) $\bigcap_j F_j = \prod_i X_i$.

Bibliografie

Engelking, R.

[1989] *General topology*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition. Voor velen het beste topologieboek dat er is. Plaatsnummer: 00427.WR.

Hrbáček, K. and T. Jech.

[1984] *Introduction to set theory*. Marcel Dekker Inc., New York, second edition. Een goede inleiding tot de verzamelingenleer. Plaatsnummers: 00229.WE, 00254.WE.

Kelley, J. L.

[1955] *General topology*. D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London. Een interessant topologieboek met, in de woorden van de schrijver, “Everything a young analyst should know”. Plaatsnummer: 00013.WR.

Kunen, K.

[1980] *Set theory. An introduction to independence proofs*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam. Een zeer goede inleiding in de verzamelingenleer, met onafhankelijkheidsbewijzen. Plaatsnummer: 00208.WE.

Steen, L. A. and J. A. Seebach, Jr.

[1970] *Counterexamples in topology*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York. Een mooi boek met een heleboel voorbeelden van topologische ruimten. Plaatsnummer: 00179.WR.

Index