Topologie

(Voorjaar 2007)

Dr K. P. Hart

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 0

Metrische ruimten

In het college Wiskundige Structuren zijn metrische ruimten aan bod geweest. In dit inleidende hoofdstuk bekijken we welke eigenschappen van metrische ruimten eigenlijk alleen van de open verzamelingen afhangen; de *topologische eigenschappen*.

Metrische ruimten

We herhalen eerst nog even de definitie van *metriek* en *metrische ruimte*.

0.1. Definitie. Een metriek op een verzameling X is een functie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die aan de volgende eigenschappen voldoet (voor alle elementen $x, y, z \in X$):

(i) $d(x,y) \geqslant 0$, $d(x,x) = 0$ en als $d(x,y) = 0$ dan $x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$, en

(iii) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (driehoeksongelijkheid)

Het paar (X,d) heet dan een metrische ruimte.

0.2. Voorbeelden.

1. Het bekendste voorbeeld is wel de verzameling $\mathbb{R}$ met daarop de *Euclidische metriek* gedefinieerd door $d(x,y) = |x - y|$.
2. In het algemeen gebruiken we de term Euclidische metriek voor de metriek op $\mathbb{R}^n$ gedefinieerd door
$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$
tenzij anders vermeld gebruiken we op $\mathbb{R}^n$ altijd deze metriek.
3. Op elke verzameling X is een metriek te definiëren:
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y \\ 1 & \text{als } x \neq y \end{cases}$$
deze heeft de *discrete metriek*. Waar de term 'discreet' vandaan komt wordt weldra duidelijk.

▶ **1**. Toon aan dat de discrete metriek ook echt een metriek is.

▶ **2**. Definieer $\rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als volgt
$$\rho\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{als } x_1 = y_1 \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{als } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$
Toon aan dat ρ een metriek op $\mathbb{R}^2$ is. Verzin een interpretatie van deze metriek.

0.3. Definitie. Zij (X,d) een metrische ruimte. Voor $x \in X$ en $\varepsilon > 0$ dat definiëren we
$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$$
de *open bol* om x met straal ε.

▶ **3**. Teken de open bollen om $(0,0)$ en $(1,1)$ met straal 1 ten opzichte van de metriek ρ uit Opgave 2.

Voor later is het ook wel handig gesloten bollen te hebben. We noteren $C(x,\varepsilon) = \{y : d(x,y) \leqslant \varepsilon\}$, dit is de *gesloten bol* om x met straal ε.

▶ **4**. Zij d de discrete metriek op $\mathbb{R}$; bepaal $B(0,1)$ en $C(0,1)$.

Topologische Eigenschappen

Om te beginnen de definite van open verzamelingen.

0.4. DEFINITIE. Een deelverzameling U van een metrische ruimte X heet *open* als voor ieder punt p van U een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $B(p,\varepsilon) \subseteq U$.

De volgende opgave is géén taalspelletje. Het bijvoeglijk naamwoord 'open' heeft nu namelijk twee betekenissen; we moeten snel vaststellen dat die betekenissen elkaar niet bijten.

▶ **5**. Toon aan dat een open *bol* een open *verzameling* is.

De familie van alle open verzamelingen in X, *de topologie van* X, noteren we met $\mathcal{T}$. De volgende stelling is Stelling 5.2 uit het dictaat Wiskundige Structuren.

0.5. STELLING. *De familie $\mathcal{T}$ voldoet aan de volgende drie eigenschappen.*
(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,
(ii) *als* $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ *dan* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ *en*
(iii) *als* $\{U_i\}_i \subseteq \mathcal{T}$ *dan* $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$.

▶ **6**. a. Bewijs deze stelling.
b. Bewijs dat uit (ii) volgt dat $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ als $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$.

De complementen van open verzamelingen heten *gesloten verzamelingen*. Dus 'A is gesloten' betekent '$X \setminus A$ is open', niets meer en niets minder.

▶ **7**. Ga na dat de collectie $\mathcal{F}$ van gesloten verzamelingen in een metrische ruimte de volgende eigenschappen heeft.
(i) $\varnothing, X \in \mathcal{F}$,
(ii) als $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ dan $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ en
(iii) als $\{F_i\}_i \subseteq \mathcal{F}$ dan $\bigcap_i F_i \in \mathcal{F}$.

▶ **8**. Geeft vijf verschillende verzamelingen in $\mathbb{R}$ die noch open noch gesloten zijn.

We zullen nu een lijst maken van alle *topologische* eigenschappen en noties die bij Wiskundige Structuren genoemd zijn.

inwendig punt: Een punt p is een *inwendig punt* van een verzameling A als er een $\varepsilon > 0$ is met $B(p,\varepsilon) \subseteq A$.

geïsoleerd: Een punt p is een *geïsoleerd punt* van een verzameling A als er een $\varepsilon > 0$ is met $B(p,\varepsilon) \cap A = \{p\}$.

ophopingspunt: Een punt p is een *ophopingspunt* van een verzameling A als voor elke $\varepsilon > 0$ er een $a \in A$ is met $a \neq p$ en $d(a,p) < \varepsilon$. Een andere term hiervoor is *verdichtingspunt*.

randpunt: Een punt p is een *randpunt* van een verzameling A als voor elke $\varepsilon > 0$ de bol $B(p, \varepsilon)$ zowel A als zijn complement $X \setminus A$ snijdt.

uitwendig punt: Een punt is een *uitwendig punt* van een verzameling A als het een inwendig punt van het complement van A is.

convergente rij: Een rij $(x_n)n$ in een metrische ruimte X is *convergent* met *limiet* x als voor elke $\varepsilon > 0$ een N bestaat zó dat voor alle $n \geqslant N$ geldt $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Al deze definities zijn in termen van bollen en hun straal gegoten. Het kan ook in termen van open verzamelingen alleen.

0.6. Definitie. Laat x een punt in een metrische ruimte X zijn, we noemen een deelverzameling A van X een *omgeving* van x als er een open verzameling U bestaat zó dat $x \in U \subseteq A$.

► **9**. Ga na of de volgende verzamelingen omgeving zijn van het gegegeven punt; we werken in $\mathbb{R}$ met de gewone metriek.
a. $\mathbb{Q}$ van 0
b. $[-1, 1]$ van 0
c. $[-1, 1]$ van 1

► **10**. Werk in $\mathbb{R}^2$ met de metriek ρ uit Opgave 2 en ga na of de volgende verzamelingen omgeving zijn van het gegegeven punt:
a. $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ van $(0, 0)$
b. $\{(x, y) : x = 0$ en $|y| < 1\}$ van $(0, 0)$
c. $\{(x, y) : x = 0$ en $|y| < 1\}$ van $(0, \frac{1}{2})$

► **11**. Toon aan: A is een omgeving van x dan en slechts dan als x een inwendig punt van A is.

De volgende opgave geeft aan waarom de bovenstaande eigenschappen *topologisch* worden genoemd: we hoeven alleen te weten wat de open verzamelingen zijn om te controleren of een punt geïsoleerd is of een ophopingspunt, of om te controleren of een rij convergent is.

► **12**. Toon aan dat in bovenstaande lijst equivalente definities ontstaat als bollen vervangen worden door omgevingen.

Twee veelgebruikte afgeleide begrippen zijn die van *inwendige* en *afsluiting*.

0.7. Definitie. Zij X een metrische ruimte en A een deelverzameling van X.

(i) $\operatorname{int} A$, het *inwendige* van A, is de verzameling van alle inwendige punten van A,
(ii) $\operatorname{cl} A$, de *afsluiting* van A, bestaat uit A en al zijn verdichtingspunten.

Dus $x \in \operatorname{int} A$ dan en slechts dan als er een $\varepsilon > 0$ is zó dat $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Een dergelijke karakterizering is er ook voor de punten van $\operatorname{cl} A$.

► **13**. De volgende uitspraken zijn equivalent:
(i) $x \in \operatorname{cl} A$,
(ii) voor elke $\varepsilon > 0$ geldt $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$,
(iii) voor elke omgeving U van x geldt $U \cap A \neq \varnothing$.

▶ **14**. a. Bepaal, in $\mathbb{R}$ met de gewone metriek: $\operatorname{int}\mathbb{Q}$, $\operatorname{cl}\mathbb{Q}$, $\operatorname{int}[0,1]$ en $\operatorname{cl}(0,\pi)$.
b. Bepaal, in $\mathbb{R}$ met de discrete metriek: $\operatorname{int}\mathbb{Q}$, $\operatorname{cl}\mathbb{Q}$, $\operatorname{int}[0,1]$ en $\operatorname{cl}(0,\pi)$.

In een metrische ruimte kun je $\operatorname{cl} A$ ook met behulp van rijtjes beschrijven.

▶ **15**. In een metrische ruimte geldt: $x \in \operatorname{cl} A$ dan en slechts dan als er een rij $(x_n)_n$ in A is die naar x convergeert.

Ten slotte nog een paar eigenschappen van $\operatorname{int} A$ en $\operatorname{cl} A$.

▶ **16**. Toon aan:
a. $\operatorname{int} A$ is open.
b. $\operatorname{cl} A$ is gesloten.
c. Als O open is en $O \subseteq A$ dan $O \subseteq \operatorname{int} A$.
d. Als F gesloten is en $A \subseteq F$ dan $\operatorname{cl} A \subseteq F$.

Dus: $\operatorname{int} A$ is de grootste open verzameling binnen A en $\operatorname{cl} A$ is de kleinste gesloten verzameling waar A in zit.

Dichte verzamelingen

Een verzameling A ligt *dicht* in een ruime X als $\operatorname{cl} A = X$, dus als $U \cap A \neq \varnothing$ voor elke niet-lege open verzameling in X.

0.8. VOORBEELD. $\mathbb{Q}$ is een dichte deelverzameling van $\mathbb{R}$ en ook van $\mathbb{S}$.

Een ruimte heet *separabel* als deze een aftelbare dichte deelverzameling heeft. Dus $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}$ zijn separabel.

▶ **17**. Toon aan: de ruimte uit Opgave 2 is niet separabel.

Continuïteit

Continuïteit is ook met behulp van alléén open verzamelingen te beschrijven; eerst nog even de ε-δ-definitie.

0.9. DEFINITIE. Laat (X, d) en (Y, ρ) twee metrische ruimten zijn en $f : X \to Y$ een afbeelding.

(i) f is *continu in het punt* p van X als voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor elke $x \in X$ geldt als $d(x,p) < \delta$ dan $\rho\big(f(x), f(p)\big) < \varepsilon$. In een formule-met-kwantoren:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\big(d(x,p) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(x), f(p)\big) < \varepsilon\big)$$

(ii) f heet *continu op* X als f continu is in elk punt.

De volgende stelling staat in het dictaat Wiskundige Structuren.

0.10. STELLING. *Een afbeelding $f : X \to Y$ is continu dan en slechts dan als voor elke open deelverzameling U van Y het volledig origineel $f^{-1}[U]$ open is in X.*

Continuïteit in een punt staat niet expliciet in het dictaat Wiskundige Structuren maar zit al impliciet in de definitie opgesloten.

0.11. Stelling. *Laat $f : X \to Y$ een afbeelding tussen metrische ruimten zijn. Dan geldt: f is continu in $p \in X$ dan en slechts dan als voor elke omgeving U van $f(p)$ een omgeving V van p bestaat zó dat $f[V] \subseteq U$ (ofwel $V \subseteq f^{-1}[U]$).*

► **18**. Bewijs deze stelling.

In de wiskunde gaat het er vaak om structuren op één of andere manier te classificeren; daarbij moet duidelijk zijn wanneer we twee structuren 'hetzelfde' zullen noemen en wanneer we ze 'verschillen' vinden. In de topologie gebruken we daarvoor het begrip *homeomorfisme*.

0.12. Definitie. Laat X en Y twee metrische ruimten zijn. Een afbeelding $f : X \to Y$ is een homeomorfisme als f een bijectie is en als zowel f als zijn inverse f^{-1} continu zijn.

Als tussen twee ruimten een homeomorfisme bestaat dan noemen we de ruimten *homeomorf*.

► **19**. Toon aan dat $\mathbb{R}$ en het open interval $(0, 1)$ (met de gewone metriek) homemorf zijn.

► **20**. Definieer $f : [0, 1) \to \mathbb{C}$ door $f(x) = e^{2\pi ix}$. Toon aan dat f continu is en dat $f\big[[0, 1)\big]$ de eenheidscirkel $S^1 = \{z : |z| = 1\}$ is. Is f, als afbeelding van $[0, 1)$ naar S^1, een homeomorfisme?

► **21**. Op $\mathbb{R}$ hebben we twee metrieken: de gewone, d, en de discrete, ρ. Met Id duiden we de identieke afbeelding van $\mathbb{R}$ naar zichzelf aan.
a. Is Id continu als afbeelding van $(\mathbb{R}, \rho)$ naar $(\mathbb{R}, d)$?
b. Is Id continu als afbeelding van $(\mathbb{R}, d)$ naar $(\mathbb{R}, \rho)$?
c. Zijn $(\mathbb{R}, d)$ en $\mathbb{R}, \rho)$ homeomorf?

Nu kunnen we formeel afspreken wat we een *topologische* eigenschap van metrische ruimten zullen noemen. Een eigenschap P van metrische ruimten is topologisch als het volgende geldt: als X en Y homeomorfe metrische ruimten zijn dan heeft X eigenschap P dan en slechts dan als Y eigenschap P heeft.

► **22**. Toon aan dat *rijcompactheid* een topologishe eigenschap is. Een ruimte is rijcompact als elke rij in die ruimte een convergente deelrij heeft.

► **23**. Toon aan dat de intervallen $[0, 1]$ en $(0, 1)$ niet homeomorf zijn.

Samenhang en compactheid

Voor later noemen we nog de volgende drie topologische eigenschappen. Deze zijn in de topologie zelf maar ook in vele toepassingen heel belangsrijk.

splitsbaarheid: Een ruimte X heet *splitsbaar* als er twee niet-lege gesloten deelverzamelingen F en G van X bestaan zó dat $F \cap G = \varnothing$ en $X = F \cup G$.

samenhang: Een ruimte heet *samenhangend* als ze niet splitsbaar is.

compactheid: Een ruimte heet *compact* als elke open overdekking een eindige deeloverdekking heeft.

De volgende twee stellingen worden overal in de Analyse gebruikt.

0.13. Stelling. *Het eenheidsinterval $[0, 1]$ is samenhangend.*

BEWIJS. Neem aan dat $[0,1] = F \cup G$ met F en G gesloten en niet-leeg. We moeten laten zien dat $F \cap G \neq \varnothing$.

Als $0 \in F \cap G$ dan zijn we meteen klaar. Neem dus aan dat, bijvoorbeeld, $0 \in F \setminus G$.

Bekijk nu de verzameling $A = \{a : [0,a] \cap G = \varnothing\}$. Dan is A niet leeg want $0 \in A$; ook geldt: als $a \in A$ en $0 \leqslant b < a$ dan $b \in A$; tenslotte geldt $1 \notin A$ want $[0,1] \cap G = G$ is niet leeg. We concluderen dat A niet-leeg en naar boven begrensd is. Dus bestaat $a^* = \sup A$. We bewijzen dat $a^* \in F \cap G$.

Ten eerste: $[0,a^*) \subseteq F$, want $[0,a^*) \subseteq \bigcup_{a \in A}[0,a]$. Dus a^* is een verdichtingspunt van F en dus een punt van F. Ten tweede: als $\varepsilon > 0$ dan behoort $a^* + \frac{1}{2}\varepsilon$ niet tot A, dus $[0, a^* + \frac{1}{2}\varepsilon] \cap G \neq \varnothing$ en dus $[a^*, a^* + \varepsilon) \cap G \neq \varnothing$, maar dan volgt dat a^* een verdichtingspunt van G is en dus $a^* \in G$. □

0.14. STELLING. *Het eenheidsinterval* $[0,1]$ *is compact.*

BEWIJS. Dit bewijs verloopt ongeveer als het vorige: we maken een niet-lege deelverzameling A van $[0,1]$ en gebruiken zijn supremum om de gewenste conclusie te trekken.

Zij $\mathcal{U}$ een familie open verzamelingen die $[0,1]$ overdekt. Dus voor elke $x \in [0,1]$ is er een $U_x \in \mathcal{U}$ met $x \in U_x$, zelfs is er dan nog een $\varepsilon_x > 0$ zó dat $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq U_x$ want U_x is immers open.

Nu definieren we A als de verzameling van alle a met de eigenschap dat $[0,a]$ door eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ te overdekken is. Duidelijk is dat $0 \in A$, want $\{U_0\}$ overdekt $[0,0]$. Dus ook $[0, \varepsilon_0) \subseteq A$ want $\{U_0\}$ overdekt ook $[0,a]$ als $a < \varepsilon_0$.

Omdat $A \subseteq [0,1]$ is A begrensd en dus bestaat $a^* = \sup A$. Dan geldt $a^* \in A$. Bekijk namelijk $b = a^* - \varepsilon_{a^*}$, dan $b < a^*$, dus is er een $a \in A$ met $b < a$ (want b is geen bovengrens). Er zijn dan U_1, U_2, …, U_k in $\mathcal{U}$ zó dat $[0,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Met één element extra, namelijk U_{a^*}, krijgen we een eindige deeloverdekking van $\mathcal{U}$ voor $[0,a^*]$.

Tenslotte geldt $a^* = 1$; immers als $a^* < 1$ dan nemen we een getal a tussen a^* en $\min\{1, a^* + \varepsilon_{a^*}\}$. Dan wordt het interval $[0,a]$ ook door eindig veel U uit $\mathcal{U}$ overdekt: omdat $a^* \in A$ hebben we er eindig veel nodig voor $[0,a^*]$ en met U_{a^*} erbij geeft dat een eindige overdekking voor $[0,a]$. Dus $a \in A$ en $a > a^*$, een tegenspraak; dus $a^* = 1$. □

Metrische eigenschappen

De volgende eigenschappen zijn echte metrische eigenschappen; de metriek is niet uit de definitie weg te halen:

begrensdheid: Een metrische ruimte (X,d) heet *begrensd* als er een getal M bestaat zó dat $d(x,y) \leqslant M$ voor elke $x, y \in X$.

totale begrensdheid: Een metrische ruimte (X,d) heet *totaal begrensd* als voor elke $\varepsilon > 0$ de open overdekking $\{B_\varepsilon(x) : x \in X\}$ een eindige deeloverdekking heeft.

volledigheid: Een metrische ruimte (X,d) heet *volledig* als elke Cauchy-rij in X convergent is.

Herinner dat een rij $(x_n)_n$ een *Cauchy-rij* is als voor elke $\varepsilon > 0$ een N bestaat zó dat voor alle $m, n \geqslant N$ geldt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

► **24**. Ga na dat bovenstaande eigenschappen niet topologisch zijn door telkens paren homeomorfe ruimten aan te geven waarvan één ruimte de eigenschap wel heeft en de ander niet.

Hoofdstuk 1

Topologische ruimten

We gaan nu 'vergeten' dat we open verzamelingen met behulp van metrieken gemaakt hebben. We zullen structuren bekijken waar alléén een familie 'open' verzamelingen voorhanden is. Allereerst geven we de definitie van een topologie.

1.1. Definitie. Zij X een verzameling. Een *topologie* op X is een collectie $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen van X met de volgende drie eigenschappen (regelrecht uit Stelling 0.5 geciteerd):

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,
(ii) als $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ dan $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ en
(iii) als $\{U_i\}_i \subseteq \mathcal{T}$ dan $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$.

1.2. Definitie. Een *topologische ruimte* is een paar $(X, \mathcal{T})$ waar X een verzameling is en $\mathcal{T}$ een topologie op X.

Voordat we een paar voorbeelden van topologische ruimten gaan bekijken merken we op dat alle *topologische* noties die we in Hoofdstuk 0 besproken hebben zich onmiddelijk naar de situatie van topologische ruimten laten vertalen; we weten dus meteen wanneer we een afbeelding tussen topologische ruimten continu (in een punt) zullen noemen of wanneer een punt een ophopingspunt van een verzameling is.

1.3. Voorbeelden.

1. Op elke verzameling X is $\mathcal{T}_i = \{\varnothing, X\}$ een topologie; de zogeheten *indiscrete topologie*. Dit is de minimale topologie die op X gemaakt kan worden; ga na dat een indiscrete ruimte altijd samenhangend en compact is en dat elke niet-lege deelverzameling dicht ligt. Voorts is elke afbeelding naar X continu.
2. Het andere uiterste is de *discrete topologie*: dit is de collectie 2^X van *alle* deelverzamelingen van X. Deze topologie kennen we al; hij is met behulp van de discrete metriek gedefinieerd. Als X meer dan één punt bevat is de discrete topologie niet samenhangend; $(X, 2^X)$ is compact dan en slechts dan als X eindig is. Elke afbeelding met X als domein is continu.
3. Laat X nu een oneindige verzameling zijn. Definieer
$$\mathcal{T}_{ce} = \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ is eindig}\}.$$
Het is niet moeilijk in te zien dat $\mathcal{T}_{ce}$ een topologie is; de zogeheten *co-eindige topologie*. Een verzameling is dus gesloten dan en slechts dan als zij eindig is of gelijk aan X. Een co-eindige ruimte is altijd samenhangend en compact (ga na).
4. Een klassiek voorbeeld is het volgende: definieer een topologie $\mathcal{T}_s$ op $\mathbb{R}$ door: $U \in \mathcal{T}_s$ dan en slechts dan als voor elke $x \in U$ een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $[x, x+\varepsilon) \subseteq U$.[1]

[1] In deze topologie zijn de getallen alléén van boven te benaderen; denk aan het passen van schoenen: een beetje te groot mag, te klein is nooit goed.

Ga na dat $\mathcal{T}_s$ inderdaad een topologie is. We zullen de topologische ruimte $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ met $\mathbb{S}$ aanduiden. Deze ruimte staat bekend als de *Sorgenfrey lijn*, de topologie $\mathcal{T}_s$ wordt ook wel de *speldentopologie* genoemd omdat hij bepaald wordt door spelden, dat wil zeggen: intervallen van de vorm $[a, b)$ (deze komen terug in het college Maat- en Integratietheorie bij de definitie van de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$).

AFSPRAAK. Als we een metrische ruimte tegenkomen zullen we deze altijd van zijn bijbehorende *metrische topologie* voorzien denken, tenzij uitdrukkelijk anders vermeld. In het bijzonder denken we ons $\mathbb{R}$ altijd voorzien van de gewone topologie.

► **1**. Laat X oneindig zijn en voorzien van de co-eindige topologie. Bewijs dat elke continue afbeelding $f : X \to \mathbb{R}$ constant is.

► **2**. Ga na of de ruimte $\mathbb{S}$ samenhangend is of compact. Toon aan dat de 'Entier' functie gedefinieerd door $x \mapsto [x]$, waar $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$ continu is van $\mathbb{S}$ naar $\mathbb{R}$. Bepaal, in $\mathbb{S}$, het inwendige van $[0, 1]$ en de afsluiting van $(0, 1)$.

► **3**. Bewijs: als $f : X \to Y$ een surjectieve en continue afbeelding is en X is samenhangend dan is ook Y samenhagend.

Deelruimten

Het is heel vaak wel handig om deelverzamelingen van een topologische ruimten ook als topologische ruimten te beschouwen en het liefst op een zo natuurlijk mogelijke manier. Dat kan als volgt.

1.4. DEFINITIE. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte en zij $A \subseteq X$. De familie $\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$ is een topologie op A, de *deelruimtetopologie*. We npoemen $(A, \mathcal{T}_A)$ een *deelruimte* van $(X, \mathcal{T})$.

► **4**. Toon aan:
a. In de deelruimte $[0, 1]$ van $\mathbb{R}$ (met gewone topologie) is $[0, \frac{1}{2})$ open.
b. In de deelruimte $[0, 1]$ van $\mathbb{S}$ is $\{0\}$ open.

► **5**. Toon aan
a. als A open is in X en O is open in A dan is O open in X
b. als A gesloten is in X en g is gesloten in A dan is G gesloten in X

Basis voor een topologie

We hebben hierboven een paar topologieën expliciet opgeschreven, te weten de indiscrete, de discrete en de co-eindige topologie. Bij de topologie van een metrische ruimte en de Sorgenfrey topologie was de beschrijving meer indirect. In deze en de volgende paragraaf zullen we zien hoe topologieën in termen van 'basis-open' verzamelingen beschreven kunnen worden.

Eerst een opgave, deze staat als Stelling 5.1 (ii) in het dictaat Wiskundige Structuren.

► **6**. Een verzameling A in een metrische ruimte X is open dan en slechts dan als deze een vereniging van een familie open bollen is.

De bovenbeschreven relatie tussen de familie van alle open verzamelingen en die van alle open bollen is aanleiding tot de volgende definitie.

1.5. DEFINITIE. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een *basis* voor de ruimte (of voor de topologie) is een deelcollectie $\mathcal{B}$ van $\mathcal{T}$ met de eigenschap dat voor elke $U \in \mathcal{T}$ een deelfamilie $\mathcal{B}'$ van $\mathcal{B}$ bestaat zó dat $U = \bigcup \mathcal{B}'$.

1.6. VOORBEELDEN.

1. Opgave 6 laat zien dat in een metrische ruimte is de familie van alle open bollen een basis voor de topologie is.
2. In de Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is de familie van alle half-open intervallen een basis.

We kunnen aan een collectie deelverzamelingen zien of hij een basis voor een topologie kan zijn; dit is de inhoud van de volgende stelling

1.7. STELLING. *Neem aan dat $\mathcal{B}$ een* basis *voor de topologie $\mathcal{T}$ op de verzameling X is. Dan voldoet $\mathcal{B}$ aan de volgende twee eigenschappen.*

(i) *Als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ en $x \in B_1 \cap B_2$ dan is er een $B \in \mathcal{B}$ zó dat $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$ en*
(ii) $X = \bigcup \mathcal{B}$.

Omgekeerd, als een familie $\mathcal{B}$ aan deze eigenschappen voldoet dan is er een topologie waar $\mathcal{B}$ een basis voor is.

BEWIJS. De tweede eigenschap is duidelijk: ook X is open. De eerste eigenschap volgt uit het feit dat de doorsnede van twee open verzamelingen weer open is: als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ dan bestaat een collectie $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ met $B_1 \cap B_2 = \bigcup \mathcal{B}'$. Kies dan, als $x \in B_1 \cap B_2$ een $B \in \mathcal{B}'$ met $x \in B$.

Als $\mathcal{B}$ aan de basiseigenschappen voldoet dan nemen we voor $\mathcal{T}$ de collectie van alle mogelijke verenigingen van deelfamilies van $\mathcal{B}$. Het is niet moeilijk na te gaan dat $\mathcal{T}$ een topologie op X is. Om te zien dat $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ merken we op dat $B = \bigcup \{B\}$ voor elke $B \in \mathcal{B}$. We hebben voorts $\mathcal{T}$ zo gemaakt dat $\mathcal{B}$ automatisch een basis voor $\mathcal{T}$ is. $\square$

1.8. VOORBEELD. Ga na dat de familie $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ en } a < b\}$ aan de basiseigenschappen voldoet.

Een speciale plaats in de topologie wordt ingenomen door de ruimten met een aftelbare basis. In navolging van HAUSDORFF zegt men dat die ruimten aan het *tweede aftelbaarheidsaxioma*[2] voldoen. Zo heeft $\mathbb{R}$ een aftelbare basis, de familie van alle open intervallen met rationale eindpunten.

► **7**. Bewijs dat elke ruimte die aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet separabel is.

► **8**. Toon aan dat de co-eindige topologie op $\mathbb{R}$ separabel is maar niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet.

► **9**. Bewijs dat $\mathbb{S}$ niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet.

► **10**. a. Toon aan: als $\mathcal{B}$ een basis voor een ruimte X is en $A \subseteq X$ dan is $\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ een basis voor de deelruimtetopologie van A.
b. Als een ruimte aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet dan voldoet elke deelruimte daar ook aan.

► **11**. Laat X en Y topologische ruimten zijn, $f : X \to Y$ een afbeelding en $\mathcal{B}$ een basis voor de topologie van Y. Dan geldt: f is continu dan en slechts dan als $f^{-1}[B]$ open is voor elke $B \in \mathcal{B}$.

---

[2] In het Engels: *The second axiom of countability.* Ruimten die aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoen worden *second countable spaces* genoemd.

Lineair geordende ruimten

Elke lineair geordende verzameling $(X, \prec)$ draagt een natuurlijke topologie, de *ordetopologie*. De natuurlijke basis voor deze topologie wordt gevormd door de *open intervallen* in X. Dat zijn de verzamelingen van de volgende vorm.

- $(x, y) = \{z : x \prec z \prec y\}$;
- $(\leftarrow, y) = \{z : z \prec y\}$;
- $(x, \rightarrow) = \{z : x \prec z\}$;
- $(\leftarrow, \rightarrow) = X$.

1.9. VOORBEELD. De ordetopologie van $\mathbb{R}$ is de natuurlijke topologie.

► **12**. Op $V = [0,1] \times [0,1]$ definieren we een ordening $\prec$ als volgt $(u, v) \prec (x, y)$ als $u < x$ of als $u = x$ en $v < y$.

a. Toon aan dat $\prec$ een lineaire ordening is, de *lexicographische ordening*.

b. De ruimte V is niet separabel.

c. De deelruimte $\{(x, 1) : 0 < x < 1\}$ van V is homeomorf met de Sorgenfrey lijn.

Deze ruimte staat bekend als het *lexicografisch geordend vierkant*.

Lokale bases

Een tweede manier om topologieën te maken is via lokale bases.

1.10. DEFINITIE. Laat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte zijn en $x \in X$. Een *lokale basis* in x is een collectie $\mathcal{B}_x$ open verzamelingen met de eigenschap dat voor elke omgeving U van x er een $B \in \mathcal{B}_x$ is met $x \in B \subseteq U$.

We noemen een lokale basis ook wel een *basis voor de omgevingen* of een *omgevingenbasis*.

1.11. VOORBEELDEN.

1. Het standaardvoorbeeld van een omgevingenbasis is natuurlijk de familie bollen rond een punt in een metrische ruimte. Als $x \in X$, waar (X, d) een metrische ruimte is dan zijn $\{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ en $\{B(x, 2^{-n}) : n \in \mathbb{N}\}$ lokale bases in x.
2. Als $x \in \mathbb{S}$ dan is $\{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ een omgevingenbasis voor x.

We kunnen ook topologieën maken door voor ieder punt x in een verzameling X een familie $\mathcal{B}_x$ te kiezen en deze als lokale bases te gebruiken. Hiertoe moeten we eerst uitzoeken welke eigenschappen zo'n 'toekenning van lokale bases' moet hebben.

1.12. STELLING. *Neem aan dat in de ruimte $(X, \mathcal{T})$ voor iedere $x \in X$ een lokale basis $\mathcal{B}_x$ gekozen is. Dan gelden de volgende eigenschappen.*

(i) *Voor elke x is $\mathcal{B}_x$ niet leeg en $x \in B$ voor elke $B \in \mathcal{B}_x$.*

(ii) *Als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ dan is er een $B \in \mathcal{B}_x$ zó dat $B \subseteq B_1 \cap B_2$.*

(iii) *Als $y \in B \in \mathcal{B}_x$ dan is er een $D \in \mathcal{B}_y$ zó dat $D \subseteq B$.*

In eigenschap (iii) ligt opgesloten dat elk element van $\mathcal{B}_x$ open is; hij is omgeving van al zijn punten.

Neem nu aan dat we voor elk punt x in een verzameling X een collectie deelverzamelingen hebben gekozen zó dat aan (i), (ii) en (iii) van Stelling 1.12 is voldaan. Definieer $\mathcal{T}$ door: $U \in \mathcal{T}$ dan en slechts dan als voor elke $x \in U$ een $B \in \mathcal{B}_x$ bestaat zó dat $B \subseteq U$.

We gaan na dat $\mathcal{T}$ inderdaad een topologie is en dat voor elke x de familie $\mathcal{B}_x$ een lokale basis (voor $\mathcal{T}$) in x is.

Dat $\varnothing \in \mathcal{T}$ is duidelijk (waarom?) en om in te zien dat $X \in \mathcal{T}$ gebruiken we Eigenschap (i). Eigenschap (ii) zorgt er voor dat de doorsnede van twee elementen van $\mathcal{T}$ ook weer tot $\mathcal{T}$ behoort. Dat verenigingen van deelcollecties van $\mathcal{T}$ tot $\mathcal{T}$ behoren is ook niet moeilijk in te zien.

Eigenschap (iii) impliceert dat voor elke x elk element van $\mathcal{B}_x$ tot $\mathcal{T}$ behoort en daarmee volgt uit de definitie van $\mathcal{T}$ dat $\mathcal{B}_x$ inderdaad een omgevingenbasis voor x is.

Ook hier kan men een aftelbaarheidsaxioma formuleren. Een ruimte voldoet aan het *eerste aftelbaarheidsaxioma*[3] als elk punt in de ruimte een aftelbare omgevingenbasis heeft.

1.13. VOORBEELDEN.

1. Elke metrische ruimte voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma: Voor elke x is $\{B(x, 2^{-n}) : n \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare lokale basis.
2. De Sorgenfrey lijn voldoet ook aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

► **13**. a. Laat X een topologische ruimte zijn, $A \subseteq X$ en $x \in A$. Toon aan: als $\mathcal{B}_x$ een omgevingenbasis in x in de ruimte X is dan is $\mathcal{B}_x^A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ een omgevingenbasis in x in de deelruimte A.

b. Als een ruimte aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet dan voldoet elke deelruimte daar ook aan.

► **14**. Als X aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet dan geldt voor elk punt x en elke deelverzameling A van X: $x \in \operatorname{cl} A$ dan en slechts dan als er een rij in A is die naar x convergeert.

1.14. VOORBEELD. We nemen $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$, het bovenhalfvlak. We wijzen voor elk punt in X een lokale basis aan. Voor elk punt (x, y) in X stellen we $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{B(x, y, n) : n \in \mathbb{N}\}$, waar de verzamelingen $B(x, y, n)$ als volgt gedefinieerd zijn.

Voor een punt (x, y) met $y > 0$ en voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we

$$B(x, y, n) = \{(s, t) \in X : \|(s, t) - (x, y)\| < 2^{-n}\},$$

de gewone open cirkelschijf om (x, y) met straal 2^{-n}.

Voor een punt $(x, 0)$ en voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we

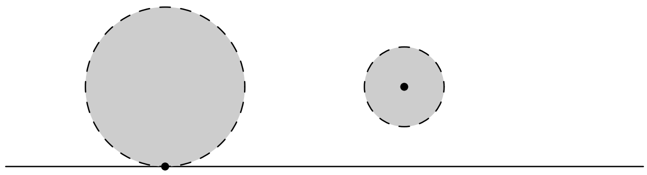
$$B(x, 0, n) = \{(x, 0)\} \cup \{(s, t) \in X : \|(s, t) - (x, 2^{-n})\| < 2^{-n}\},$$

de verzameling die bestaat uit het punt $(x, 0)$ en de open cirkelschijf met straal 2^{-n} die in $(x, 0)$ de x-as raakt, zie Figuur 1. Deze topologische ruimte staat bekend als het *Niemytzki vlak*.

► **15**. Toon aan dat de toekenning in het Niemytzki vlak inderdaad aan de eigenschappen uit Stelling 1.12 voldoet.

Bewijs vervolgens dat het Niemytzki vlak samenhangend is en dat *elke* deelverzameling van de x-as gesloten is.

[3] In het Engels: *The first axiom of countability.* Ruimten die aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoen worden *first countable spaces* genoemd.



FIGUUR 1. Basisomgevingen in het Niemytzki vlak

1.15. VOORBEELD. We nemen de volgende verzameling:

$$X = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{\infty\}) \cup \{\infty\}$$

We kennen elk punt een lokale basis toe:

- $\mathcal{B}_{(m,n)} = \big\{\{(m,n)\}\big\}$ — de punten van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zijn geïsoleerd.
- $\mathcal{B}_{(m,\infty)} = \{U(m,n) : n \in \mathbb{N}\}$, met $U(m,n) = \{(m,\infty)\} \cup \{(m,k) : k \geqslant n\}$
- $\mathcal{B}_\infty = \{B(f,n)\}_{f,n}$. met
  $$B(f,n) = \{\infty\} \cup \big\{(m,\infty) : m \geqslant n\big\} \cup \{(m,k) : k \geqslant f(m), m \geqslant n\}$$
  waarbij $n \in \mathbb{N}$ en $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

► **16**. Toon aan dat in Voorbeeld 1.15 inderdaad een goede toekenning van lokale bases is gedaan. Bewijs dat ∞ in de afsluiting van $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zit maar dat geen enkele rij in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ naar ∞ convergeert. Deze ruimte voldoet dus niet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

Hoofdstuk 2

Scheidingsaxioma's

We zullen in dit deel een aantal nieuwe topologische eigenschappen introduceren. Deze eigenschappen vertellen iets over de mogelijkheid punten te onderscheiden; deze worden dan ook *scheidingsaxioma's* genoemd.

Afspraak. We zullen vanaf nu veelal over 'de topologische ruimte X' spreken en de topologie $\mathcal{T}$ niet altijd expliciet noemen.

Als we met de indiscrete topologie werken kunnen we geen onderscheid maken tussen verschillende punten: er is maar één niet-lege open verzameling en dus hebben alle punten dezelfde familie omgevingen. We zullen eerst een paar eigenschappen formuleren die een steeds groter onderscheid tussen punten mogelijk maken.

Punten van punten scheiden

De eenvoudigste *scheidingseigenschap* is de volgende:

2.1. Definitie. Een topologische ruimte X is een T_0*-ruimte* als de collecties omgevingen per punt verschillen. Met andere woorden: als $x \neq y$ dan is er een omgeving van x waar y niet in zit of omgekeerd.

2.2. Voorbeelden.

1. De eenvoudigste T_0-ruimte is $S = \{0, 1\}$ met als open verzamelingen $\varnothing$, $\{0\}$ en S.
2. Een ander voorbeeld krijgen we door $\mathbb{R}$ te nemen en als basis de collectie $\bigl\{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\bigr\}$.

We zien dat T_0-ruimten al een redelijke hoeveelheid open verzamelingen moeten hebben. De volgende stelling impliceert dat er ten minste zoveel open verzamelingen moet zijn als punten in de ruimte.

2.3. Stelling. *Een ruimte X is een T_0-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x, y \in X$ geldt: als $x \neq y$ dan $\mathrm{cl}\{x\} \neq \mathrm{cl}\{y\}$.*

Bewijs. Als X een T_0-ruimte is en $x \neq y$ dan is er bijvoorbeeld een omgeving van y waar x niet in zit; we zien dat $y \notin \mathrm{cl}\{x\}$.

Omgekeerd laat $x, y \in X$ en stel dat $x \in \mathrm{cl}\{y\}$. Dan volgt meteen dat $\mathrm{cl}\{x\} \subseteq \mathrm{cl}\{y\}$. Als ook nog $y \in \mathrm{cl}\{x\}$ dan volgt $\mathrm{cl}\{y\} \subseteq \mathrm{cl}\{x\}$ en dus $\mathrm{cl}\{x\} = \mathrm{cl}\{y\}$ en daarmee, volgens onze veronderstelling, $x = y$. We zien: als $x \neq y$ dan $x \notin \mathrm{cl}\{y\}$ of $y \notin \mathrm{cl}\{x\}$; in beide gevallen is er een omgeving die het ene punt wel heeft en het andere punt niet. □

► **1**. Bepaal $\mathrm{cl}\{x\}$ voor de punten van de ruimten in de voorbeelden uit 2.2.

Een nog betere manier om punten uit elkaar te houden is door in Definitie 2.1 het woord 'of' te vervangen door 'en'.

2.4. DEFINITIE. Een topologische ruimte X is een T_1*-ruimte* als voor elk tweetal verschillende punten x en y in X omgevingen U van x en V van y bestaan met $x \notin V$ en $y \notin U$.

Een handige karakterizering van T_1-ruimten is de volgende.

2.5. STELLING. *Een ruimte X is een T_1-ruimte dan en slechts dan als $\{x\}$ gesloten is voor elke $x \in X$.*

BEWIJS. Bewijs zelf de implicatie van links naar rechts.

De implicatie van rechts naar links volgt door, bij gegeven x en y, respectievelijk $U = X \setminus \{y\}$ en $V = X \setminus \{x\}$ te nemen. $\square$

De volgende stelling volgt meteen uit de definities of uit de karakterizeringen.

2.6. STELLING. *Elke T_1-ruimte is een T_0-ruimte.*

2.7. VOORBEELDEN.

1. De T_0-ruimten uit Voorbeeld 2.2 zijn geen T_1-ruimten.
2. Elke co-eindige topologie is T_1; de co-eindige topologie is in feite de kleinste T_1-topologie die op een verzameling te maken is.
3. Een eindige T_1-ruimte is discreet (Opgave 2).
4. Elke metrische ruimte is een T_1-ruimte: als $x \neq y$ neem $U = B(x, r)$ en $V = B(x, r)$, waar $r = d(x, y)$.

► **2**. Bewijs: de topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is T_1 dan en slechts dan als $\mathcal{T}_{ce} \subseteq \mathcal{T}$.

Een nog betere puntenscheiding krijgen we als volgt.

2.8. DEFINITIE. Een topologische ruimte X is een T_2- of *Hausdorff ruimte* als elk tweetal verschillende punten in X disjuncte omgevingen heeft; dus als $x \neq y$ dan zijn er een omgeving U van x en een omgeving V van y zó dat $U \cap V = \varnothing$.

Het moge duidelijk zijn dat elke T_2-ruimte een T_1-ruimte is. Het onderscheid wordt nog iets duidelijker door de volgende karakterizeringen.

2.9. STELLING. *Zij X een topologische ruimte.*

(i) *X is een T_1-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ geldt $\{x\} = \bigcap\{U : U$ is een omgeving van $x\}$.*

(ii) *X is een T_2-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ geldt $\{x\} = \bigcap\{\operatorname{cl} U : U$ is een omgeving van $x\}$.*

► **3**. Bewijs Stelling 2.9.

2.10. VOORBEELDEN.

1. Elke metrische ruimte is Hausdorff: als $x \neq y$ dan $B(x, r) \cap B(y, r) = \varnothing$, waar $r = d(x, y)/2$.
2. De Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is Hausdorff: als $x < y$ dan zijn $(-\infty, y)$ en $[y, \infty)$ disjunkte omgevingen van x en y.
3. Ga na dat het Niemytzki vlak en de ruimte uit Voorbeeld 1.15 ook Hausdorff zijn.
4. De verzameling $\mathbb{N}$ met de co-eindige topologie is een T_1-ruimte die niet T_2 is.

De volgende stelling is uiterst handig in de Analyse: als je de waarden van een continue functie voor alle rationale getallen kent dan ligt de functie verder vast.

2.11. Stelling. *Laat f en g continue afbeeldingen zijn van een topologische ruimte X naar een Hausdorff ruimte Y. Dan is de verzameling $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ gesloten in X.*

Bewijs. Doe dit zelf; het is makkelijker te bewijzen dat $X \setminus A$ open is. □

► **4**. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu en additief, dat will zeggen $f(x+y) = f(x) + f(y)$ voor alle x en y; bewijs dat f lineair is, dat wil zeggen $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ voor alle λ en x. *Hint*: Toon aan dat $f(q) = qf(1)$ voor alle rationale getallen q en pas Stelling 2.11 toe.

► **5**. Maak een continue afbeelding f van $\mathbb{R}$ met de gewone topologie naar $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{ce})$ zó dat $\{x : f(x) = x\} = \mathbb{Q}$.

De Hausdorff-eigenschap is ook precies wat nodig is om limieten van rijen uniek te maken.

► **6**. a. Bewijs dat in een Hausdorff ruimte elk rijtje ten hoogste één limiet heeft.
b. Laat ook zien dat in $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{ce})$ de rij $(n)_n$ naar elk punt van $\mathbb{N}$ convergeert.

Punten en gesloten verzamelingen scheiden

We maken onze lijst van scheidingseigenschappen nog iets langer. Om te beginnen scheiden we punten van gesloten verzamelingen.

2.12. Definitie. Een ruimte X is een T_3*-ruimte* als voor elke gesloten verzameling F in X en elk punt $x \in X \setminus F$ disjunkte open verzamelingen U en V bestaan met $x \in U$ en $F \subseteq V$.

Met behulp van complementen krijgen we de volgende karakterizering van de T_3-eigenschap.

2.13. Stelling. *Een ruimte X is een T_3-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ en elke omgeving U van x er een omgeving V van x is zó dat $\operatorname{cl} V \subseteq U$.*

► **7**. Bewijs deze stelling.

2.14. Voorbeelden.

1. Elke metrische ruimte heeft de T_3-eigenschap: als U een omgeving van x is en $B_r(x) \subseteq U$ dan $\operatorname{cl} B_{r/2}(x) \subseteq U$.
2. De Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is een T_3-ruimte: als U een omgeving van x is en $[x, x+\varepsilon) \subseteq U$ neem dan $V = [x, x+\varepsilon)$ want $\operatorname{cl} V = V$.

► **8**. a. Toon aan dat het Niemytzki vlak een T_3-ruimte is. *Hint*: Toon aan dat voor elke punt (x, y) en elke n de inclusie $\operatorname{cl} B(x, y, n+1) \subseteq B(x, y, n)$ geldt.
b. Toon aan dat de ruimte uit Voorbeeld 1.15 een T_3-ruimte is. *Hint*: Elke basisomgeving is open-en-gesloten.

We kunnen de T_3-eigenschap wat interessanter maken door er de T_0-eigenschap bij op te tellen:

2.15. Definitie. Een ruimte X is *regulier* als ze een T_0- en een T_3-ruimte is.

De reden is dat we dan een versterking van de Hausdorff eigenschap krijgen.

2.16. STELLING. *Elke reguliere ruimte is een Hausdorff ruimte.*

BEWIJS. Stel $x \neq y$ in de reguliere ruimte X. Neem aan dat bijvoorbeeld $x \notin \mathrm{cl}\{y\}$; gebruik nu de T_3-eigenschap. □

► **9**. a. Zij $X = [0,1]$ het eenheidsinterval. Geef elk punt $x > 0$ zijn gewone omgevingen. Voor het punt 0 en elke $n \in \mathbb{N}$ zetten we $B(0,n) = [0, 2^{-n}) \setminus \{2^{-m} : m \in \mathbb{N}\}$. Toon an dat dit een legitiem systeem van omgevingenbases oplevert en dat de zo verkregen ruimte wel Hausdorff maar niet regulier is. *Hint*: Toon aan dat $\mathrm{cl}\, B(0,n) = [0, 2^{-n}]$ voor elke n.

b. Neem $X = \mathbb{R}$ en stel

$$\mathcal{T} = \{U \setminus C : \ U \text{ is open in de gewone topologie en } C \text{ is aftelbaar}\}.$$

Toon aan dat $\mathcal{T}$ een Hausdorff topologie is die niet regulier is.

De volgende scheidingseigenschap is de sterkste die we voorlopig zullen beschouwen. De definitie zal niet als een verrassing komen.

2.17. DEFINITIE. Een ruimte X is een *T_4-ruimte* als voor elk tweetal disjunkte gesloten verzamelingen F en G in X disjunkte open verzamelingen U en V bestaan met $F \subseteq U$ en $G \subseteq V$.

2.18. VOORBEELDEN.

1. Elke metrische ruimte heeft de T_4-eigenschap: laat F en G disjuncte en gesloten verzamelingen in de metrische ruimte X zijn. Kies voor elke $x \in F$ een getal $r(x) > 0$ zó dat $B(x, 3r(x)) \cap G = \varnothing$ en kies analoog $r(x) > 0$ voor elke $x \in G$. Stel nu $U = \bigcup\{B_{r(x)}(x) : x \in F\}$ en $V = \bigcup\{B_{r(x)}(x) : x \in G\}$. Ga na dat $U \cap V = \varnothing$ (zelfs $\mathrm{cl}\, U \cap \mathrm{cl}\, V = \varnothing$).
2. De ruimten uit Voorbeeld 2.2 zijn T_4-ruimten omdat daar geen disjunkte gesloten verzamelingen zijn.
3. De Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is een T_4-ruimte: Als F en G gesloten en disjunkt zijn kies dan voor $x \in F$ ($x \in G$) een $\varepsilon_x > 0$ zó dat $[x, x+\varepsilon_x) \cap G = \varnothing$ (of $[x, x+\varepsilon_x) \cap F = \varnothing$). Ga na dat $U = \bigcup\{[x, x+\varepsilon_x) : x \in F\}$ en $V = \bigcup\{[x, x+\varepsilon_x) : x \in G\}$ disjunkt zijn.

Zoals uit bovenstaande voorbeelden blijkt is de combinatie van T_4 en T_0 niet zo interessant. De combinatie van T_4 en T_1 is dat wel.

2.19. DEFINITIE. Een ruimte X is *normaal* als ze een T_1- en een T_4-ruimte is.

Omdat in een T_1-ruimte punten gesloten verzamelingen opleveren is de volgende stelling meteen duidelijk.

2.20. STELLING. *Elke normale ruimte is regulier.*

Niet elke reguliere ruimte is normaal.

2.21. VOORBEELD. Het Niemytzki vlak is niet normaal. De volgende twee verzamelingen zijn gesloten en disjunct: $F = \{(x,0) : x \in \mathbb{Q}\}$ en $G = \{(x,0) : x \in \mathbb{P}\}$ (we gebruiken $\mathbb{P}$ voor de verzameling der irrationale getallen). Laat $U \supseteq F$ en $V \supseteq G$ open verzamelingen zijn; we moeten aantonen dat $U \cap V \neq \varnothing$. Dit zal ons enige zweetdruppels kosten.

We beginnen met $\mathbb{P}$ op te delen in aftelbaar veel stukken: voor elke n stellen we

$$G_n = \{x \in \mathbb{P} : B(x,0,n) \subseteq V\}.$$

We beweren nu: als $x \in \operatorname{cl} G_n$ (ten opzichte van de gewone topologie van $\mathbb{R}$) dan $(x,0) \in \operatorname{cl} V$ (in het Niemytzki vlak).

Stel maar dat $(x_i)_i$ een rij in G_n is met limiet x. We bewijzen dat $B(x,0,n) \setminus \bigl\{(x,0)\bigr\}$ overdekt wordt door de familie $\bigl\{B(x_i,0,n) : i \in \mathbb{N}\bigr\}$. Laat $(p,q) \in B(x,0,n) \setminus \bigl\{(x,0)\bigr\}$ en zij $\varepsilon = 2^{-n} - \bigl\|(x,2^{-n}) - (p,q)\bigr\|$. Voor elke i met $|x_i - x| < \varepsilon$ geldt $\bigl\|(x_i,2^{-n}) - (p,q)\bigr\| < 2^{-n}$ (driehoeksongelijkheid) en dus $(p,q) \in B(x_i,0,n)$. We zien dat $B(x,0,n) \setminus \bigl\{(x,0)\bigr\} \subseteq V$ en dus dat $(x,0) \in \operatorname{cl} V$.

Rest nog te bewijzen dat $\operatorname{cl} G_n \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ voor een $n \in \mathbb{N}$: neem dan q in de doorsnede en kies $m \geqslant n$ met $B(q,0,m) \subseteq U$.

Neem eens aan dat $\operatorname{cl} G_n \cap \mathbb{Q} = \varnothing$ voor alle n. We gebruiken de *Neststelling van Cantor* om tot een tegenspraak te komen.

Neem een aftelling $(q_n)_n$ van de rationale getallen. Kies een gesloten interval I_1 om 0 zó dat $I_1 \cap G_1 = \varnothing$ (dit kan omdat $0 \notin \operatorname{cl} G_1$). Kies vervolgens een deelinterval J_1 van I_1 met $q_1 \notin J_1$. We gaan recursief verder: als J_n gevonden is kiezen we eerst een rationaal getal q in het inwendige van J_n. Vervolgens kiezen we, omdat $q \notin \operatorname{cl} G_{n+1}$, een gesloten interval I_{n+1} om q disjunkt van G_{n+1}. Tenslotte verkleinen we I_{n+1} tot een interval J_{n+1} met $q_{n+1} \notin J_{n+1}$.

Volgens de Neststelling van Cantor (Opgave 11) is er een punt x in $\bigcap_n I_n$. Omdat we alle rationale getallen vermeden hebben zit x niet in $\mathbb{Q}$. Omdat $\mathbb{P} = \bigcup_n G_n$ en omdat we elke G_n hebben vermeden zit x ook niet in $\mathbb{P}$. Dit is een duidelijke tegenspraak.

► **10**. In Voorbeeld 2.21 is verkapt de Stelling van Baire gebruikt. Deze Stelling zegt: *als $(F_n)_n$ een rij nergens dichte deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ is dan is het complement van $\bigcup_n F_n$ een dichte deelverzameling van $\mathbb{R}$.* Een verzameling A is *nergens dicht* als $\operatorname{int} \operatorname{cl} A = \varnothing$.

a. Bewijs de Stelling van Baire. *Hint*: Loop het bewijs in Voorbeeld 2.21 nauwkeurig na.

b. Laat zien hoe de Stelling van Baire in het bewijs dat het Niemytzki vlak niet normaal is gebruikt wordt.

► **11**. Bewijs de *Neststelling van Cantor*: als $\bigl([a_n,b_n]\bigr)_n$ een dalende rij gesloten intervallen in $\mathbb{R}$ is — dat wil zeggen $[a_n,b_n] \supseteq [a_{n+1},b_{n+1}]$ voor alle n — dan geldt $\bigcap_n [a_n,b_n] \neq \varnothing$.

Normale ruimten

Normale ruimten hebben een paar eigenschappen die reguliere ruimten niet hebben; de, voor ons, interessantste is dat normale ruimten een groot aantal continue functies naar $\mathbb{R}$ hebben. Voor we de stelling die al die continue functies levert formuleren en bewijzen moeten we de T_4-eigenschap een beetje herformuleren.

Allereerst een formulering in termen van gesloten en open verzamelingen.

2.22. Lemma. *Een ruimte X is een T_4-ruimte dan en slechts dan als voor elke gesloten verzameling F en elke open verzameling U met $F \subseteq U$ een open verzameling V bestaat met $F \subseteq V \subseteq \operatorname{cl} V \subseteq U$.*

Bewijs. Gegeven F en U bekijk de disjunkte gesloten verzamelingen F en $X \setminus U$. Als $O_1 \supseteq F$ en $O_2 \supseteq X \setminus U$ open en disjunkt zijn dan geldt $\operatorname{cl} O_1 \subseteq U$.

Omgekeerd, als F en G disjunkt en gesloten zijn kies dan $U \supseteq F$ met $\operatorname{cl} U \subseteq X \setminus G$ en neem $V = X \setminus \operatorname{cl} U$. □

We kunnen de T_4-eigenschap ook iets versterken.

2.23. LEMMA. *Als X een T_4-ruimte is en F en G gesloten en disjunkt in X dan bestaan open verzamelingen $U \supseteq F$ en $V \supseteq G$ zó dat* $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \varnothing$.

BEWIJS. Kies disjunkte open verzamelingen $O_1 \supseteq F$ en $O_2 \supseteq G$. Kies dan $U \supseteq F$ met $\operatorname{cl} U \subseteq O_1$ en neem $V = O_2$. □

De volgende stelling staat bekend als het *Lemma van Urysohn*.

2.24. STELLING. *Een ruimte X is een T_4-ruimte dan en slechts dan als voor elk tweetal gesloten en disjunkte verzamelingen F en G een continue functie $f : X \to [0,1]$ bestaat met $f \restriction F \equiv 0$ en $f \restriction G \equiv 1$.*

BEWIJS. Van rechts naar links is niet moeilijk: gegeven de continue functie f kunnen we $U = f^{-1}\big[[0, \frac{1}{2})\big]$ en $V = f^{-1}\big[(\frac{1}{2}, 1]\big]$ nemen.

Van links naar rechts zal wat meer moeite kosten. Laten we eens kijken wat we nodig hebben. Als $f : X \to [0,1]$ een functie is zoals gevraagd dan maken we voor elke $r \in (0,1)$ de open verzameling $U_r = f^{-1}\big[[0,r)\big]$. De zo verkregen familie open verzamelingen bepaalt de functie geheel: er geldt namelijk, voor elke x en elke r,

$$f(x) < r \text{ dan en slechts dan als } x \in U_r,$$

en dus

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in U_r\}, & \text{als } x \in \bigcup_r U_r \text{ en} \\ 1, & \text{als } x \notin \bigcup_r U_r. \end{cases} \tag{$*$}$$

De familie $\{U_r : 0 < r < 1\}$ heeft nog een andere eigenschap namelijk:

$$\text{als } s < r \text{ dan } \operatorname{cl} U_s \subseteq U_r. \tag{$**$}$$

We zien: een continue functie van X naar $\mathbb{R}$ bepaalt een familie open verzamelingen met eigenschap $(**)$ en die familie bepaalt de functie volgens formule $(*)$.

Hierdoor geïnspireerd zullen we proberen een familie open verzamelingen $\{U_r : 0 < r < 1\}$ te maken die aan $(**)$ voldoet en dan via formule $(*)$ een functie definiëren en *aantonen dat die functie continu is.*

We maken eerst de U_r voor elke $r \in \mathbb{Q}$. We nemen hiertoe aftelling $(q_n)_n$ van $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ met $q_0 = 0$ en $q_1 = 1$. Om te beginnen kiezen we twee open verzamelingen U_0 en U_1 zó dat

$$F \subseteq U_0 \subseteq \operatorname{cl} U_0 \subseteq U_1 \subseteq X \setminus G.$$

Vervolgens kiezen we een open verzameling U_{q_2} zó dat

$$\operatorname{cl} U_0 \subseteq U_{q_2} \subseteq \operatorname{cl} U_{q_2} \subseteq U_1.$$

Laat nu U_{q_i} gevonden zijn voor alle $i < n$ (waar $n \geqslant 3$) zó dat

$$\text{als } i, j < n \text{ en } q_i < q_j \text{ dan } \operatorname{cl} U_{q_i} \subseteq U_{q_j}. \tag{$\dagger$}$$

We zoeken een U_{q_n} zó dat $(\dagger)$ ook geldt voor $i, j \leqslant n$. We kijken waar q_n ligt ten opzichte van de q_i met $i < n$; kies $i_0, i_1 < n$ zó dat $q_{i_0} < q_n < q_{i_1}$ en zó dat geen enkele q_i met $i < n$ in het interval (q_{i_0}, q_{i_1}) ligt. We kunnen nu een open verzameling U_{q_n} kiezen met

$$\operatorname{cl} U_{q_{i_0}} \subseteq U_{q_n} \subseteq \operatorname{cl} U_{q_n} \subseteq U_{q_{i_1}}.$$

Aan het eind van deze constructie hebben we een familie $\big\{U_q : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\big\}$ van open verzamelingen met eigenschap $(**)$. Definieer nu $U_r = \bigcup_{q \leqslant r} U_q$ voor $r \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Voor de grotere collectie geldt eigenschap ($**$) ook: als $r < s$ dan kiezen we eerst p en q in $\mathbb{Q}$ met $r < p < q < s$. Dan volgt makkelijk dat $\operatorname{cl} U_r \subseteq \operatorname{cl} U_p \subseteq U_q \subseteq U_s$.

Definieer nu $f : X \to [0,1]$ via formule ($*$). We beweren dat f continu is. Neem $x \in X$ en een interval (r,s) om $f(x)$. Kies p en q met $r < p < f(x) < q < s$ en neem $U = U_q \setminus \operatorname{cl} U_p$; U is open en omdat $p < f(x) < q$ geldt $x \in U$. Verder geldt dat $f[U] \subseteq (r,s)$: als $y \in U$ dan $p \leqslant f(y) \leqslant q$.

Tenslotte: als $x \in F$ dan $x \in U_r$ voor alle r, dus $f(x) = 0$ en als $x \in G$ dan $x \notin \bigcup_r U_r$ dus $f(x) = 1$. □

► **12**. Voor metrische ruimten is het heel makkelijk een functie als in Stelling 2.24 te vinden; ga na dat

$$f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)}$$

voldoet.

In de cursus Maat- en Integratietheorie kom je naast open en gesloten verzamelingen ook F_σ- en G_δ-verzamelingen tegen.

Met behulp van het Lemma van Urysohn kunnen we een fraaie beschrijving van gesloten G_δ-verzamelingen (en dus ook van open F_σ-verzamelingen) geven. Een *F_σ-verzameling* is een verzameling die de vereniging is van aftelbaar veel gesloten verzamelingen. Een *G_δ-verzameling* is een verzameling die de doorsnede is van aftelbaar veel open verzamelingen.

► **13**. a. $\mathbb{Q}$ en $(0,1)$ zijn F_σ-verzamelingen in $\mathbb{R}$.
b. $\mathbb{P}$ en $[0,1]$ zijn G_δ-verzamelingen in $\mathbb{R}$.

► **14**. Bewijs dat $\mathbb{Q}$ geen G_δ-verzameling in $\mathbb{R}$ is of, equivalent, dat $\mathbb{P}$ geen F_σ-verzameling is. *Hint*: Dit kost enige moeite, je hebt de Stelling van Baire nodig.

Gesloten G_δ-verzamelingen in normale ruimten hebben een speciale vorm.

► **15**. Zij X een normale ruimte. Een gesloten verzameling F in X is een G_δ-verzameling dan en slechts dan als een continue functie $f : X \to \mathbb{R}$ bestaat met $F = \{x : f(x) = 0\}$. *Hint*: Van rechts naar links is makkelijk. Van links naar rechts: stel $F = \bigcap_n O_n$ en kies voor elke n een continue $f_n : X \to [0,1]$ met $f_n \restriction F \equiv 0$ en $f_n \restriction (X \setminus O_n) \equiv 1$. Beschouw nu $f = \sum_n 2^{-n} f_n$.

Volledig reguliere ruimten

We besluiten dit hoofdstuk met een eigenschap die tussen normaliteit en regulariteit in zit.

2.25. Definitie. Een topologische ruimte X is een *$T_{3\frac{1}{2}}$-ruimte* als voor elke gesloten deelverzameling F van X en elk punt $x \in X \setminus F$ een continue functie $f : X \to [0,1]$ bestaat met $f(x) = 0$ en $f \restriction F \equiv 1$.

Een ruimte die zowel T_0 als $T_{3\frac{1}{2}}$ is noemen we *volledig regulier* of een *Tychonoff ruimte*.

► **16**. Bewijs dat elke normale ruimte volledig regulier is en dat elke volledig reguliere ruimte regulier is.

► **17**. Bewijs dat elke deelruimte van een volledig reguliere ruimte weer volledig regulier is.

Uit deze beide opgaven volgt dat elke deelruimte van een normale ruimte volledig regulier is. Dit is het beste dat men kan zeggen; niet elke deelruimte van een normale ruimte hoeft normaal te zijn.

2.26. VOORBEELDEN.

1. Daar elke normale ruimte volledig regulier is is elke metrische ruimte volledig regulier; geef hiervan een direct bewijs.
2. De Sorgenfrey lijn is dus ook volledig regulier; dit is ook direct in te zien: als F gesloten is en $x \notin F$ kies dan $y > x$ met $[x, y) \cap F = \varnothing$. De functie f gedefinieerd door
$$f(p) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant p < y \text{ en} \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$
voldoet duidelijk.

2.27. VOORBEELD. Het Niemytzki vlak is volledig regulier; omdat de ruimte niet normaal is moeten we dit met de hand laten zien. Voor de punten boven de x-as kunnen we de gewone metriek van $\mathbb{R}^2$ gebruiken om continue functies te maken.

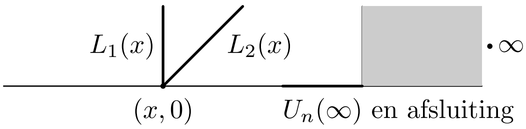
Neem nu een punt $(x, 0)$ op de x-as en definieer voor elke $r \in (0, 1]$
$$U_r = \bigl\{(x, 0)\bigr\} \cup \bigl\{(p, q) : \|(p, q) - (x, r)\| < r\bigr\}.$$
Eenvoudig is in te zien dat elke U_r open is en dat $\operatorname{cl} U_r \subseteq U_s$ als $r < s$. Als in het bewijs van het Lemma van Urysohn definiëren we nu
$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in U_r\}, & \text{als } x \in \bigcup_r U_r \text{ en} \\ 1, & \text{als } x \notin \bigcup_r U_r. \end{cases}$$
Dit geeft een continue functie met $f(x, 0) = 0$ en $f(p, q) = 1$ als $(p, q) \notin U_1$. Door deze functie te herschalen kunnen we voor elke omgeving U van $(x, 0)$ een functie g vinden met $g(x, 0) = 0$ en $g(p, q) = 1$ voor $(p, q) \notin U$.

2.28. VOORBEELD. We maken het plaatje volledig door een voorbeeld te geven van een reguliere ruimte die niet volledig regulier is. We maken hiertoe een topologie op het bovenhalfvlak.

De punten boven de x-as maken we geïsoleerd, dat wil zeggen, als z niet op de x-as ligt dan is $\bigl\{\{z\}\bigr\}$ een lokale basis in z.

Voor een punt $(x, 0)$ op de x-as maken we basisomgevingen als volgt: eerst stellen we $L_1(x) = \bigl\{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant 1\bigr\}$ (het verticale lijntje ter lengte 1 vanuit $(x, 0)$) en $L_2(x) = \bigl\{(x + y, y) : 0 \leqslant y \leqslant 1\bigr\}$ (het lijntje dat onder een hoek van $\pi/4$ vanuit $(x, 0)$ vertrekt). Vervolgens zetten we $L_x = L_1(x) \cup L_2(x)$. Als lokale basis in $(x, 0)$ nemen we $\mathcal{B}_x = \{L_x \setminus F : F \text{ is eindig en } (x, 0) \notin F\}$. De zo verkregen ruimte is regulier, zelfs volledig regulier want elke basisomgeving is open-en-gesloten.

We voegen nog één punt ∞ toe, met basisomgevingen
$$U_n(\infty) = \{\infty\} \cup \bigl\{(x, y) : x \geqslant n\bigr\} \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Ga na dat $\operatorname{cl} U_{n+1} = U_{n+1} \cup \bigl\{(x, 0) : n < x \leqslant n + 1\bigr\}$; de zo verkregen ruimte M is dus nog steeds regulier: $\operatorname{cl} U_{n+1} \subseteq U_n$. Zie ook Figuur 1. De ruimte is niet volledig regulier. Neem maar eens een continue functie $f : M \to [0, 1]$ met $f(x, 0) = 0$ voor $x \leqslant 0$. We bewijzen dat $f(\infty) = 0$.



FIGUUR 1. Omgevingen in Voorbeeld 2.28

Hiertoe merken we eerst het volgende op: voor elke $x \in \mathbb{R}$ is er een aftelbare verzameling $A_x \subseteq L_x$ zó dat als $\vec{p} \in L_x \setminus A_x$ dan $f(\vec{p}) = f(x,0)$; immers voor elke n is er een eindige verzameling F_n zó dat $\bigl|f(\vec{p}) - f(x,0)\bigr| < 2^{-n}$ voor $\vec{p} \in L_x \setminus F_n$, neem nu $A_x = \bigcup_n F_n$.

We bewijzen nu: voor elke n zijn er maar aftelbaar veel $x \in [n, n+1)$ waarvoor $f(x,0) \neq 0$. Voor $n < 0$ klopt dit. Neem $n \geqslant 0$ en neem aan dat het al klopt voor $k < n$. Kies een rij $(x_i)_i$ in $[n-1, n)$ die naar n convergeert en zó dat $f(x_i, 0) = 0$ voor alle i.

Projecteer de vereniging $\bigcup_i \bigl(L_2(x_i) \cap A_{x_i}\bigr)$ op de x-as; we krijgen een aftelbare verzameling A. Neem nu $x \in [n, n+1) \setminus A$; de lijn $L_1(x)$ snijdt dan $L_2(x_i) \setminus A_{x_i}$ voor bijna alle i. Elke omgeving van $(x,0)$ snijdt dus ook bijna alle $L_2(x_i) \setminus A_{x_i}$. Hieruit volgt dat $f(x,0) = 0$.

► **18**. Voeg nog een extra punt $-\infty$ aan de ruimte M uit Voorbeeld 2.28 toe, met basisomgevingen $U_n(-\infty) = \{-\infty\} \cup \operatorname{int}\bigl\{(x,y) : x \leqslant -n\bigr\}$. Deze nieuwe ruimte noemen we M^+.

Bewijs nu dat $f(\infty) = f(-\infty)$ voor elke continue functie $f : M^+ \to \mathbb{R}$.

Hoofdstuk 3

Compactheid

We zullen nu de klasse der compacte Hausdorff ruimten bekijken. Willekeurige compacte ruimten zijn over het algemeen niet zo interessant; de compactheidseigenschap komt pas goed tot z'n recht als de Hausdorffeigenschap erbij wordt opgeteld.

Om te beginnen herhalen we de definitie van compactheid nog maar eens even.

3.1. Definitie. Een topologische ruimte is *compact* als elke open overdekking van die ruimte een eindige deeloverdekking heeft.

3.2. Voorbeelden.

1. Elke eindige ruimte is compact.
2. Elke ruimte met de co-eindige topologie is compact.
3. De Sorgenfrey lijn, het Niemytzki vlak en de ruimte uit Voorbeeld 1.15 zijn niet compact.
4. Elk gesloten en begrensd interval in $\mathbb{R}$ is compact, ten opzichte van de gewone topologie, zie Stelling 0.14.

Door in de definitie over te gaan op complementen krijgen we de volgende herformulering van compactheid. Een ruimte is compact dan en slechts dan als elke familie gesloten verzamelingen met lege doorsnede een eindige deelfamilie heeft die ook een lege doorsnede heeft.

In de praktijk gebruiken we de contrapositieve formulering:

3.3. Stelling. *Een ruimte is compact dan en slechts dan als elke familie gesloten verzamelingen waarvan elke eindige deelfamilie een niet-lege doorsnede heeft zelf ook een niet-lege doorsnede heeft.*

In plaats van de zin 'elke eindige deelfamilie heeft een niet-lege doorsnede' zeggen we dat de familie de *eindige doorsnede eigenschap*[1]heeft.

We zullen nu wat eigenschappen van compacte ruimten bekijken; sommige van deze eigenschappen kennen we in feite al van de cursus Wisundige Structuren, maar dan voor rijcompacte ruimten.

3.4. Stelling. *Zij $f : X \to Y$ een continue surjectieve afbeelding, waarbij X een compacte ruimte is, dan is Y ook compact.*

Bewijs. Als $\mathcal{V}$ een open overdekking van Y is dan is $\mathcal{U} = \{f^{-1}[V] : V \in \mathcal{V}\}$ een open overdekking van X. Een eindige deeloverdekking van $\mathcal{U}$ bepaalt een eindige deeloverdekking van $\mathcal{V}$. $\square$

[1]Engels: *finite intersection property.*

Voor een deelruimte $(A, \mathcal{T}_A)$ van een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ zou je compactheid op twee manieren kunne definiëren. Inwendig, door A als ruimte op zichzelf te beschouwen, of uitwendig: als $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ en $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ dan is er een eindige deelfamilie van $\mathcal{U}$ die A overdekt.

▶ **1**. Bewijs dat voor een deelruimte de bovenstaande definities van compactheid equivalent zijn.

3.5. Stelling. *Elke gesloten deelruimte van een compacte ruimte is compact.*

Bewijs. We gebruiken de 'uitwendige' formulering. Zij A gesloten in X en $\mathcal{U}$ is een familie open verzamelingen met $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$; dan is $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ een open overdekking van X. Dan bepaalt een eindige deeloverdekking van $\mathcal{V}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{U}$. □

De stelling dat compacte deelruimten van metrische ruimten gesloten zijn geldt niet voor willekeurige topologische ruimten.

3.6. Voorbeeld. Neem $\mathbb{N}$ met de co-eindige topologie en neem de deelruimte $2\mathbb{N}$. Dan is $2\mathbb{N}$ compact (want zij draagt de co-eindige topologie) maar niet gesloten.

We kunnen wel de volgende stelling bewijzen.

3.7. Stelling. *Zij X een Hausdorff ruimte en Y een compacte deelruimte van X, dan is Y gesloten in X.*

Bewijs. Het bewijs is instructief genoeg om volledig na te lopen.

Zij $x \in X \setminus Y$; we zoeken een omgeving U van x die disjunct is van Y. Kies hiertoe voor elke $y \in Y$ een omgeving U_y van x en een omgeving V_y van y zó dat $U_y \cap V_y = \varnothing$.

We hebben nu een open overdekking van Y: de familie $\{V_y : y \in Y\}$. Neem een eindige deeloverdekking, zeg $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_k}\}$.

Maak nu $U = \bigcap_{i=1}^k U_{y_i}$ en $V = \bigcup_{i=1}^k V_{y_i}$; dan zijn U en V disjunct, x is een element van U en $Y \subseteq V$.

We hebben dus niet alleen laten zien dat x een omgeving heeft die disjunct is van Y, we hebben zelfs disjuncte omgevingen voor x en Y gevonden. □

Door het bewijs van deze stelling even na te lopen krijgen we vrijwel meteen de volgende stelling cadeau.

3.8. Stelling. *Elke compacte Hausdorff ruimte is regulier.*

En als we het bewijs nog beter bekijken dan zien we ook dat de volgende stelling waar is.

3.9. Stelling. *Elke compacte Hausdorff ruimte is normaal.*

▶ **2**. We bekijken het lexicografisch geordend vierkant V, zie Opgave 12.

a. Bewijs dat de ordening $\prec$ op V *dicht* is: als $x \prec y$ dan is er een z met $x \prec z \prec y$.

b. Bewijs dat de ordening $\prec$ op V *volledig* is: elke niet-lege deelverzameling van V heeft een infinum en een supremum.

c. Bewijs dat V samenhangend is. *Hint*: Zie het bewijs van Stelling 0.13

d. Bewijs dat V compact is. *Hint*: Zie het bewijs van Stelling 0.14

We sluiten dit hoofdstuk af met een bewijs van een stelling die bij Wiskundige Structuren wel genoemd maar niet bewezen is.

3.10. STELLING. *Een metrische ruimte is compact dan en slechts dan als deze rijcompact is.*

BEWIJS. Zij (X, d) een compacte metrische ruimte en $(x_n)_n$ een rij in X. Voor elke n definiëren we $F_n = \mathrm{cl}\{x_k : k \geqslant n\}$. De familie $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ bestaat uit gesloten verzamelingen en heeft de eindige doorrsnede eigenschap: elke eindige deelfamilie heeft een kleinste element. We passen Stelling 3.3 toe en nemen een punt $x \in \bigcap_n F_n$. We construeren een deelrij van $(x_n)_n$ die naar x convergeert, als volgt. Kies n_1 zó dat $x_{n_1} \in B(x, \frac{1}{2})$ (dat kan want $x \in \mathrm{cl}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$); vervolgens kiezen we $n_2 > n_1$ met $x_{n_2} \in B(x, \frac{1}{4})$ (want $x \in \mathrm{cl}\{x_n : n > n_1\}$) ... kies $n_k > n_{k-1}$ zó dat $x_{n_k} \in B(x, 2^{-k})$ (want $x \in \mathrm{cl}\{x_n : n > n_{k-1}\}$) ..., de zo verkregen deelrij $(x_{n_k})_k$ convergeert naar x.

Het bewijs van de omgekeerde implicatie gaat in twee stappen.

Ten eerste: zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X. Er bestaat een $r > 0$ zó dat voor elke x een $U_x \in \mathcal{U}$ bestaat met $B(x, r) \subseteq U_x$. Het bewijs gaat uit het ongerijmde. Als zo'n r niet bestaat moet er voor elke n een x_n zijn zó dat er *geen* $U \in \mathcal{U}$ is met $B(x_n, 2^{-n}) \subseteq U$. De rij $(x_n)_n$ heeft een convergente deelrij $(x_{n_k})_k$ met limiet x. Kies een $U \in \mathcal{U}$ met $x \in U$ en een m zó dat $B(x, 2^{-m}) \subseteq U$. Neem nu een k zó dat $n_k > m$ en $x_{n_k} \in B(x, 2^{-m-1})$. Omdat $n_k \geqslant m + 1$ volgt nu

$$B(x_{n_k}, 2^{-n_k}) \subseteq B(x_{n_k}, 2^{-m-1}) \subseteq B(x, 2^{-m}).$$

in tegenspraak met de keuze van x_{n_k}.

Ten tweede: voor elke $r > 0$ bestaat een eindige verzameling F zó dat $X = \bigcup\{B(x, r) : x \in F\}$. Dit bewijzen we ook uit het ongerijmde. Als zo'n F niet bestaat kunnen we punten x_1, x_1, x_2, ... kiezen zó dat telkens $x_n \notin \{B(x_k, r) : k < n\}$. Dan volgt dat $d(x_m, x_n) \geqslant r$ als $m \neq n$, maar een rij met deze eigenschap kan geen convergente deelrij hebben.

Als nu $\mathcal{U}$ een openoverdekking is bepalen we eerst $r > 0$ als in de eerste stap, en dan een eindige verzameling F als in de tweede stap. Voor elke $x \in F$ is er een $U_x \in \mathcal{U}$ met $B(x, r) \subseteq U_x$, dus $\{U_x : x \in F\}$ is een eindige deeloverdekking van $\mathcal{U}$. □

► **3**. Bewijs dat een rij $(x_n)_n$ die voldoet aan $d(x_m, x_n) \geqslant r$ als $m \neq n$ geen convergente deelrij heeft.

3.11. *Opmerking.* Het getal r dat in de eerste stap in het bewijs werdt bepaald wordt een *Lebesgue-getal* van de overdekking genoemd.

Hoofdstuk 4

Producten en Quotiënten

Een fundamenteel stuk gereedschap in de topologie is dat van het product van topologische ruimten. Men gebruikt de producttopologie zowel bij het construeren van tegenvoorbeelden als bij het bewijzen van stellingen.

We voeren eerst eindige producten in en laten vervolgens zien hoe men het product van oneindig veel topologische ruimten maakt.

Aan het eind van dit hoofdstuk laten we zien hoe je door dingen aan elkaar te plakken nieuwe topologische ruimten kunt creëren.

Eindige producten

Om te beginnen de definitie van het product van een eindig aantal verzamelingen.

4.1. Definitie. Laat X_1, X_2,…, X_n een eindig aantal verzamelingen zijn. Het *product* van die verzamelingen is de verzameling van alle (geordende) n-tallen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die voldoen aan $x_i \in X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

We noteren het product als $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ of $\prod_{i=1}^n X_i$.

4.2. Voorbeelden.
1. Volgens deze definitie is $\mathbb{R}^n$ inderdaad het product van n kopiën van $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ is dus de verzameling van punten in het vlak waarvan de tweede coördinaat rationaal is.

▶ **1**. Een open rechthoek in $\mathbb{R}^2$ is een verzamelimg van de vorm $(a, b) \times (c, d)$, waarbij (a, b) en (c, d) open intervallen zijn.

a. Toon aan: elke open rechthoek is een open verzameling.

b. De familie van alle open rechthoeken is een basis voor de topologie van $\mathbb{R}^2$.

Het idee uit deze opgave gebruiken we om een topologie op andere producten te maken.

4.3. Definitie. Laat $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, …, $(X_n, \mathcal{T}_n)$ een eindige familie topologische ruimten zijn.

Een *open blok* in $\prod_{i=1}^n X_i$ is een verzameling van de vorm $\prod_{i=1}^n U_i$ waar telkens U_i open is in X_i.

4.4. Lemma. *De familie van open blokken is een basis voor een topologie op* $\prod_{i=1}^n X_i$.

Bewijs. Ga zelf na dat de doorsnede van twee open blokken weer een open blok is en dat de open blokken het product overdekken. Pas vervolgens Stelling 1.7 toe. □

4.5. Definitie. Laat $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, …, $(X_n, \mathcal{T}_n)$ een eindige familie topologische ruimten zijn.

De *producttopologie* op $\prod_{i=1}^n X_i$ is de topologie die de familie der open blokken als basis heeft.

De verzameling $\prod_{i=1}^n X_i$ met de producttopologie noemen we het *product* van de ruimten $(X_1, \mathcal{T}_1)$, ..., $(X_n, \mathcal{T}_n)$.

Bij de definitie van de producttopologie hebben we ons laten leiden door de situatie in $\mathbb{R}^n$. Er is nog een andere reden om de producttopologie te definiëren zoals we dat gedaan hebben: de projecties van het product naar de factoren zijn continu en de producttopologie is de 'zuinigste' topologie die dit klaarspeelt.

4.6. DEFINITIE. Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$ een product van een n-tal verzamelingen en $i \leqslant n$. De afbeelding $\pi_i : X \to X_i$ gedefinieerd door $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ heet de *projectie op de i-de coördinaat of factor*.

4.7. STELLING. *Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$ een product van een n-tal topologische ruimten. Dan is elke projectie $\pi_i : X \to X_i$ continu. Elke topologie die de projecties continu maakt omvat de producttopologie.*

BEWIJS. Dat elke π_i continu is is eenvoudig: als $U \subseteq X_i$ open is dan is $\pi_i^{-1}[U]$ een open blok (wat zijn de factoren?).

Omgekeerd, stel $\mathcal{T}$ is een topologie die de projecties continu maakt. Dan volgt meteen dat voor elke i en elke open verzameling U van X_i het open blok $\pi_i^{-1}[U]$ tot $\mathcal{T}$ behoort. Elke eindige doorsnede van dit soort open blokken behoort dan ook tot $\mathcal{T}$ (want $\mathcal{T}$ is een topologie); maar zo krijgen we nu net alle open blokken.

Conclusie: $\mathcal{T}$ bevat alle open blokken en dus ook willekeurige verenigingen van open blokken. Maar dit is precies wat we wilden aantonen. $\square$

Met behulp hiervan kunnen we laten zien dat continuïteit van een afbeelding *naar* een product hetzelfde is als coördinaatsgewijze continuïteit.

4.8. STELLING. *Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$ een product van een n-tal topologische ruimten. Dan geldt: een afbeelding $f : Y \to X$ is continu dan en slechts dan als alle samenstellingen $\pi_i \circ f$ continu zijn.*

BEWIJS. Als f continu is, dan is zeker elke $\pi_i \circ f$ continu. (Ga na!)

Omgekeerd, neem aan dat elke samenstelling $\pi_i \circ f$ continu is. Zij $y \in Y$, en zij $U = \prod_i U_i$ een basisomgeving van $f(y)$. Nu geldt voor $z \in Y$ dat $f(z) \in U$ dan en slechts dan als voor elke i de i-de coördinaat van $f(z)$ tot U_i behoort. Die i-de coördinaat is precies $\pi_i\bigl(f(z)\bigr)$.

We kunnen dus narekenen dat

$$f^{-1}[U] = \bigcap_{i=1}^n (\pi_i \circ f)^{-1}[U_i],$$

waarmee is aangetoond dat $f^{-1}[U]$ een omgeving van y is. $\square$

In het algemeen zullen we in een situatie als deze de afbeelding $\pi_i \circ f$ noteren als f_i.

Omgekeerd kunnen we uit een stel afbeeldingen $f_i : Y \to X_i$ een afbeelding f van Y naar X maken: definieer maar $f(y) = \bigl(f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y)\bigr)$. De afbeelding f heet wel de *diagonaal* van de afbeeldingen f_1, f_2, ..., f_n. We noteren de diagonaal als $f = \triangle_{i=1}^n f_i$ of $f = f_1 \triangle f_2 \triangle \cdots \triangle f_n$.

▶ **2**. Laat X en Y topologische ruimten zijn en $A \subseteq X$ en $B \subseteq Y$. Toon aan
a. $\operatorname{cl}(A \times B) = \operatorname{cl} A \times \operatorname{cl} B$
b. $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$
c. $\partial(A \times B) = (\operatorname{cl} A \times \partial B) \cup (\partial A \times \operatorname{cl} B)$

▶ **3**. a. Toon aan: een ruime X is Hausdorff dan en slechts dan als de *diagonaal* $\Delta X = \{(x,x) : x \in X\}$ een gesloten verzameling in het product $X \times X$ is.
b. Laat $\mathbb{N}$ voorzien zijn van de co-eindige topologie. Toon aan dat $\Delta\mathbb{N}$ discht ligt in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Bij Wiskundige Structuren is bewezen dat elk begrensd en gesloten blok in $\mathbb{R}^n$ rijcompact is. Het bewijs van die stelling toont aan dat het product van eindig veel rijcompacte ruimten weer rijcompact is. Voor compactheid geldt deze stelling ook.

Voor we die stelling formuleren eerst het volgende lemma.

4.9. LEMMA. *Laat C en D compacte deelverzamelingen zijn van respectievelijk de ruimten X en Y en zij O een omgeving van $C \times D$. Dan bestaan omgevingen U van C en V van D zó dat $U \times V \subseteq O$.*

BEWIJS. Neem eerst $x \in C$ vast en kies voor elke $y \in D$ omgevingen W_y van x en V_y van y met $W_y \times V_y \subseteq O$. Omdat D compact is zijn er $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in D zó dat $D \subseteq V^x = \bigcup_i V_{y_i}$. Definieer $U_x = \bigcap_i W_{y_i}$; dan volgt $\{x\} \times D \subseteq U_x \times V^x \subseteq O$.

Gebruik nu de compactheid van C om $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in C te vinden zó dat $C \subseteq U = \bigcup_i U_{x_i}$. Definieer nu $V = \bigcap_i V^{x_i}$, dan volgt $C \times D \subseteq U \times V \subseteq O$. □

Een goed bewijs is meer dan één stelling waard; het bovenstaande bewijs levert ogenblikkelijk de aangekondigde stelling.

4.10. STELLING. *Het product van een eindig aantal compacte topologische ruimten is compact.*

BEWIJS. We bewijzen de stelling voor een product van twee compacte ruimten X en Y; de stelling zelf volgt dan met behulp van volledige inductie.

Laat $\mathcal{O}$ een open overdekking van $X \times Y$. Neem eerst $x \in X$ vast en kies voor elke $y \in Y$ een $O_{x,y} \in \mathcal{O}$ èn omgevingen W_y van x en V_y van y met $W_y \times V_y \subseteq O_{x,y}$. Omdat Y compact is zijn er $y_1, y_2, \ldots, y_{n_x}$ in Y zó dat $Y \subseteq V^x = \bigcup_i V_{y_i}$. Definieer $U_x = \bigcap_i W_{y_i}$; dan volgt $\{x\} \times Y \subseteq U_x \times Y \subseteq \bigcup_i O_{x,y_i}$.

Gebruik nu de compactheid van X om $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in X te vinden zó dat $X \subseteq U = \bigcup_j U_{x_j}$. Dan is $\{O_{x_j,y_i} : i \leqslant n_{x_j}, j \leqslant m\}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{O}$. □

Het product van samenhangende ruimten is ook weer samenhangend.

4.11. STELLING. *Het product van eindig veel samenhangende ruimten is samenhangend.*

BEWIJS. We bewijzen de stelling voor een product van twee samenhangende ruimten X en Y; de stelling zelf volgt dan met behulp van volledige inductie.

Kies $y \in Y$ vast. De 'horizontale lijn' $X \times \{y\}$ is homeomorf met X en dus samenhangend. Evenzo is elke 'verticale lijn $\{x\} \times Y$ samenhangend.

Stel nu dat $X \times Y = F \cup G$ met F en G gesloten en $F \cap G = \varnothing$; te bewijzen $F = \varnothing$ of $G = \varnothing$.

Omdat F en G geen splitsing van $X \times \{y\}$ kunnen veroorzaken moet deze 'lijn' geheel binnen F of geheel binnen G liggen. We nemen aan dat $X \times \{y\} \subseteq F$. Om dezelfde reden ligt elke verticale lijn ook geheel binnen F of G; maar voor elke x geldt $(x, y) \in F \cap (\{x\} \times Y)$ en *dus* $\{x\} \times Y \subseteq F$. Maar dan $X \times Y \subseteq F$ en dus $G = \varnothing$. $\square$

► **4**. Bewijs voor elk van de onderstaande eigenschappen dat het product de eigenschap heeft, zodra elke factor deze heeft.

T_0, T_1, T_2, regulier, volledig regulier en het hebben van een aftelbare basis.

► **5**. Het product van de Sorgenfrey lijn met zichzelf is niet normaal. *Hint*: Bekijk op de 'nevendiagonaal' de verzamelingen $Q = \bigl\{(q, -q) : q \in \mathbb{Q}\bigr\}$ en $P = \bigl\{(p, -p) : p \in \mathbb{P}\bigr\}$. Laat zien dat Q en P gesloten zijn. Pas nu het argument voor het Niemytzki vlak uit Voorbeeld 2.21 aan.

► **6**. Het product van een eindig aantal metrizeerbare topologische ruimten is metrizeerbaar. *Hint*: Definieer, naar analogie met $\mathbb{R}^n$, een metriek op $\prod_{i=1}^n X_i$ door

$$d\bigl((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\bigr) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i),$$

waar telkens d_i een metriek op X_i is die de topologie genereert.

Compactheid en gesloten afbeeldingen

Lemma 4.9 geeft ons nog een karakterisering van compactheid in termen van gesloten afbeeldingen. Een (continue) afbeelding $f : X \to Y$ is *gesloten* als voor elke gesloten deelverzameling F van X het beeld $f[F]$ gesloten is.

4.12. VOORBEELD. De projectie van $\mathbb{R}^2$ op de x-as is *niet* gesloten. *Hint*: Denk aan de hyperbool $\{(x, y) : xy = 1\}$.

4.13. STELLING. *Een ruimte X is compact dan en slechts dan als voor elke ruimte Y de projectie $\pi : Y \times X \to Y$ een gesloten afbeelding is.*

BEWIJS. Laat $F \subseteq X \times Y$ gesloten zijn en $y \in Y \setminus \pi[F]$; dit laatste betekent dat $(X \times \{y\}) \cap F = \varnothing$. Er zijn dus, wegens Lemma 4.9, open verzamelingen U en V in X en Y met $X \times \{y\} \subseteq U \times V$ en $(U \times V) \cap F = \varnothing$. Maar dit betekent dat $U = X$, dus $(X \times V) \cap F = \varnothing$ en dit laatste betekent weer dat $V \cap \pi[F] = \varnothing$, dus y is inwendig punt van $Y \setminus \pi[F]$.

Omgekeerd nemen we aan dat X niet compact is en maken een ruimte Y zó dat de projectie $\pi : X \times Y \to Y$ niet gesloten is. Hiertoe passen we Stelling 3.3 toe: we vinden een familie $\mathcal{F}$ van gesloten verzamelingen met de eindige doorsnede eigenschap die zelf een lege doorsnede heeft.

We nemen $Y = X \cup \{\mathcal{F}\}$. Elk punt in X wordt geïsoleerd en een lokale basis in $\mathcal{F}$ wordt gevormde door alle verzamelingen van de vorm $\{\mathcal{F}\} \cup \bigcap \mathcal{F}'$ met $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ eindig. Merk op $\mathcal{F}$ in de afsluiting van X zit, dus X is niet gesloten in Y. Onze gesloten verzameling is $G = \operatorname{cl}\bigl\{(x, x) : x \in X\bigr\}$ (de afsluiting van de diagonaal). We bewijzen dat $\pi[G] = X$, dus $\pi[G]$ is niet gesloten.

We hoeven alleen te laten zien dat $\mathcal{F} \notin \pi[G]$, ofwel dat voor elke $x \in X$ het punt $(x, \mathcal{F})$ niet in G zit. Welnu, omdat $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$ is er een $F \in \mathcal{F}$ met $x \notin F$. Dan is $\{x\} \times F$ een omgeving van $(x, \mathcal{F})$ dis disjunct is van de diagonaal. $\square$

Oneindige producten

Om te beginnen moeten we afspreken wat het product van een willekeurige familie verzamelingen zou moeten zijn. Het antwoord ligt, na enig nadenken, eigenlijk voor de hand; als we eindig veel—zeg n—verzamelingen hebben dan bestaat het product uit geordende n-tallen punten waarbij telkens de i-de coördinaat uit de i-de verzameling komt. Zo'n n-tal is in feite een functie met domein $\{1, 2, \ldots, n\}$ die voor elke i een punt in X_i kiest—een keuzefunctie.

4.14. Definitie. Laat $\{X_t\}_{t\in T}$ een familie verzamelingen zijn. Het *product* van die verzamelingen is gedefinieerd als de verzameling van alle keuzefuncties van die familie; we noteren het product als $\prod_{t\in T} X_t$.

Dus $x \in \prod_{t\in T} X_t$ dan en slechts dan als x een functie is met domein T zó dat $x(t) \in X_t$ voor alle t. Om de suggestie van coördinaten te versterken schrijven we x_t in plaats van $x(t)$ en $x = (x_t)_{t\in T}$.

Vervolgens nemen we aan dat elke X_t een topologische ruimte is, met topologie $\mathcal{T}_t$. De vraag is nu hoe we $\prod_{t\in T} X_t$ van een topologie zullen voorzien. We laten ons leiden door een natuurlijke eis, namelijk dat de projecties continu moeten zijn en dat dit zo zuinig mogelijk moet gebeuren. Vergelijk hiertoe Stelling 4.7.

4.15. Definitie. Zij $X = \prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie verzamelingen en neem $s \in T$. De afbeelding $\pi_s : X \to X_s$ gedefinieerd door $\pi_s\bigl((x_t)_{t\in T}\bigr) = x_s$ heet de *projectie op de s-de coördinaat of factor*.

Als we willen dat elke projectie continu is dan moet voor elke t en voor elke open verzameling U in X_t het volledig origineel $\pi_t^{-1}[U]$ open zijn. Voorts moeten eindige doorsneden van dit soort verzamelingen ook weer open zijn. Dit leidt ons ertoe een speciaal soort open blokken te beschouwen die we, ietwat slordig, eindige open blokken zullen noemen.

4.16. Definitie. Zij $X = \prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie topologische ruimten. Een *eindig open blok* in X is een verzameling van de vorm $\prod_{t\in T} U_t$, waarbij U_t een open deelverzameling van X_t is voor elke t èn waarbij voor ten hoogste eindig veel t geldt dat $U_t \neq X_t$.

Nu is het product zelf een eindig open blok en de doorsnede van twee eindige open blokken is weer een eindig open blok. De familie der eindige open blokken is dus een basis voor een topologie op het product. Dit wordt dan de producttopologie.

4.17. Definitie. Zij $X = \prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie topologische ruimten. De *producttopologie* op X is de topologie die de familie der eindige open blokken als basis heeft.

De verzameling X met de producttopologie noemen we het *product* van de familie ruimten $\bigl\{(X_t, \mathcal{T}_t) : t \in T\bigr\}$.

De geldigheid van de volgende stelling hebben we als het ware gewoon geforceerd.

4.18. Stelling. *Zij $X = \prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie topologische ruimten. Dan is elke projectie $\pi_t : X \to X_t$ continu. Elke andere topologie die ook de projecties continu maakt is groter dan de producttopologie.*

Het bewijs staat in feite hierboven en is geheel analoog aan dat van Stelling 4.7. Stelling 4.8, in aangepaste vorm, geldt ook.

4.19. STELLING. *Zij* $X = \prod_{t\in T} X_t$ *een product van een familie topologische ruimten. Dan geldt: een afbeelding* $f : Y \to X$ *is continu dan en slechts dan als alle samenstellingen* $\pi_t \circ f$ *continu zijn.*

Het bewijs levert geen nieuwe problemen op; we gebruiken immers *eindige* open blokken om de topologie te maken.

Tenslotte kunnen we uit een familie afbeeldingen $f_t : Y \to X_t$ weer een afbeelding f van Y naar X maken via $f(y) = \bigl(f_t(y)\bigr)_{t\in T}$. We noemen f weer de *diagonaal* van de afbeeldingen $\{f_t\}_{t\in T}$. De notatie blijft dezelfde: $f = \triangle_{t\in T} f_t$.

► **7**. Bewijs voor elk van de onderstaande eigenschappen dat het product de eigenschap heeft, zodra elke factor deze heeft.

T_0, T_1, T_2, regulier en volledig regulier.

► **8**. Bewijs: Een aftelbaar product van ruimten met een aftelbare basis heeft zelf ook een aftelbare basis.

4.20. STELLING. *Zij* $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *een product van een aftelbare familie metrizeerbare ruimten. Dan is* X *zelf ook metrizeerbaar.*

BEWIJS. We kunnen op elke ruimte X_n een metriek d_n kiezen die de topologie voortbrengt en die begrensd is door 1. We definiëren vervolgens een metriek op X door

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n).$$

Het is eenvoudig na te gaan dat d een metriek is. Het kost iets meer moeite na te gaan dat d de producttopologie voortbrengt.

Zij U open in de producttopologie en $x \in U$; we moeten een $\varepsilon > 0$ vinden zó dat $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Kies eerst een eindig open blok $\prod_n U_n$ met $x \in \prod_n U_n \subseteq U$ en kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $U_n = X_n$ als $n \geqslant N$. Vervolgens bepalen we voor elke $n < N$ een $\varepsilon_n > 0$ zó dat $B_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq U_n$. Als we nu $\varepsilon > 0$ zó kunnen bepalen dat $d(x, y) < \varepsilon$ impliceert dat $d_n(x_n, y_n) < \varepsilon_n$ voor elke $n < N$ dan zijn we klaar (ga na dat dan $B_\varepsilon(x) \subseteq \prod_n U_n$).

Welnu, voor elke n geldt $d_n(x_n, y_n) \leqslant 2^n d(x, y)$; kies dus $\varepsilon = \min\{2^{-n}\varepsilon_n : n < N\}$ Dan geldt: Als $d(x, y) < \varepsilon$ dan geldt $d_n(x_n, y_n) < 2^n\varepsilon \leqslant 2^n 2^{-n}\varepsilon_n = \varepsilon_n$.

Zij nu U een d-open verzameling en $x \in U$; we zoeken een eindig open blok $\prod_n U_n$ zó dat $x \in \prod_n U_n \subseteq U$. Kies eerst $\varepsilon > 0$ zó dat $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ en kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\sum_{n\geqslant N} 2^{-n} < \varepsilon/2$. Definieer

$$U_n = \begin{cases} B(x_n, \varepsilon/2) & \text{als } n < N \text{ en} \\ X_n & \text{als } n \geqslant N. \end{cases}$$

Als $y \in \prod_n U_n$ dan geldt

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{n<N} 2^{-n} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n\geqslant N} 2^{-n} d_n(x_n, y_n) \\ &< \sum_{n<N} 2^{-n}\varepsilon/2 + \sum_{n\geqslant N} 2^{-n} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

We zien dat $\prod_n U_n \subseteq B_\varepsilon(x)$. □

4.21. Gevolg. *De producten* $[0,1]^\infty$ *en* $\mathbb{R}^\infty$ *zijn metrizeerbaar.*

▶ **9**. Bewijs dat een product van een familie samenhangende ruimten samenhangende ruimten weer samenhangend is.

▶ **10**. Laat $\{X_t : t \in T\}$ een aftelbare familie topologische ruimten zijn. Toon aan:

a. Als elke X_t aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet dan voldoet $\prod_{t\in T} X_t$ ook aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

b. Als elke X_t aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet dan voldoet $\prod_{t\in T} X_t$ ook aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.

▶ **11**. Toon aan:

a. Het product van twee separabele ruimten is separabel

b. Het product van aftelbaar veel separabele ruimten is separabel

c. Het product $\mathbb{N}^\mathbb{R}$ is separabel

d. Als $\{0,1\}^T$ separabel is dan geldt $|T| \leqslant |\mathbb{R}|$.

▶ **12**. Er is nog een voor de hand liggende manier om een product van een topologie te voorzien. Hier laten we alle open blokken toe, dus willekeurige producten van de vorm $\prod_{t\in T} U_t$ met elke U_t open in X_t. De zo verkregen topologie heet de *doostopologie* (in het engels: *boxtopology*).

a. Ga na dat de familie van alle open blokken inderdaad als basis voor een topologie kan dienen.

Deze topologie heeft niet zulke mooie eigenschappen als de producttopologie. Neem maar eens het product $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, waarbij $X_n = [0,1]$ voor elke n.

b. De diagonaal $\triangle_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Id}_n$ is niet continu; $\mathrm{Id}_n : [0,1] \to X_n$ is de identieke afbeelding. *Hint*: De waardenverzameling heeft, als deelruimte van X, de discrete topologie.

c. De doostopologie op X is niet samenhangend en niet metrizeerbaar.

▶ **13**. Zij S de ruimte uit Voorbeeld 2.2. In het product $S^\mathbb{R}$ bekijken we twee punten: $\mathbf{0}$, met alle coördinaten 0, en $\mathbf{1}$, met alle coördinaten 1. Toon aan: $\mathbf{0}$ heeft geen aftelbare omgevingenbasis en $\mathbf{1}$ heeft wel aftelbare omgevingenbasis.

Quotiëntruimten

Veel constructies in de topologie komen neer op het aan elkaar plakken van punten of verzamelingen. De formele beschrijving van dit proces is door middel van equivalentierelaties.

4.22. Definitie. Zij X een topologische ruimte en R een equivalentierelatie op X. De verzameling van alle equivalentieklassen $[x]_R = \{x' \in X : x\ R\ x'\}$ $(x \in X)$ noteren we met X/R, en $q : X \to X/R$ is de kanonieke surjectie $x \mapsto [x]_R$.

De familie $\{q^{-1}[U]$ is open in $X\}$ is een topologie op X/R; deze noemen we de *quotiënttopologie* met betrekking tot X en R en we noemen X/R de *quotiëntruimte* van X met betrekking tot R.

▶ **14**. Ga na dat de familie uit de voorgaande definitie inderdaad een topologie is.

Een afbeelding $f : X \to Y$ is continu als voor elke open verzameling U in Y het volledig origineel $f^{-1}[U]$ open is in X. Als het omgekeerde ook geldt spreken we van een quotiëntafbeelding.

4.23. DEFINITIE. Een afbeelding $f : X \to Y$ tussen topologische ruimten is een *quotiëntafbeelding* als voor elke deelverzameling U van Y geldt: U is open in Y dan en slechts dan als $f^{-1}[U]$ open is in X.

De volgende opgave verklaart de naam quotiëntafbeelding en helpt ons ook met het herkennen van quotiënten, ook als er niet expliciet een equivalentierelatie gegeven is.

► **15**. Zij $f : X \to Y$ een continue afbeelding en definieer een equivalentierelatie R_f op X door: $x \, R_f \, y$ als $f(x) = f(y)$. Voorzie X/R_f van de quotiënttopologie.

a. Toon aan: de afbeelding $\tilde{f} : [x]_{R_f} \mapsto f(x)$ is goedgedefinieerd en voldoet aan $f = \tilde{f} \circ q$.

b. Toon aan: $\tilde{f}$ is continu.

c. Toon aan: $\tilde{f}$ is een homeomorfisme dan en slechts dan als f een quotiëntafbeelding is.

4.24. VOORBEELDEN.

1. Een veelgebruikte manier om quotiënten te maken is door één verzameling tot één punt samen te knijpen. Neem een ruimte X en $A \subseteq X$ en schrijf $x \sim y$ dan en slechts dan als $x = y$ of $x, y \in A$; dus $[x]_\sim = \{x\}$ als $x \notin A$ en $[x]_\sim = A$ als $x \in A$. De zo verkregen quotiëntruimte noteren we als X/A.
2. Definieer een equivalentierelatie $\sim$ op $[-1, 1]$ door $x \sim y$ als $x = y$ of $-1 < x, y < 1$ en $x = -y$. De zo verkregen ruimte ziet er uit als het interval $[0, 1)$ met daaraan 1 en -1 vastgeplakt; de ruimte is wel T_1 maar niet T_2: de punten -1 en 1 hebben geen disjuncte omgevingen.

► **16**. Knijp, in $\mathbb{R}$, de verzameling $\mathbb{N}$ samen tot één punt.

a. Bewijs: dat het punt $\mathbb{N}$ in het quotiënt $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ geen aftelbare lokale basis heeft.

b. Bewijs: als $A \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{N}$ en $\mathbb{N} \in \operatorname{cl} A$ dan is er een rij in A die naar $\mathbb{N}$ convergeert.

De volgende stelling geeft voldoende voorwaarden opdat een continue afbeelding een quotiëntafbeelding is. Gesloten afbeeldingen kennen we al. Een continue afbeelding $f : X \to Y$ tussen topologische ruimten is *open* als voor elke open verzameling O in X het beeld $f[O]$ open is in Y.

4.25. STELLING. *Elke open afbeelding is een quotiëntafbeelding. Elke gesloten afbeelding is een quotiëntafbeelding.*

► **17**. a. Bewijs de eerste uitspraak van Stelling 4.25.

b. Bewijs: een afbeelding $f : X \to Y$ is een quotientafbeelding dan en slechts dan als voor elke deelverzameling A van Y geldt: A is gesloten in Y dan en slechts dan als $f^{-1}[A]$ gesloten is in X.

c. Bewijs de tweede uitspraak van Stelling 4.25.

► **18**. Laat $f : X \to Y$ een afbeelding zijn (X en Y zijn topologische ruimten).

a. Zij $\mathcal{B}$ een basis voor X. Toon aan f is open dan en slechts dan als $f[B]$ open is voor elke $B \in \mathcal{B}$.

b. Toon aan: f is continu dan en slechts dan als $f[\operatorname{cl} A] \subseteq \operatorname{cl} f[A]$ voor elke $A \subseteq X$.

c. Toon aan F is gesloten dan en slechts dan als $\operatorname{cl} f[A] \subseteq f[\operatorname{cl} A]$ voor elke $A \subseteq X$.

Conclusie F is continu en gesloten dan en slechts dan als $f[\operatorname{cl} A] = \operatorname{cl} f[A]$ voor alle $A \subseteq X$.

► **19**. Laat $f : X \to Y$ continu zijn met X compact en Y Hausdorff. Bewijs dat f een gesloten afbeelding is (en dus een quotiëntafbeelding).

Hoofdstuk 5

De Stelling van Tychonoff

De Stelling van Tychonoff, die zegt dat het product van willekeurig veel compacte topologische ruimten weer compact is, is één van de meest gebruikte stellingen uit de topologie. De stelling duikt in vele gedaanten op; bijvoorbeeld in de Functionaalanalyse bij het bewijs van de Stelling van Alaoglu-Bourbaki.

Voor we de stelling van Tychonoff kunnen bewijzen moeten we iets meer van compacte ruimten weten en een paar extra noties invoeren.

Filters en ultrafilters

We zullen de Stelling van Tychonoff via een omweg bewijzen. We zetten eerst een theorie van convergentie in willekeurige topologische ruimten op, bewijzen vervolgens het analogon van de stelling dat een metrische ruimte compact is dan en slechts dan als deze rijcompact is en bewijzen dat die eigenschap productief is.

De juiste generalisatie van rijen zijn de filters. Zie Definitie 5.8 en Voorbeeld 5.9.1 voor meer uitleg.

Filters

5.1. Definitie. Zij X een verzameling. Een collectie $\mathcal{F}$ van deelverzamelingen van X is een *filter* op X als

(i) $\varnothing \notin \mathcal{F}$,
(ii) als $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ dan is er een $F_3 \in \mathcal{F}$ zó dat $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$ en
(iii) als $F \in \mathcal{F}$ en $F \subseteq G$ dan $G \in \mathcal{F}$.

5.2. Voorbeelden.

1. Als $(x_n)_n$ een rij in X is dan is de familie $\mathcal{F}$ gedefinieerd door: $F \in \mathcal{F}$ dan en slechts dan als er een $N \in \mathbb{N}$ is met $\{x_n : n \geqslant N\} \subseteq F$, een filter op X.
2. Als X een oneindige verzameling is dan is $\mathcal{F} = \{F : X \setminus F \text{ is eindig}\}$ een filter op X, het co-eindige- of Fréchet filter.
3. Als $x \in X$ dan is $\mathcal{F}_x = \{F : x \in F\}$ een filter op X.
4. Als X een topologische ruimte is en $x \in X$ dan is $\mathcal{U}_x = \{F : x \in \operatorname{int} F\}$ een filter, het *omgevingenfilter* van x.

We kunnen een filter ook beschrijven door een basis aan te geven.

5.3. Definitie. Zij X een verzameling. Een collectie $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van X heet een *filterbasis* op X als de familie $\mathcal{F} = \{F : \text{er is een } B \in \mathcal{B} \text{ met } B \subseteq F\}$ een filter is. We noemen $\mathcal{B}$ dan ook wel een *basis* voor het filter $\mathcal{F}$.

We geven voor elk filter uit 5.2 een basis.

5.4. Voorbeelden.

1. De familie van de 'staarten' van de rij $(x_n)_n$ is een basis voor het bijbehorende filter; een *staart* is een verzameling van de vorm $\{x_n : n \geqslant N\}$.
2. Het co-eindige filter heeft geen voor de hand liggende basis, behalve als $X = \mathbb{N}$: dan nemen we de staarten van $\mathbb{N}$.
3. De familie $\bigl\{\{x\}\bigr\}$ is een basis voor $\mathcal{F}_x$.
4. Elke omgevingenbasis in x is een basis voor $\mathcal{U}_x$.

Het volgende lemma is eenvoudig te bewijzen.

5.5. Lemma. *Zij X een verzameling. Een collectie $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van X is een filterbasis dan en slechts dan als*

(i) $\varnothing \notin \mathcal{B}$ *en*
(ii) *als $F_1, F_2 \in \mathcal{B}$ dan is er een $F_3 \in \mathcal{B}$ zó dat $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$.*

Een voorbeeld dat bij compactheid een grote rol speelt is het volgende:

5.6. Voorbeeld. Stel $\{A_i : i \in I\}$ is een overdekking van een verzameling X zonder eindige deeloverdekking; dan is de familie van verzamelingen van de vorm $X \setminus \bigcup_{i\in F} A_i$, met F eindig, een filterbasis op X. Het bijbehorende filter $\mathcal{F}$ heeft een lege doorsnede want $\bigcap \mathcal{F} = X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \varnothing$. Een filter met een lege doorsnede wordt een *vrij filter* genoemd.

Via dit voorbeeld is de volgende stelling snel in te zien.

5.7. Stelling. *Een ruimte X is compact dan en slechts dan als voor elk filter $\mathcal{F}$ op de ruimte geldt $\bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$.*

Bewijs. Als $\mathcal{F}$ een filter is beschouw dan $\mathcal{U} = \{X \setminus \operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\}$; geen eindige deelfamilie van $\mathcal{U}$ overdekt X (waarom niet?). Omdat X compact is kan $\mathcal{U}$ zelf dus ook X niet overdekken. Maar $X \setminus \bigcup \mathcal{U} = \bigcap \mathcal{F}$.

Omgekeerd, als X een overdekking $\mathcal{U}$ heeft zonder eindige deeloverdekking dan maken we uit $\mathcal{U}$ een filter $\mathcal{F}$ als in Voorbeeld 5.6. Maar dan geldt $\bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\} = \varnothing$. □

Bekijk nog eens het filter $\mathcal{F}$ dat bij een rij $(x_n)_n$ hoort; neem eens aan dat de rij $(x_n)_n$ naar een punt x convergeert. Dan behoort elke omgeving van x tot $\mathcal{F}$: convergentie betekent immers dat voor elke omgeving U van x een N bestaat zó dat $x_n \in U$ voor $n \geqslant N$. Dus als $x_n \to x$ dan $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$ en het omgekeerde is ook waar (ga maar na).

We komen tot de volgende definitie.

5.8. Definitie. Zij X een topologische ruimte, $\mathcal{F}$ een filter op X en $x \in X$. We zeggen dat het filter $\mathcal{F}$ naar het punt x *convergeert* als $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$.

5.9. Voorbeelden.

1. De opmerking die aan de Definitie 5.8 vooraf gaat zegt: een rijtje $(x_n)_n$ convergeert naar een punt x dan en slechts dan als het bij de rij behorende filter naar x convergeert.
2. Het filter $\mathcal{U}_x$ convergeert dus zeker naar x; het is het kleinste filter dat naar x convergeert.
3. Het filter $\mathcal{F}_x$ convergeert ook naar x.

► **1**. Bewijs: een ruimte is Hausdorff dan en slechts dan als elk filter ten hoogste één limiet heeft.

Neem nu eens aan dat $\mathcal{F}$ een filter is en dat $x \in \bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\}$. Dan is voor elke omgeving U van x en elk element F van $\mathcal{F}$ de doorsnede $U \cap F$ niet leeg. De familie $\mathcal{G} = \{U \cap F : U \in \mathcal{U}_x, F \in \mathcal{F}\}$ is zelfs een filter en we zien dat $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{G}$ en $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

We concluderen: als $x \in \bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\}$ dan is er een filter $\mathcal{G}$ zó dat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ en $\mathcal{G}$ convergeert naar x.

We noemen een filter $\mathcal{G}$ *fijner* dan een filter $\mathcal{F}$ als $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$; we noemen $\mathcal{F}$ dan ook *grover* dan $\mathcal{G}$.

We krijgen de volgende stelling (bewijs zelf de implicatie van rechts naar links).

5.10. Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een topologische ruimte X. Dan geldt voor elke $x \in X$ dat $x \in \bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\}$ dan en slechts dan als er een filter $\mathcal{G}$ is dat fijner is dan $\mathcal{F}$ en dat naar x convergeert.*

We kunnen nu het beloofde analogon van de stelling dat een metrische ruimte compact is dan en slechts dan als elke rij in die ruimte een convergente deelrij heeft formuleren en bewijzen.

5.11. Stelling. *Een topologische ruimte is compact dan en slechts dan als voor elk filter op die ruimte een fijner filter bestaat dat convergeert.*

Bewijs. Combineer Stellingen 5.7 en 5.10. □

Nu we convergentie van filters hebben gedefinieerd kunnen we dit gebruiken om afsluitingen en continuïteit te beschrijven.

► **2**. Zijn A een deelverzameling van een topologische ruimte X en $x \in X$. Bewijs: $x \in \operatorname{cl} A$ dan en slechts dan als er een filter $\mathcal{F}$ is met $A \in \mathcal{F}$ dat naar x convergeert.

Vervolgens bekijken we continuïteit. Allereerst moeten we beeldfilters definiëren. Dit gaat vrij natuurlijk; als $f : X \to Y$ een afbeelding is en $\mathcal{F}$ een filter op X dan is $\bigl\{f[F] : F \in \mathcal{F}\bigr\}$ een filterbasis op Y (ga na); het door deze basis voortgebrachte filter noteren we als $f(\mathcal{F})$ en we noemen dit het *beeldfilter* van $\mathcal{F}$ onder f.

► **3**. Laat $f : X \to Y$ een afbeelding tussen topologische ruimten zijn. Dan geldt:
a. Als $x \in X$ dan is f continu in x dan en slechts dan als voor elk filter op X dat naar x convergeert het beeldfilter naar $f(x)$ convergeert.
b. De afbeelding f is continu dan en slechts dan als voor elk convergent filter op X het beeldfilter ook convergeert (naar de juiste limiet).

We kunnen ook inzien dat convergentie in een product hetzelfde is als coördinaatsgewijze convergentie.

5.12. Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een product $X = \prod_{t \in T} X_t$ van topologische ruimten. Dan geldt: $\mathcal{F}$ convergeert naar $x = (x_t)_{t\in T}$ dan en slechts dan als voor elke t het filter $\pi_t(\mathcal{F})$ naar x_t convergeert.*

Bewijs. Omdat de projecties continu zijn volgt uit convergentie coördinaatsgewijze convergentie.

Omgekeerd, neem aan dat $\pi_t(\mathcal{F})$ naar x_t convergeert voor elke t. Zij U een basisomgeving van x, bepaald door $U_{t_1}, U_{t_2}, \ldots, U_{t_n}$.

Voor iedere i geldt dan dat $U_{t_i} \in \pi_{t_i}(\mathcal{F})$, dus $\pi_{t_i}(F_i) \subseteq U_{t_i}$ voor een $F_i \in \mathcal{F}$. Maar dan geldt $F_i \subseteq \pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}]$ en dus $\pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}] \in \mathcal{F}$ voor elke i.

Nu volgt $U \in \mathcal{F}$, want $U = \bigcap_{i=1}^n \pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}]$. □

Ultrafilters

We gaan nu een speciaal soort filters bekijken: ultrafilters.

5.13. Definitie. Een *ultrafilter* is een filter waarvoor geen fijner filter bestaat.

Met andere woorden: als voor elke filter $\mathcal{G}$ met $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ geldt dat $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ ($\mathcal{F}$ is een *maximaal* filter) dan noemen we $\mathcal{F}$ een ultrafilter.

We bewijzen eerst een paar karakteriseringen van ultrafilters.

5.14. Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een verzameling X; dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(i) *$\mathcal{F}$ is een ultrafilter;*
(ii) *voor elke deelverzameling A van X geldt: als $A \cap F \neq \varnothing$ voor alle $F \in \mathcal{F}$ dan $A \in \mathcal{F}$;*
(iii) *voor elk tweetal deelverzamelingen A en B van X geldt: als $A \cup B \in \mathcal{F}$ dan $A \in \mathcal{F}$ of $B \in \mathcal{F}$;*
(iv) *voor elke deelverzameling A van X geldt: $A \in \mathcal{F}$ of $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Bewijs. (i) ⇒ (ii): neem aan dat $A \cap F \neq \varnothing$ voor alle $F \in \mathcal{F}$. Dan is $\{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ een filterbasis (ga na!) en het filter $\mathcal{G}$ dat hierdoor wordt voortgebracht is fijner dan $\mathcal{F}$ en bevat A; maar dan $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ en dus $A \in \mathcal{F}$.

(ii) ⇒ (iii): neem aan dat $A \notin \mathcal{F}$. Dan geldt voor geen enkele $F \in \mathcal{F}$ dat $F \subseteq A$ (waarom?) en dus $F \cap X \setminus A \neq \varnothing$ voor alle $F \in \mathcal{F}$. Maar dan $X \setminus A \in \mathcal{F}$ en dus ook $(X \setminus A) \cap (A \cup B) \in \mathcal{F}$. Merk nu op dat $(X \setminus A) \cap (A \cup B) \subseteq B$.

(iii) ⇒ (iv): pas (iii) toe op A en $X \setminus A$.

(iv) ⇒ (i): als $\mathcal{G}$ een filter zou zijn dat echt fijner was dan $\mathcal{F}$ dan was er een $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Maar dan ook $X \setminus A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ en dus $\varnothing \in \mathcal{G}$; dit is een tegenspraak. □

► **4**. Bewijs: als $\mathcal{F}$ een ultrafilter op X is en $f : X \to Y$ een afbeelding dan is het beeldfilter $f(\mathcal{F})$ ook een ultrafilter.

De volgende stelling volgt nu makkelijk uit Stelling 5.11.

5.15. Stelling. *In een compacte ruimte is elk ultrafilter convergent.*

Het omgekeerde is ook waar: als in een topologische ruimte elk ultrafilter convergeert dan is deze ruimte compact. Voor we dat kunnen bewijzen zullen we manieren moeten vinden om ultrafilters te maken. Dat is helaas niet makkelijk. Eén soort ultrafilters kunnen we eenvoudig beschrijven.

5.16. Voorbeeld. Als $x \in X$ dan is $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$ een ultrafilter.

Dit is ook het enige 'makkelijke' voorbeeld van een ultrafilter dat we kunnen geven. In tegenstelling tot 'gewone' filters zijn ultrafilters niet eenvoudig te beschrijven. Als voorbeeld dient de volgende stelling. We gebruiken hierbij de afbeelding $\phi : 2^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ gedefinieerd door $\phi(A) = \sum_{n \in A} 2^{-n}$.

5.17. STELLING. *Zij $\mathcal{F}$ een vrij ultrafilter op $\mathbb{N}$. De verzameling $U = \{\phi(F) : F \in \mathcal{F}\}$ is niet Lebesgue-meetbaar.*

Wat Lebesgue-meetbare verzamelingen zijn wordt in het college *Maat- en Integratietheorie* uitgelegd.

Het Keuzeaxioma

Om ultrafilters te kunnen maken hebben we iets nodig dat ons in één keer de sprong van 'eindig' naar 'oneindig' laat maken. Dat 'iets' is het *Keuzeaxioma*.

HET KEUZEAXIOMA. Als $\{X_t : t \in T\}$ een niet-lege familie van niet-lege verzamelingen is dan is het product $\prod_{t\in T} X_t$ niet leeg.

Dit lijkt op het intrappen van een open deur maar is het echt niet. Het punt is dat er geen *manier* gegeven wordt om ook maar *één* individueel punt in $\prod_{t\in T} X_t$ te maken.

5.18. *Opmerking.* Het Keuzeaxioma is geen stelling, we zullen niet proberen hem te bewijzen en sinds de zestiger jaren weten we dat we het ook niet kunnen. Evenmin kunnen we bewijzen dat het Keuzeaxioma fout is.

Om deze zinnen een beetje toe te lichten het volgende. Tot het begin van de vorige eeuw werd 'verzameling' gedefinieerd als 'een stel dingen bij elkaar' en er werd, ondanks deze nietszeggende definitie, belangrijk werk mee gedaan. Op een gegeven moment bleek dat deze onbeperkte definitie tot paradoxen leidde, zoals: 'de verzameling van alle verzamelingen is geen verzameling'.

Toen werd het tijd na te denken wat men wel en niet met verzamelingen kan en mag doen. Het resultaat van dit denkwerk was een stel leefregels (axioma's) waar je je bij het werken met verzamelingen aan moet houden.

Zo mag je, gegeven twee verzamelingen x en y een nieuwe verzameling maken die alleen x en y als elementen heeft: $\{x, y\}$.

Een ander axioma zegt dat bij elke verzameling x een verzameling z bestaat zó dat $z = \bigcup x$.

Uit deze twee kunnen we afleiden dat $x \cup y$ bestaat voor elk tweetal verzamelingen x en y: er geldt immers $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$.

Als je je aan deze (overigens vrij natuurlijke) regels houdt zal je paradoxen als 'de verzameling van alle verzamelingen' niet meer tegenkomen; die collectie is te groot om door de axioma's beschreven te worden.

Het Keuzeaxioma neemt tussen de axioma's een bijzondere plaats in omdat het, in tegenstelling tot de andere, duidelijk niet-constructief is. Net als bij het Parallelenpostulaat van Euclides in de meetkunde is heel hard geprobeerd het Keuzeaxioma uit de andere axioma's af te leiden of te laten zien dat het niet waar was; zoals boven opgemerkt zijn beide onmogelijk. Toevoeging van het Keuzeaxioma tot de rest van de lijst leidt niet tot tegenspraken net zo min als de toevoeging van zijn ontkenning.

De meerderheid van de wiskundigen gebruikt zonder problemen het Keuzeaxioma en wij doen dat verder ook.

Voor wie meer wil weten: pak een boek over verzamelingenleer uit de Bibliotheek.

We formuleren nog twee andere beweringen die met het Keuzeaxioma equivalent zijn. Hiertoe moeten we nog een paar extra noties definiëren.

5.19. Definitie. Zij X een verzameling. Een *partiële ordening* op X is een relatie op X, suggestief geschreven als $\preccurlyeq$, met de volgende drie eigenschappen.

(i) Voor alle $x \in X$ geldt $x \preccurlyeq x$.

(ii) Voor alle x en y in X geldt: als $x \preccurlyeq y$ en $y \preccurlyeq x$ dan $x = y$.

(iii) Voor alle x, y en z in X geldt: als $x \preccurlyeq y$ en $y \preccurlyeq z$ dan $x \preccurlyeq z$.

Deze eigenschappen brengen de eigenschappen van $\leqslant$ op $\mathbb{R}$ en $\subseteq$ op families verzamelingen onder één noemer. Beide relaties voldoen aan de drie eigenschappen.

De ordening $\leqslant$ heeft nog een eigenschap die $\subseteq$ niet heeft:

5.20. Definitie. Een *lineaire ordening* is een partiële ordening met de volgende extra eigenschap:

Als $x, y \in X$ dan geldt $x \preccurlyeq y$ of $y \preccurlyeq x$.

Het beste dat we kunnen krijgen is een lineaire ordening als op $\mathbb{N}$.

5.21. Definitie. Een *welordening* is een partiële ordening ten opzichte van welke elke niet-lege deelverzameling een kleinste element heeft. (Een welgeordende verzameling is dus automatisch lineair geordend.)

5.22. Voorbeelden.

1. Elke familie verzamelingen is door $\subseteq$ partieel geordend.
2. De verzameling $\mathbb{R}$ is door $\leqslant$ lineair geordend.
3. De verzameling $\mathbb{N}$ is door $\leqslant$ welgeordend.
4. Definieer $\preccurlyeq$ op $\mathbb{R}^2$ door $(x, y) \preccurlyeq (u, v)$ dan en slechts dan als $x \leqslant u$ en $y \geqslant v$; dan is $\preccurlyeq$ een partiële ordening die niet lineair is.
5. Definieer $\preccurlyeq$ op $\mathbb{R}^2$ door $(x, y) \preccurlyeq (u, v)$ dan en slechts dan als $x < u$, of $x = u$ en $y \leqslant v$; dan is $\preccurlyeq$ een lineaire ordening op $\mathbb{R}^2$. Dit is de *lexicografische ordening*.
6. De verzameling $\mathbb{N}^2$ is door de lexicografische ordening welgeordend.

We krijgen de volgende uitspraken.

De Welordeningsstelling. Elke verzameling kan welgeordend worden.

Het Lemma van Zorn. Als X een partieel geordende verzameling is waarin elke lineair geordende deelverzameling een bovengrens heeft dan heeft X een *maximaal element*, dat wil zeggen een element x zó dat er géén $y \neq x$ is met $x \preccurlyeq y$.

Net als het Keuzeaxioma zijn de Welordeningsstelling en het Lemma van Zorn niet constructief; er wordt niet gezegd hoe de welordening te maken of hoe het maximale element te vinden. Er wordt alleen gezegd dat ze er zijn.

Over de woorden ‘stelling’ en ‘lemma’: deze worden gebruikt omdat de beweringen uit het Keuzeaxioma afgeleid zijn. Men heeft bewezen (met gebruik van alleen de andere axioma’s van de verzamelingenleer) dat het Keuzeaxioma, de Welordeningsstelling en het Lemma van Zorn equivalent zijn. Als de geschiedenis anders was gelopen hadden we nu misschien het Welordeningsaxioma en de Keuzestelling gehad.

We noemen nog een paar gevolgen van het Keuzeaxioma:

(i) Elke vectorruimte heeft een basis.

(ii) In een ring met 1 is elk ideaal bevat in een maximaal ideaal.

(iii) De stelling van Hahn-Banach: als V een vectorruimte is, C een convexe deelverzameling van V en W een deelruimte van V met $W \cap C = \varnothing$ dan bestaat een deelruimte U van V van codimensie 1 zó dat $W \subseteq U$ en $U \cap C = \varnothing$ (codimensie 1 betekent dat er een vector x in $V \setminus U$ is zó dat V opgespannen wordt door $U \cup \{x\}$).

Wij hebben de volgende stelling nodig:

5.23. Stelling (Ultrafilterstelling). *Zij X een verzameling en $\mathcal{F}$ een filter op X. Dan is er een ultrafilter $\mathcal{G}$ dat fijner is dan $\mathcal{F}$.*

Bewijs. We passen het Lemma van Zorn toe. Beschouw hiertoe de familie

$$\mathfrak{F} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ is een filter dat fijner is dan } \mathcal{F}\}.$$

De familie $\mathfrak{F}$ is partieel geordend door $\subseteq$. Neem eens aan dat $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ niet leeg is en lineair geordend door $\subseteq$ en stel $\mathcal{G} = \bigcup \mathfrak{F}'$.

Duidelijk geldt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ voor elke $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$; we beweren dat $\mathcal{G}$ een filter is.

(i) $\varnothing \notin \mathcal{G}$ omdat $\varnothing \notin \mathcal{H}$ voor elke $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$.

(ii) Als $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ kies dan $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ in $\mathfrak{F}'$ met $G_1 \in \mathcal{H}_1$ en $G_2 \in \mathcal{H}_2$. Nu geldt $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$ of $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1$, bijvoorbeeld de eerste mogelijkheid. Dan $G_1, G_2 \in \mathcal{H}_2$ en dus ook $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{H}_2$. Maar dan ook $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$.

(iii) Als $G \in \mathcal{G}$ en $G \subseteq H$ kies dan $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$ met $G \in \mathcal{H}$; dan geldt $H \in \mathcal{H}$ en dus $H \in \mathcal{G}$.

We zien dat $\mathcal{G}$ een filter is. Dus $\mathcal{G}$ is een bovengrens voor $\mathfrak{F}'$.

De partieel geordende verzameling $\mathfrak{F}$ voldoet aan de voorwaarden van het Lemma van Zorn, er is dus een maximaal element, noem dit $\mathcal{G}$. Dan is $\mathcal{G}$ een filter, $\mathcal{G}$ is fijner dan $\mathcal{F}$ en elk ander filter dat fijner is dan $\mathcal{G}$ behoort tot $\mathfrak{F}$ en is dus gelijk aan $\mathcal{G}$.

Conclusie: $\mathcal{G}$ is een ultrafilter dat fijner is dan $\mathcal{F}$. □

We kunnen nu het omgekeerde van Stelling 5.15 bewijzen.

5.24. Stelling. *Als in een topologische ruimte elk ultrafilter convergeert dan is de ruimte compact.*

Bewijs. Het bewijs is nu niet moeilijk meer. Volgens de Ultrafilterstelling is er voor elke filter een fijner ultrafilter en volgens de aanname convergeert dit ultrafilter. Pas nu Stelling 5.11 toe. □

Twee bewijzen

We kunnen nu eindelijk de Stelling van Tychonoff bewijzen.

5.25. Stelling (Stelling van Tychonoff). *Een product van topologische ruimten is compact dan en slechts dan als elke factor compact is.*

Bewijs. Dat elke factor compact is als het product dat is volgt uit het feit dat de projecties continu zijn.

Neem nu aan dat elke factor X_t van het product $X = \prod_{t \in T} X_t$ compact is. Zij $\mathcal{F}$ een ultrafilter op X. Voor elke t is het beeldfilter $\pi_t(\mathcal{F})$ een ultrafilter (Opgave 4) en dus convergent, zeg naar een punt x_t.

Volgens Stelling 5.12 convergeert $\mathcal{F}$ naar het punt $(x_t)_{t \in T}$. □

We zullen nog een bewijs van de Stelling van Tychonoff geven; hierbij gaan we wat omslachtiger te werk maar we leren er wel iets nieuws van. Het bewijs maakt ook gebruik van ultrafilters.

We definiëren eerst netjes wat een open strook is.

5.26. Definitie. Een *open strook* in een product $\prod_{t\in T} X_t$ van topologische ruimten is een open blok dat maar van één coördinaat afhangt; dus een open blok van de vorm $\pi_t^{-1}[U]$ met U open in X_t.

Bewijs van de Stelling van Tychonoff, 2. Neem eens aan dat $\mathcal{U}$ een familie eindige open blokken is in $X = \prod_{t\in T} X_t$ zó dat geen eindige deelfamilie van $\mathcal{U}$ een overdekking is. Maak een filter $\mathcal{F}$ als in Voorbeeld 5.6, dus een basis voor $\mathcal{F}$ is de familie $\{X \setminus \bigcup \mathcal{U}' : \mathcal{U}' \text{ is een eindige deelfamilie van } \mathcal{U}\}$.

Neem vervolgens een ultrafilter $\mathcal{G}$ dat fijner is dan $\mathcal{F}$. Bekijk nu een $U \in \mathcal{U}$; deze is de doorsnede van eindig veel open stroken: $U = \bigcap_{i=1}^n \pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}]$. Nu is $\mathcal{G}$ een ultrafilter en $X \setminus U \in \mathcal{G}$, er is dus een t_i zó dat $X \setminus \pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}] \in \mathcal{G}$.

Conclusie: bij elke $U \in \mathcal{U}$ is een strook U^+ te vinden zó dat $U \subseteq U^+$ en $X \setminus U^+ \in \mathcal{G}$.

We maken zo'n simultane keuze van stroken (Keuzeaxioma) en we bekijken de familie $\mathcal{U}^+ = \{U^+ : U \in \mathcal{U}\}$.

Omdat $U \subseteq U^+$ voor elke U geldt $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{U}^+$.

Voor elke eindige deelfamilie $\mathcal{V}$ van $\mathcal{U}^+$ geldt $X \setminus \bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{G}$, dus geen eindige deelfamilie van $\mathcal{U}^+$ is een overdekking.

Neem nu $t \in T$ vast en bekijk de deelfamilie $\mathcal{U}_t$ van $\mathcal{U}^+$ die bestaat uit stroken van de vorm $\pi_t^{-1}[O]$ met O open in X_t. Stel $\mathcal{V}_t = \{O : \pi_t^{-1}[O] \in \mathcal{U}_t\}$. Omdat geen eindige deelfamilie van $\mathcal{U}_t$ het product X overdekt kan geen eindige deelfamilie van $\mathcal{V}_t$ de ruimte X_t overdekken en omdat X_t compact is is $\mathcal{V}_t$ geen overdekking van X_t.

Kies nu (simultaan) $x_t \in X_t \setminus \bigcup \mathcal{V}_t$ voor elke t. Het punt $x = (x_t)_{t\in T}$ wordt niet door $\mathcal{U}^+$ overdekt en dus ook niet door $\mathcal{U}$. $\square$

Dit bewijs is in feite een bewijs van een andere stelling. Om die te formuleren moeten we nog een definitie geven.

5.27. Definitie. Een *subbasis* voor een topologie $\mathcal{T}$ is een deelfamilie $\mathcal{S}$ van $\mathcal{T}$ zó dat de familie doorsneden van eindig veel elementen van $\mathcal{S}$ een basis is voor $\mathcal{T}$.

Merk op dat $\varnothing$ eindig is en een deelfamilie van elke familie; als $\mathcal{S}$ een subbasis is dan behoort $\bigcap \varnothing$ dus ook tot de bijbehorende basis. Maar

$$\bigcap \varnothing = \bigl\{x \in X : (\forall S \in \varnothing)(x \in S)\bigr\} = X,$$

dus: ongeacht of $\mathcal{S}$ de ruimte overdekt, de familie eindige doorsneden is altijd een overdekking.

5.28. Voorbeelden.

1. De familie van alle open stroken is een subbasis voor de producttopologie.
2. De familie van alle intervallen van de vorm $(-\infty, b)$ en (a, ∞) is een subbasis voor de gewone topologie van $\mathbb{R}$.

Een subbasis wordt meestal gebruikt om uit een familie verzamelingen waarvan men zeker wil dat die open worden een topologie te maken. Hiertoe neemt men eerst alle eindige doorsneden van elementen van die familie en gebruikt de zo verkregen familie als basis voor de gewenste topologie. In feite is dit de manier geweest waarop we de producttopologie gemaakt hebben: de open stroken moesten open worden om de projecties continu te maken.

De stelling waar net op gezinspeeld werd is het Subbasislemma van Alexander.

5.29. STELLING (Subbasislemma van Alexander). *Zij X een topologische ruimte en $\mathcal{S}$ een subbasis voor de topologie. Dan geldt: X is compact dan en slechts dan als elke overdekking van X met elementen van $\mathcal{S}$ een eindige deeloverdekking heeft.*

BEWIJS. Het bewijs loopt parallel aan het tweede bewijs van de Stelling van Tychonoff: noem de familie van doorsneden van eindige deelfamilies van $\mathcal{S}$ even $\mathcal{B}$. Dan is $\mathcal{B}$ een basis. Stel $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ is een overdekking zonder eindige deeloverdekking en maak een filter $\mathcal{F}$ als tevoren. Neem weer een ultrafilter $\mathcal{G}$ dat fijner is dan $\mathcal{F}$ en kies, met behulp van $\mathcal{G}$, voor elke $U \in \mathcal{U}$ een $S_U \in \mathcal{S}$ zó dat $U \subseteq S_U$ en $X \setminus S_U \in \mathcal{G}$.

Dan is $\{S_U : U \in \mathcal{U}\}$ een overdekking van X met elementen van $\mathcal{S}$ zonder eindige deeloverdekking. □

Met behulp van deze stelling bewijzen we heel makkelijk dat een gesloten en begrensd interval in $\mathbb{R}$ compact is.

Laat $[a, b]$ zo'n interval zijn en neem een overdekking met subbasis elementen:

$$\mathcal{U} = \bigl\{[a, x_\lambda) : \lambda \in \Lambda\bigr\} \cup \bigl\{(y_\mu, b] : \mu \in M\bigr\}.$$

Zij $x = \sup_\lambda x_\lambda$ en kies μ zó dat $x \in (y_\mu, b]$ (waarom is er zo'n μ?). Kies vervolgens een λ zó dat $x_\lambda > y_\mu$; dan is $\bigl\{[a, x_\lambda), (y_\mu, b]\bigr\}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{U}$.

▶ **5**. Zij $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, het product van aftelbaar oneindig veel kopieën van de discrete ruimte $\{0,1\}$.

a. Toon aan: X is compact Hausdorff.

Definieer $f : X \to [0,1]$ door $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2x_i 3^{-i}$.

b. Toon aan dat f continu en injectief is.

c. Toon aan dat X homeomorf is met de (standaard) Cantorverzameling.

De Stelling van Tychonoff en gesloten afbeeldingen

Het aantal bewijzen van de Stelling van Tychonoff is groot; elke karakterizering van compactheid is eigenslijk wel te gebruiken. Als voorbeeld nemen we Stelling 4.13.

BEWIJS VAN DE STELLING VAN TYCHONOFF, 3. Laat $\{X_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ een welgeordende familie compacte topologische ruimten zijn. Zij Y nog een ruimte. We bewijzen dat $\pi_Y : Y \times \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha \to Y$ gesloten is.

Laat F een gesloten deelverzameling van $Y \times \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ zijn en zij $y \in \operatorname{cl} \pi_Y[F]$; we bewijzen dat $y \in \pi_Y[F]$ door een punt $x = \langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ aan te geven zó dat $\langle y, x \rangle \in F$.

We hebben wat notatie nodig; met π_β geven we de projectie van $Y \times \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ op $Y \times \prod_{\alpha<\beta} X_\alpha$ aan; dus $\pi_0 = \pi_Y$. Verder is π^β de projectie van $Y \times \prod_{\alpha\leqslant\beta} X_\alpha$ op $Y \times \prod_{\alpha<\beta} X_\alpha$ (langs X_β).

Stap 0: er is een punt $x_0 \in X_0$ zó dat $\langle y, x_0 \rangle \in \operatorname{cl} \pi_1[F]$. Immers, $\pi_0 = \pi^0 \circ \pi_1$ en π^0 is gesloten, dus $y \in \operatorname{cl} \pi^0\bigl[\pi_1[F]\bigr] = \pi^0\bigl[\operatorname{cl} \pi_1[F]\bigr]$ (zie Opgave 18 op pagina 32).

Neem aan dat $\beta \in \kappa$ en dat $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\beta}$ gevonden is zó dat $\bigl\langle y, \langle x_\alpha \rangle_{\alpha\leqslant\gamma} \bigr\rangle \in \operatorname{cl} \pi_{\gamma+1}[F]$ voor alle $\gamma < \beta$. Bewering: $\bigl\langle y, \langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\beta} \bigr\rangle \in \operatorname{cl} \pi_\beta[F]$. Als β een opvolger is, zeg $\beta = \gamma+1$, is dit duidelijk dankzij de inductieveronderstelling. Als β een limiet is dan volgt dit uit de inductieveronderstelling en de definitie van de producttopologie. Nu kunnen we Stap 0 overdoen met β voor 0 ingevuld: $\pi_\beta = \pi^\beta \circ \pi_{\beta+1}$ en π^β is gesloten, dus er is een punt $x_\beta \in X_\beta$ zó dat $\bigl\langle y, \langle x_\alpha \rangle_{\alpha\leqslant\beta} \bigr\rangle \in \operatorname{cl} \pi_{\beta+1}[F]$.

Aan het eind is het punt $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ als gewenst. □

Helly space

We nemen het topologische product $\mathbb{I}^{\mathbb{I}}$, waar $\mathbb{I} = [0,1]$. Daarbinnen nemen we

$$H = \{f : f \text{ is monotoon niet-dalend}\},$$

met de deelruimtetopologie. Dit is 'Helly space'.

▶ **6**. Toon aan:

a. H is compact Hausdorff.

b. H bevat een overaftelbare discrete deelruimte. *Hint*: Definieer voor elke $s \in (0,1)$ een functie f_s door

$$f_s(t) = \begin{cases} 0 & t < s \\ \frac{1}{2} & s = t \\ 1 & t > s \end{cases}$$

en bewijs dat $\{f_s : 0 < s < 1\}$ als gewenst is.

c. H bevat een ruimte die homeomorf is met $\mathbb{S}$. *Hint*: Definieer voor elke $s \in (0,1)$ een functie g_s door

$$g_s(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant s \\ 1 & t > s \end{cases}$$

en bewijs dat $\{g_s : 0 < s < 1\}$ als gewenst is.

d. H is heeft een niet-normale deelruimte. *Hint*: Laat ziet dat H een deelruimte heeft die homeomorf is met H^2.

e. H is separabel. *Hint*: Definieer voor elk paar $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ en $(q_1, \ldots, q_n)$ *stijgende* rijtjes rationale getallen met $0 \leqslant p_0$, $0 < q_1$, $q_n < 1$ en $p_n \leqslant 1$ een functie $d : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ door $d(t) = p_0$ als $t < q_1$, $d(t) = p_i$ als $q_i \leqslant t < q_{i+1}$ (voor $i < n$) en $d(t) = p_n$ als $t \geqslant q_n$. Bewijs dat de verzameling van dit soort functies aftelbaar is en dicht in H.

f. H voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma. *Hint*: Als $f \in H$ continu is (als functie van $\mathbb{I}$ naar $\mathbb{I}$) dan is de familie van alle eindige open blokken $\prod_t U_t$ met (zeker) $U_t = \mathbb{I}$ als $t \notin \mathbb{Q}$ en U_t van de vorm $(f(t) - 2^{-n}, f(t) + 2^{-n})$ als $U_t \neq \mathbb{I}$

Als f niet continu is dan is de verzameling D_f van discontinuïteitspunten van f aftelbaar. Neem dan eindige open blokken als boven maar nu met $U_t = \mathbb{I}$ als $t \notin \mathbb{Q} \cup D$.

Bibliografie

ARMSTRONG, M. A.

[1983] *Basic topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York. Dit boek wordt gebruikt voor de tweede helft van de cursus.

ENGELKING, R.

[1989] *General topology*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition. Voor velen het beste topologieboek dat er is.

HRBÁČEK, K. and T. JECH.

[1984] *Introduction to set theory*. Marcel Dekker Inc., New York, second edition. Een goede inleiding tot de verzamelingenleer.

KELLEY, J. L.

[1955] *General topology*. D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London. Een interessant topologieboek met, in de woorden van de schrijver, "Everything a young analyst should know".

KUNEN, K.

[1980] *Set theory. An introduction to independence proofs*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam. Een zeer goede inleiding in de verzamelingenleer, met onafhankelijkheidsbewijzen.

STEEN, L. A. and J. A. SEEBACH, JR.

[1970] *Counterexamples in topology*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York. Een mooi boek met een heleboel voorbeelden van topologische ruimten.

Index