wi4041

Boole Algebra's

dr. K.P. Hart

Cursus 1999/2000

Inhoud

I

TOPOLOGISCHE RUIMTEN

We beginnen met de eigenschappen van metrische ruimten te inventariseren die eigenlijk alleen van de open verzamelingen afhangen; de *topologische eigenschappen*. Daarna definiëren we wat topologische ruimten zijn en bekijken we een paar voorbeelden.

1. TOPOLOGISCHE EIGENSCHAPPEN

Om te beginnen halen we op welke eigenschappen de familie der open verzamelingen van een metrische ruimten heeft. We herhalen nog even de definitie.

1.1. Definitie. Een deelverzameling U van een metrische ruimte X heet *open* als voor ieder punt p van U een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $B_\varepsilon(p) \subseteq U$.

De familie van alle open verzamelingen in X, *de topologie van* X, noteren we met $\mathcal{T}$. De volgende stelling is bij Voortgezette Analyse aan bod geweest.

1.2. Stelling. *De familie $\mathcal{T}$ voldoet aan de volgende drie eigenschappen.*

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,

(ii) *als* $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ *dan* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ *en*

(iii) *als* $\{U_i\}_i \subseteq \mathcal{T}$ *dan* $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$.

1.3. Opgave. Bewijs deze stelling.

We zullen nu een lijst maken van alle *topologische* eigenschappen en noties die we bij Voortgezette Analyse gezien hebben.

omgeving. Een *omgeving* van een punt p is een open verzameling die p bevat.

inwendig punt. Een punt p is een *inwendig punt* van een verzameling A als er een omgeving U van p is met $U \subseteq A$.

inwendige. Het *inwendige* van een verzameling A is de verzameling van al haar inwendige punten. Notatie $\operatorname{int} A$.

uitwendig punt. Een punt is een *uitwendig punt* van een verzameling A als het een inwendig punt van het complement van A is.

uitwendige. Het *uitwendige* van een verzameling is de verzameling van al haar uitwendige punten. Notatie $\operatorname{ext} A$

randpunt. Een punt is een *randpunt* als het noch een inwendig- noch een uitwendig punt van die verzameling is.

rand. De *rand* van een verzameling A is de verzameling van al haar randpunten. Notatie ∂A.

gesloten verzameling. Een verzameling is *gesloten* als ze het complement van een open verzameling is.

afsluiting. De *afsluiting* van een verzameling is de vereniging van die verzameling en haar rand. Notatie $\operatorname{cl} A$.

adherent punt. Een punt is een *adherent punt* van een verzameling als elke omgeving van dat punt de verzameling snijdt.

verdichtingspunt. Een punt p is een *verdichtingspunt* van een verzameling als elke omgeving van p punten van de verzameling bevat die ongelijk zijn aan p.

dichte deelverzameling. Een deelverzameling A van een ruimte X heet *dicht* als $\operatorname{cl} A = X$.

G_δ-verzameling. Een verzameling is een G_δ-verzameling als zij geschreven kan worden als doorsnede van een aftelbare collectie open verzamelingen.

F_σ-verzameling. Een verzameling is een F_σ-verzameling als zij geschreven kan worden als vereniging van een aftelbare collectie gesloten verzamelingen.

1.4. Opgave. Ga na dat de collectie $\mathcal{F}$ van gesloten verzamelingen in een metrische ruimte de volgende eigenschappen heeft.

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{F}$,
(ii) als $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ dan $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ en
(iii) als $\{F_i\}_i \subseteq \mathcal{F}$ dan $\bigcap_i F_i \in \mathcal{F}$.

1.5. Opgave. Definieer voor een deelverzameling A van een metrische ruimte

$$A^\circ = \bigcup\{U : U \text{ is open en } U \subseteq A\}$$

en

$$\bar{A} = \bigcap\{F : F \text{ is gesloten en } A \subseteq F\}$$

Bewijs dat $A^\circ = \operatorname{int} A$ en $\bar{A} = \operatorname{cl} A$.

1.6. Opgave. In deze opgave is X een metrische ruimte en $A \subseteq X$. Bewijs de volgende formules/uitspraken:

(i) $\operatorname{cl} A = X \setminus \operatorname{ext} A$,
(ii) $\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(X \setminus A)$,
(iii) $\partial A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$,
(iv) $x \in \operatorname{cl} A$ dan en slechts dan als x een adherent punt is van A en
(v) A is dicht in X dan en slechts dan als $U \cap A \neq \varnothing$ voor elke niet-lege open deelverzameling van X.

Continuïteit is ook met behulp van alléén open verzamelingen te beschrijven; de eerste stelling staat in het dictaat Voortgezette Analyse:

1.7. Stelling. *Een afbeelding $f: X \to Y$ is continu dan en slechts dan als voor elke open deelverzameling U van Y het volledig origineel $f^{-1}[U]$ open is in X.*

De volgende stelling staat niet expliciet in het dictaat Voortgezette Analyse maar zit al impliciet in de definitie opgesloten:

1.8. Stelling. *Laat $f: X \to Y$ een afbeelding tussen metrische ruimten zijn. Dan geldt: f is continu in $p \in X$ dan en slechts dan als voor elke omgeving U van $f(p)$ een omgeving V van p bestaat zó dat $f[V] \subseteq U$ (ofwel $V \subseteq f^{-1}[U]$).*

1.9. Opgave. Bewijs voorgaande stelling.

Het begrip homeomorfisme is ook topologisch; het is immers afgeleid van het begrip continuiteit. Een *homeomorfisme* tussen twee metrische ruimten is een continue bijectie waarvan de inverse afbeelding ook continu is.

De volgende eigenschappen die metrische ruimten kunnen hebben zijn ook topologisch:

splitsbaarheid. Een ruimte X heet *splitsbaar* als er twee niet-lege gesloten deelverzamelingen F en G van X bestaan zó dat $F \cap G = \varnothing$ en $X = F \cup G$.

samenhang. Een ruimte heet *samenhangend* als ze niet splitsbaar is.

compactheid. Een ruimte heet *compact* als elke open overdekking een eindige deeloverdekking heeft.

De Stelling van Stone-Weierstraß is ook een topologische stelling; in het bewijs speelt de metriek op de ruimte X geen rol, alleen de compactheid. Natuurlijk speelt de metriek op de ruimte $C(X)$ van continue functies van X naar $\mathbb{R}$ wel een rol omdat de stelling nu eenmaal zegt dat voor elke compacte ruimte X de bijbehorende metrische ruimte $C(X)$ een bepaalde eigenschap heeft.

Als laatste noemen we convergentie van rijen: een rij $\langle x_n \rangle_n$ convergeert naar een punt x dan en slechts dan als voor elke omgeving U van x een N bestaat zó dat $x_n \in U$ voor elke $n \geqslant N$.

De volgende eigenschappen zijn echte metrische eigenschappen; de metriek is niet uit de definitie weg te halen:

begrensdheid. Een metrische ruimte (X, d) heet *begrensd* als er een getal M bestaat zó dat $d(x, y) \leqslant M$ voor elke $x, y \in X$.

totale begrensdheid. Een metrische ruimte (X, d) heet *totaal begrensd* als voor elke $\varepsilon > 0$ de open overdekking $\{B_\varepsilon(x) : x \in X\}$ een eindige deeloverdekking heeft.

volledigheid. Een metrische ruimte (X, d) heet *volledig* als elke Cauchy-rij in X convergent is.

isometrie. Een *isometrie* tussen twee metrische ruimten is een bijectie die de afstand bewaart.

1.10. Opgave. Ga na dat bovenstaande eigenschappen niet topologisch zijn door telkens paren homeomorfe ruimten aan te geven waarvan één ruimte de eigenschap wel heeft en de ander niet.

2. TOPOLOGISCHE RUIMTEN

We gaan nu 'vergeten' dat we open verzamelingen met behulp van metrieken gemaakt hebben. We zullen structuren bekijken waar alléén een familie 'open' verzamelingen voorhanden is. Allereerst geven we de definitie van een topologie.

2.1. Definitie. Zij X een verzameling. Een *topologie* op X is een collectie $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen van X met de volgende drie eigenschappen (regelrecht uit Stelling 1.2 geciteerd):

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,
(ii) als $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ dan $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ en
(iii) als $\{U_i\}_i \subseteq \mathcal{T}$ dan $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$.

2.2. Definitie. Een *topologische ruimte* is een paar $(X, \mathcal{T})$ waar X een verzameling is en $\mathcal{T}$ een topologie op X.

Voordat we een paar voorbeelden van topologische ruimten gaan bekijken merken we op dat alle *topologische* noties die we hierboven besproken hebben zich onmiddelijk naar de situatie van topologische ruimten laten vertalen; we weten dus meteen wanneer we een afbeelding tussen topologische ruimten continu (in een punt) zullen noemen of hoe we de afsluiting van een deelverzameling definiëren of wanneer een deelverzameling dicht ligt in een topologische ruimte.

2.3. Voorbeelden.

1. Op elke verzameling X is $\mathcal{T}_i = \{\varnothing, X\}$ een topologie; de zogeheten *indiscrete topologie*. Dit is de minimale topologie die op X gemaakt kan worden; ga na dat een indiscrete ruimte altijd samenhangend en compact is en dat elke niet-lege deelverzameling dicht ligt. Voorts is elke afbeelding naar X continu.
2. Het andere uiterste is de *discrete topologie*: dit is de collectie 2^X van *alle* deelverzamelingen van X. Deze topologie kennen we al; hij is met behulp van de discrete metriek gedefinieerd. Als X meer dan één punt bevat is de discrete topologie niet samenhangend; $(X, 2^X)$ is compact dan en slechts dan als X eindig is. Elke afbeelding met X als domein is continu.
3. Laat X nu een oneindige verzameling zijn. Definieer

$$\mathcal{T}_{ce} = \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ is eindig}\}.$$

   Het is niet moeilijk in te zien dat $\mathcal{T}_{ce}$ een topologie is; de zogeheten *co-eindige topologie*. Een verzameling is dus gesloten dan en slechts dan als zij eindig is of gelijk aan X. Een co-eindige ruimte is altijd samenhangend en compact (ga na).
4. Een klassiek voorbeeld is het volgende: definieer een topologie $\mathcal{T}_s$ op $\mathbb{R}$ door: $U \in \mathcal{T}_s$ dan en slechts dan als voor elke $x \in U$ een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $[x, x+\varepsilon) \subseteq U$.* Ga na dat $\mathcal{T}_s$ inderdaad een topologie is. We zullen de topologische ruimte $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ met $\mathbb{S}$ aanduiden. Deze ruimte staat bekend als de *Sorgenfrey lijn*, de topologie $\mathcal{T}_s$ wordt ook wel de *speldentopologie* genoemd omdat hij bepaald wordt door spelden, dat wil zeggen: intervallen van de vorm $[a, b)$ (zie ook Voortgezette Analyse).

2.4. Afspraak. Als we een metrische ruimte tegenkomen zullen we deze altijd van zijn bijbehorende *metrische topologie* voorzien denken, tenzij uitdrukkelijk anders vermeld. In het bijzonder denken we ons $\mathbb{R}$ altijd voorzien van de gewone topologie.

2.5. Opgave. Laat X oneindig zijn en voorzien van de co-eindige topologie. Bewijs dat elke continue afbeelding $f\colon X \to \mathbb{R}$ constant is.

2.6. Opgave. Ga na of de ruimte $\mathbb{S}$ samenhangend is of compact. Toon aan dat de 'Entier' functie gedefinieerd door $x \mapsto [x]$, waar $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$ continu is van $\mathbb{S}$ naar $\mathbb{R}$. Bepaal, in $\mathbb{S}$, het inwendige van $[0, 1]$ en de afsluiting van $(0, 1)$.

Basis voor een topologie

In het dictaat Voortgezette Analyse is ook gedefinieerd wat een basis voor de open verzamelingen is. We herhalen deze definitie maar nu in de context van topologische ruimten.

2.7. Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een *basis* voor de ruimte (of voor de topologie) is een deelcollectie $\mathcal{B}$ van $\mathcal{T}$ met de eigenschap dat voor elke $U \in \mathcal{T}$ een deelfamilie $\mathcal{B}'$ van $\mathcal{B}$ bestaat zó dat $U = \bigcup \mathcal{B}'$.

2.8. Voorbeelden.

1. In een metrische ruimte is de familie van alle open bollen een basis voor de topologie.
2. In de Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is de familie van alle half-open intervallen een basis.

We kunnen aan een collectie deelverzamelingen zien of hij een basis voor een topologie kan zijn; dit is de inhoud van de volgende stelling

* In deze topologie zijn de getallen alléén van boven te benaderen; denk aan het passen van schoenen: een beetje te groot mag, te klein is nooit goed.

2.9. Stelling. *Neem aan dat $\mathcal{B}$ een basis voor de topologie $\mathcal{T}$ op de verzameling X is. Dan voldoet $\mathcal{B}$ aan de volgende twee eigenschappen.*

(i) *Als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ en $x \in B_1 \cap B_2$ dan is er een $B \in \mathcal{B}$ zó dat $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$ en*
(ii) *$X = \bigcup \mathcal{B}$.*

Omgekeerd, als een familie $\mathcal{B}$ aan deze eigenschappen voldoet dan is er een topologie waar $\mathcal{B}$ een basis voor is.

Bewijs. De tweede eigenschap is duidelijk: ook X is open. De eerste eigenschap volgt uit het feit dat de doorsnede van twee open verzamelingen weer open is: als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ dan bestaat een collectie $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ met $B_1 \cap B_2 = \bigcup \mathcal{B}'$. Kies dan, als $x \in B_1 \cap B_2$ een $B \in \mathcal{B}'$ met $x \in B$.

Als $\mathcal{B}$ aan de basiseigenschappen voldoet dan nemen we voor $\mathcal{T}$ de collectie van alle mogelijke verenigingen van deelfamilies van $\mathcal{B}$. Het is niet moeilijk na te gaan dat $\mathcal{T}$ een topologie op X is. Om te zien dat $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ merken we op dat $B = \bigcup\{B\}$ voor elke $B \in \mathcal{B}$. We hebben voorts $\mathcal{T}$ zo gemaakt dat $\mathcal{B}$ automatisch een basis voor $\mathcal{T}$ is. □

2.10. Voorbeeld. Ga na dat de familie $\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ en } a < b\}$ aan de basiseigenschappen voldoet.

Een speciale plaats in de topologie wordt ingenomen door de ruimten met een aftelbare basis. In navolging van Hausdorff [1914] zegt men dat die ruimten aan het *tweede aftelbaarheidsaxioma** voldoen. Zo heeft $\mathbb{R}$ een aftelbare basis, de familie van alle open intervallen met rationale eindpunten.

2.11. Opgave. Bewijs dat $\mathbb{S}$ niet aan het tweede aftelbaarheids axioma voldoet.

Lokale bases

Een tweede manier om topologieën te maken is via lokale bases.

2.12. Definitie. Laat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte zijn en $x \in X$. Een *lokale basis in x* is een collectie $\mathcal{B}_x$ omgevingen van x met de eigenschap dat voor elke omgeving U van x er een $B \in \mathcal{B}_x$ is met $B \subseteq U$.

We noemen een lokale basis ook wel een *basis voor de omgevingen* of een *omgevingenbasis*.

2.13. Voorbeelden.

1. Het standaardvoorbeeld van een omgevingenbasis is natuurlijk de familie bollen rond een punt in een metrische ruimte. Als $x \in X$, waar (X, d) een metrische ruimte is dan zijn $\{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ en $\{B_{2^{-n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ lokale bases in x.
2. Als $x \in \mathbb{S}$ dan is $\{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ een omgevingenbasis voor x.

We kunnen ook topologieën maken door voor ieder punt x in een verzameling X een familie $\mathcal{B}_x$ te kiezen en deze als lokale bases te gebruiken. Hiertoe moeten we eerst uitzoeken welke eigenschappen zo'n 'toekenning van lokale bases' moet hebben.

2.14. Stelling. *Neem aan dat in de ruimte $(X, \mathcal{T})$ voor iedere $x \in X$ een lokale basis $\mathcal{B}_x$ gekozen is. Dan gelden de volgende eigenschappen.*

(i) *Voor elke x is $\mathcal{B}_x$ niet leeg en $x \in B$ voor elke $B \in \mathcal{B}_x$.*
(ii) *Als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ dan is er een $B \in \mathcal{B}_x$ zó dat $B \subseteq B_1 \cap B_2$.*
(iii) *Als $y \in B \in \mathcal{B}_x$ dan is er een $D \in \mathcal{B}_y$ zó dat $D \subseteq B$.*

* In het Engels: *The second axiom of countability.* Ruimten die aan het tweede aftelbaarheids axioma voldoen worden *second countable spaces* genoemd.

In eigenschap (iii) ligt opgesloten dat elk element van $\mathcal{B}_x$ open is; hij is omgeving van al zijn punten.

Neem nu aan dat we voor elk punt x in een verzameling X een collectie deelverzamelingen hebben gekozen zó dat aan (i), (ii) en (iii) van Stelling 2.14 is voldaan. Definieer $\mathcal{T}$ door: $U \in \mathcal{T}$ dan en slechts dan als voor elke $x \in U$ een $B \in \mathcal{B}_x$ bestaat zó dat $B \subseteq U$.

We gaan na dat $\mathcal{T}$ inderdaad een topologie is en dat voor elke x de familie $\mathcal{B}_x$ een lokale basis (voor $\mathcal{T}$) in x is.

Dat $\varnothing \in \mathcal{T}$ is duidelijk (waarom?) en om in te zien dat $X \in \mathcal{T}$ gebruiken we Eigenschap (i). Eigenschap (ii) zorgt er voor dat de doorsnede van twee elementen van $\mathcal{T}$ ook weer tot $\mathcal{T}$ behoort. Dat verenigingen van deelcollecties van $\mathcal{T}$ tot $\mathcal{T}$ behoren is ook niet moeilijk in te zien.

Eigenschap (iii) impliceert dat voor elke x elk element van $\mathcal{B}_x$ tot $\mathcal{T}$ behoort en daarmee volgt uit de definitie van $\mathcal{T}$ dat $\mathcal{B}_x$ inderdaad een omgevingenbasis voor x is.

Ook hier kan men een aftelbaarheids axioma formuleren. Een ruimte voldoet aan het *eerste aftelbaarheidsaxioma** als elk punt in de ruimte een aftelbare omgevingen basis heeft.

2.15. Voorbeelden.

1. Elke metrische ruimte voldoet aan het eerste aftelbaarheids axioma: Voor elke x is $\bigl\{B_{2^{-n}}(x) : n \in \mathbb{N}\bigr\}$ een aftelbare lokale basis.
2. De Sorgenfrey lijn voldoet ook aan het eerste aftelbaarheids axioma.

2.16. Opgave. Als X aan het eerste aftelbaarheids axioma voldoet dan geldt voor elke punt x en elke deelverzameling A van X: $x \in \operatorname{cl} A$ dan en slechts dan als er een rij in A is die naar x convergeert.

2.17. Voorbeeld. We nemen $X = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\bigr\}$, het bovenhalfvlak. We wijzen voor elk punt in X een lokale basis aan. Voor elk punt (x,y) in X stellen we $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{B(x,y,n) : n \in \mathbb{N}\}$, waar de verzamelingen $B(x,y,n)$ als volgt gedefinieerd zijn.

Voor een punt (x,y) met $y > 0$ en voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we

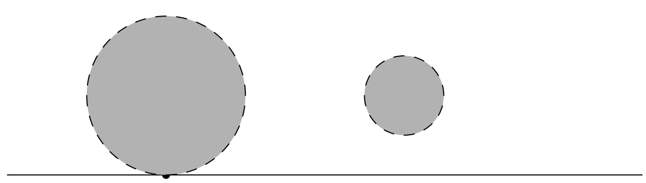
$$B(x,y,n) = \bigl\{(s,t) \in X : \|(s,t) - (x,y)\| < 2^{-n}\bigr\},$$

de gewone open cirkelschijf om (x,y) met straal 2^{-n}.

Voor een punt $(x,0)$ en voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we

$$B(x,0,n) = \bigl\{(x,0)\bigr\} \cup \bigl\{(s,t) \in X : \bigl\|(s,t) - (x,2^{-n})\bigr\| < 2^{-n}\bigr\},$$

de verzameling die bestaat uit het punt $(x,0)$ en de open cirkelschijf met straal 2^{-n} die in $(x,0)$ de x-as raakt, zie Figuur 1.



Figuur 1. Basisomgevingen in het Niemytzki vlak

---

* In het Engels: *The first axiom of countability.* Ruimten die aan het eerste aftelbaarheids axioma voldoen worden *first countable spaces* genoemd.

Deze topologische ruimte staat bekend als het *Niemytzki vlak*.

2.18. Opgave. Toon aan dat de toekenning in het Niemytzki vlak inderdaad aan de eigenschappen uit Stelling 2.14 voldoet.

Bewijs vervolgens dat het Niemytzki vlak samenhangend is en dat *elke* deelverzameling van de x-as gesloten is.

2.19. Voorbeeld. We nemen de volgende deelverzameling van $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{(0,0)\} \cup \{(2^{-n},0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(2^{-n},2^{-m}) : n,m \in \mathbb{N}\}.$$

We kennen elk punt een lokale basis toe: de punten ongelijk aan $(0,0)$ krijgen hun gewone omgevingen. Voor het punt $(0,0)$ doen we iets speciaals: voor elke $n \in \mathbb{N}$ en elke functie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiëren we

$$\begin{aligned} B(f,n) = \{(0,0)\} &\cup \{(2^{-m},0) : m \in \mathbb{N}, m \geqslant n\} \\ &\cup \{(2^{-m},2^{-l}) : m \in \mathbb{N}, m \geqslant n, l \geqslant f(m)\}. \end{aligned}$$

We zetten $\mathcal{B}_{(0,0)} = \{B(f,n)\}_{f,n}$.

2.20. Opgave. Toon aan dat in Voorbeeld 2.19 inderdaad een goede toekenning van lokale bases is gedaan. Bewijs dat $(0,0)$ in de afsluiting van $A = \{(2^{-n},2^{-m}) : n,m \in \mathbb{N}\}$ zit maar dat geen enkele rij in A naar $(0,0)$ convergeert. Deze ruimte voldoet dus niet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

II

NIEUWE TOPOLOGISCHE EIGENSCHAPPEN

We zullen in dit deel een aantal nieuwe topologische eigenschappen introduceren. Deze eigenschappen vertellen iets over de mogelijkheid punten te onderscheiden; deze worden dan ook *scheidingsaxioma's* genoemd.

Afspraak. We zullen vanaf nu veelal over 'de topologische ruimte X' spreken en de topologie $\mathcal{T}$ niet altijd expliciet noemen.

3. SCHEIDINGSAXIOMA'S

Als we met de indiscrete topologie werken kunnen we geen onderscheid maken tussen verschillende punten: er is maar één niet-lege open verzameling en dus hebben alle punten dezelfde familie omgevingen. We zullen eerst een paar eigenschappen formuleren die een steeds groter onderscheid tussen punten mogelijk maken.

Punten van punten scheiden

De eenvoudigste *scheidingseigenschap* is de volgende:

3.1. Definitie. Een topologische ruimte X heet een *T_0-ruimte* als de collecties omgevingen per punt verschillen. Met andere woorden: als $x \neq y$ dan is er een omgeving van x waar y niet in zit of omgekeerd.

3.2. Voorbeelden.
1. De eenvoudigste T_0-ruimte is $X = \{0, 1\}$ met als open verzamelingen $\varnothing$, $\{0\}$ en X.
2. Een ander voorbeeld krijgen we door $\mathbb{R}$ te nemen en als basis de collectie $\bigl\{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\bigr\}$.

We zien dat T_0-ruimten al een redelijke hoeveelheid open verzamelingen moeten hebben. De volgende stelling impliceert dat er tenminste zoveel open verzamelingen moet zijn als punten in de ruimte.

3.3. Stelling. *Een ruimte X is een T_0-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x, y \in X$ geldt: als $x \neq y$ dan $\operatorname{cl}\{x\} \neq \operatorname{cl}\{y\}$.*

Bewijs. Als X een T_0-ruimte is en $x \neq y$ dan is er bijvoorbeeld een omgeving van y waar x niet in zit; we zien dat $y \notin \operatorname{cl}\{x\}$.

Omgekeerd laat $x, y \in X$ en stel dat $x \in \operatorname{cl}\{y\}$. Dan volgt meteen dat $\operatorname{cl}\{x\} \subseteq \operatorname{cl}\{y\}$. Als ook nog $y \in \operatorname{cl}\{x\}$ dan volgt $\operatorname{cl}\{y\} \subseteq \operatorname{cl}\{x\}$ en dus $\operatorname{cl}\{x\} = \operatorname{cl}\{y\}$ en daarmee, volgens onze veronderstelling, $x = y$. We zien: als $x \neq y$ dan $x \notin \operatorname{cl}\{y\}$ of $y \notin \operatorname{cl}\{x\}$; in beide gevallen is er een omgeving die het ene punt wel heeft en het andere punt niet. $\square$

3.4. Opgave. Bepaal $\operatorname{cl}\{x\}$ voor de punten van de ruimten in de voorbeelden uit 3.2.

Een nog betere manier om punten uit elkaar te houden is door in Definitie 3.1 het woord 'of' te vervangen door 'en'.

3.5. Definitie. Een topologische ruimte X heet een *T_1-ruimte* als voor elk tweetal verschillende punten x en y in X omgevingen U van x en V van y bestaan met $x \notin V$ en $y \notin U$.

Een handige karakterisering van T_1-ruimten is de volgende.

3.6. Stelling. *Een ruimte X is een T_1-ruimte dan en slechts dan als $\{x\}$ gesloten is voor elke $x \in X$.*

Bewijs. Bewijs zelf de implicatie van links naar rechts.

De implicatie van rechts naar links volgt door, bij gegeven x en y, respectievelijk $U = X \setminus \{y\}$ en $V = X \setminus \{x\}$ te nemen. $\square$

De volgende stelling volgt meteen uit de definities of uit de karakteriseringen.

3.7. Stelling. *Elke T_1-ruimte is een T_0-ruimte.*

3.8. Voorbeelden.

1. Elke co-eindige topologie is T_1; de co-eindige topologie is in feite de kleinste T_1-topologie die op een verzameling te maken is.
2. Een eindige T_1-ruimte is discreet (ga na).
3. Elke metrische ruimte is een T_1-ruimte: als $x \neq y$ neem $U = B_r(x)$ en $V = B_r(y)$, waar $r = d(x, y)$.

3.9. Opgave. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Bewijs: de ruimte $(X, \mathcal{T})$ is T_1 dan en slechts dan als $\mathcal{T}_{ce} \subseteq \mathcal{T}$.

Een nog betere puntenscheiding krijgen we als volgt.

3.10. Definitie. Een topologische ruimte X heet een T_2- of *Hausdorff ruimte* als elk tweetal verschillende punten in X disjuncte omgevingen heeft; dus als $x \neq y$ dan zijn er een omgeving U van x en een omgeving V van y zó dat $U \cap V = \varnothing$.

Het moge duidelijk zijn dat elke T_2-ruimte een T_1-ruimte is. Het onderscheid wordt nog iets duidelijker door de volgende karakteriseringen.

3.11. Stelling. *Zij X een topologische ruimte.*

(i) *X is een T_1-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ geldt $\{x\} = \bigcap\{U : U$ is een omgeving van $x\}$.*

(ii) *X is een T_2-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ geldt $\{x\} = \bigcap\{\operatorname{cl} U : U$ is een omgeving van $x\}$.*

3.12. Voorbeelden.

1. Elke metrische ruimte is Hausdorff: als $x \neq y$ dan $B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing$ waar $r = d(x, y)/2$.
2. De Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is Hausdorff: als $x < y$ dan zijn $(-\infty, y)$ en $[y, \infty)$ disjunkte omgevingen van x en y.
3. Ga na dat het Niemytzki vlak en de ruimte uit Voorbeeld 2.19 ook Hausdorff zijn.

Uit de Voortgezette Analyse kennen we volgende stelling voor metrische ruimten.

3.13. Stelling. *Laat f en g continue afbeeldingen zijn van een topologische ruimte X naar een Hausdorff ruimte Y. Dan is de verzameling $A = \bigl\{x \in X : f(x) = g(x)\bigr\}$ gesloten in X.*

Bewijs. Doe dit zelf; het is makkelijker te bewijzen dat $X \setminus A$ open is. $\square$

3.14. Opgave. Maak een continue afbeelding f van $\mathbb{R}$ met de gewone topologie naar $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{ce})$ zó dat $\{x : f(x) = x\} = \mathbb{Q}$.

3.15. Opgave. Bewijs dat in een Hausdorff ruimte elk rijtje ten hoogste één limiet heeft. Laat ook zien dat in $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{ce})$ de rij $\langle n \rangle_n$ naar elk punt van $\mathbb{N}$ convergeert.

Punten en gesloten verzamelingen scheiden

We maken onze lijst van scheidingseigenschappen nog iets langer. Om te beginnen scheiden we punten van gesloten verzamelingen.

3.16. Definitie. Een ruimte X heet een T_3*-ruimte* als voor elke gesloten verzameling F in X en elk punt $x \in X \setminus F$ disjunkte open verzamelingen U en V bestaan met $x \in U$ en $F \subseteq V$.

Met behulp van complementen krijgen we de volgende karakterisering van de T_3-eigenschap.

3.17. Stelling. *Een ruimte X is een T_3-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ en elke omgeving U van x er een omgeving V van x is zó dat $\operatorname{cl} V \subseteq U$.*

3.18. Voorbeelden.

1. Elke metrische ruimte heeft de T_3-eigenschap: als U een omgeving van x is en $B_r(x) \subseteq U$ dan $\operatorname{cl} B_{r/2}(x) \subseteq U$.
2. De Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is een T_3-ruimte: als U een omgeving van x is en $[x, x+\varepsilon) \subseteq U$ neem dan $V = [x, x+\varepsilon)$ want $\operatorname{cl} V = V$.

3.19. Opgaven.

1. Toon aan dat het Niemytzki vlak een T_3-ruimte is. *Aanwijzing*: Toon aan dat voor elke punt (x, y) en elke n de inclusie $\operatorname{cl} B(x, y, n+1) \subseteq B(x, y, n)$ geldt.
2. Toon aan dat de ruimte uit Voorbeeld 2.19 een T_3-ruimte is.
   Aanwijzing: Elke basisomgeving is open-en-gesloten.

We kunnen de T_3-eigenschap wat interessanter maken door er de T_0-eigenschap bij op te tellen:

3.20. Definitie. Een topologische ruimte X heet *regulier* als ze een T_0- en een T_3-ruimte is.

De reden is dat we dan een versterking van de Hausdorff eigenschap krijgen.

3.21. Stelling. *Elke reguliere ruimte is een Hausdorff ruimte.*

Bewijs. Stel $x \neq y$ in de reguliere ruimte X. Neem aan dat bijvoorbeeld $x \notin \operatorname{cl}\{y\}$; gebruik nu de T_3-eigenschap. □

3.22. Voorbeelden.

1. Zij $X = [0, 1]$ het eenheidsinterval. Geef elk punt $x > 0$ zijn gewone omgevingen. Voor het punt 0 en elke $n \in \mathbb{N}$ zetten we $B(0, n) = [0, 2^{-n}) \setminus \{2^{-m} : m \in \mathbb{N}\}$. Dit levert een legitiem systeem van omgevingenbases. De zo verkregen ruimte is Hausdorff (ga na). Omdat $\operatorname{cl} B(0, n) = [0, 2^{-n}]$ voor elke n is de ruimte niet regulier (ga na).
2. Neem $X = \mathbb{R}$ en stel

$$\mathcal{T} = \{U \setminus C : U \text{ is open in de gewone topologie en } C \text{ is aftelbaar}\}.$$

Ga na dat $\mathcal{T}$ een Hausdorff topologie is die niet regulier is.

De volgende scheidingseigenschap is de sterkste die we voorlopig zullen beschouwen. De definitie zal niet als een verrassing komen.

3.23. Definitie. Een ruimte X heet een T_4*-ruimte* als voor elk tweetal disjunkte gesloten verzamelingen F en G in X disjunkte open verzamelingen U en V bestaan met $F \subseteq U$ en $G \subseteq V$.

3.24. Voorbeelden.

1. Elke metrische ruimte heeft de T_4-eigenschap: laat F en G disjuncte en gesloten verzamelingen in de metrische ruimte X zijn. Kies voor elke $x \in F$ een getal $r(x) > 0$ zó dat $B_{3r(x)}(x) \cap G = \varnothing$ en kies analoog $r(x) > 0$ voor elke $x \in G$. Stel nu $U = \bigcup\bigl\{B_{r(x)}(x) : x \in F\bigr\}$ en $V = \bigcup\bigl\{B_{r(x)}(x) : x \in G\bigr\}$. Ga na dat $U \cap V = \varnothing$ (zelfs $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \varnothing$).
2. De ruimten uit Voorbeeld 3.2 zijn T_4-ruimten omdat daar geen disjunkte gesloten verzamelingen zijn.
3. De Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is een T_4-ruimte: Als F en G gesloten en disjunkt zijn kies dan voor $x \in F$ ($x \in G$) een $\varepsilon_x > 0$ zó dat $[x, x + \varepsilon_x) \cap G = \varnothing$ (of $[x, x + \varepsilon_x) \cap F = \varnothing$). Ga na dat $U = \bigcup\bigl\{[x, x + \varepsilon_x) : x \in F\bigr\}$ en $V = \bigcup\bigl\{[x, x + \varepsilon_x) : x \in G\bigr\}$ disjunkt zijn.

Zoals uit bovenstaande voorbeelden blijkt is de combinatie van T_4 en T_0 niet zo interessant. De combinatie van T_4 en T_1 is dat wel.

3.25. Definitie. Een topologische ruimte X heet *normaal* als ze een T_1- en een T_4-ruimte is.

Omdat in een T_1-ruimte punten gesloten verzamelingen opleveren is de volgende stelling meteen duidelijk.

3.26. Stelling. *Elke normale ruimte is regulier.*

Niet elke reguliere ruimte is normaal.

3.27. Voorbeeld. Het Niemytzki vlak is niet normaal. Om dit in te zien nemen we de volgende disjunkte gesloten verzamelingen: $F = \bigl\{(x, 0) : x \in \mathbb{Q}\bigr\}$ en $G = \bigl\{(x, 0) : x \in \mathbb{P}\bigr\}$ (we gebruiken $\mathbb{P}$ voor de verzameling der irrationale getallen). Laat $U \supseteq F$ en $V \supseteq G$ open verzamelingen zijn; we moeten aantonen dat $U \cap V \neq \varnothing$. Dit zal ons enige zweetdruppels kosten.

We beginnen met $\mathbb{P}$ op te delen in aftelbaar veel stukken: voor elke n stellen we

$$G_n = \{x \in \mathbb{P} : B(x, 0, n) \subseteq V\}.$$

We beweren nu: als $x \in \operatorname{cl} G_n$ (ten opzichte van de gewone topologie van $\mathbb{R}$) dan $(x, 0) \in \operatorname{cl} V$ (in het Niemytzki vlak).

Stel maar dat $\langle x_i \rangle_i$ een rij in G_n is met limiet x. We bewijzen dat $B(x, 0, n) \setminus \bigl\{(x, 0)\bigr\}$ overdekt wordt door de familie $\bigl\{B(x_i, 0, n) : i \in \mathbb{N}\bigr\}$. Laat $(p, q) \in B(x, 0, n) \setminus \bigl\{(x, 0)\bigr\}$ en zij $\varepsilon = 2^{-n} - \bigl\|(x, 2^{-n}) - (p, q)\bigr\|$. Voor elke i met $|x_i - x| < \varepsilon$ geldt $\bigl\|(x_i, 2^{-n}) - (p, q)\bigr\| < 2^{-n}$ (driehoeksongelijkheid) en dus $(p, q) \in B(x_i, 0, n)$. We zien dat $B(x, 0, n) \setminus \bigl\{(x, 0)\bigr\} \subseteq V$ en dus dat $(x, 0) \in \operatorname{cl} V$.

Rest nog te bewijzen dat $\operatorname{cl} G_n \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ voor een $n \in \mathbb{N}$: neem dan q in de doorsnede en kies $m \geqslant n$ met $B(q, 0, m) \subseteq U$.

Neem eens aan dat $\operatorname{cl} G_n \cap \mathbb{Q} = \varnothing$ voor alle n. We gebruiken de Neststelling van Cantor om tot een tegenspraak te komen.

Neem een aftelling $\langle q_n \rangle_n$ van de rationale getallen. Kies een gesloten interval I_1 om 0 zó dat $I_1 \cap G_1 = \varnothing$ (dit kan omdat $0 \notin \operatorname{cl} G_1$). Kies vervolgens een deelinterval J_1 van I_1 met $q_1 \notin J_1$. We gaan verder met inductie: als J_n gevonden is kiezen we eerst een rationaal getal q in het inwendige van J_n. Vervolgens kiezen we, omdat $q \notin \operatorname{cl} G_{n+1}$, een gesloten interval I_{n+1} om q disjunkt van G_{n+1}. Tenslotte verkleinen we I_{n+1} tot een interval J_{n+1} met $q_{n+1} \notin J_{n+1}$.

Volgens de Neststelling is er een punt x in $\bigcap_n I_n$. Omdat we alle rationale getallen vermeden hebben zit x niet in $\mathbb{Q}$. Omdat $\mathbb{P} = \bigcup_n G_n$ en omdat we elke G_n hebben vermeden zit x ook niet in $\mathbb{P}$. Dit is een duidelijke tegenspraak.

3.28. Opgave. In Voorbeeld 3.27 is verkapt de Stelling van Baire gebruikt. Deze Stelling zegt: *als* $\langle F_n \rangle_n$ *een rij nergens dichte deelverzamelingen van* $\mathbb{R}$ *is dan is het complement van* $\bigcup_n F_n$ *een dichte deelverzameling van* $\mathbb{R}$.

Een verzameling A heet *nergens dicht* als $\operatorname{int} \operatorname{cl} A = \varnothing$.

a) Bewijs de Stelling van Baire. *Aanwijzing*: Loop het bewijs in Voorbeeld 3.27 nauwkeurig na.
b) Bewijs met behulp van de Stelling van Baire dat $\mathbb{Q}$ geen G_δ-verzameling van $\mathbb{R}$ is.
c) Bewijs met behulp van de Stelling van Baire dat het Niemytzki vlak niet normaal is.

Normale ruimten

Normale ruimten hebben een paar eigenschappen die reguliere ruimten niet hebben; de belangrijkste, voor ons, is dat normale ruimten een groot aantal continue functies naar $\mathbb{R}$ hebben.

Voor we de stelling die al die continue functies levert formuleren en bewijzen moeten we de T_4-eigenschap een beetje herformuleren.

Allereerst een formulering in termen van gesloten en open verzamelingen.

3.29. Lemma. *Een ruimte* X *is een* T_4*-ruimte dan en slechts dan als voor elke gesloten verzameling* F *en elke open verzameling* U *met* $F \subseteq U$ *een open verzameling* V *bestaat met* $F \subseteq V \subseteq \operatorname{cl} V \subseteq U$.

Bewijs. Gegeven F en U bekijk de disjunkte gesloten verzamelingen F en $X \setminus U$. Als $O_1 \supseteq F$ en $O_2 \supseteq X \setminus U$ open en disjunkt zijn dan geldt $\operatorname{cl} O_1 \subseteq U$.

Omgekeerd, als F en G disjunkt en gesloten zijn kies dan $U \supseteq F$ met $\operatorname{cl} U \subseteq X \setminus G$ en neem $V = X \setminus \operatorname{cl} U$. □

We kunnen de T_4-eigenschap ook iets versterken.

3.30. Lemma. *Als* X *een* T_4*-ruimte is en* F *en* G *gesloten en disjunkt in* X *dan bestaan open verzamelingen* $U \supseteq F$ *en* $V \supseteq G$ *zó dat* $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \varnothing$.

Bewijs. Kies disjunkte open verzamelingen $O_1 \supseteq F$ en $O_2 \supseteq G$. Kies dan $U \supseteq F$ met $\operatorname{cl} U \subseteq O_1$ en neem $V = O_2$. □

De volgende stelling staat bekend als het Lemma van Urysohn.

3.31. Stelling. *Een ruimte* X *is een* T_4*-ruimte dan en slechts dan als voor elk tweetal gesloten en disjunkte verzamelingen* F *en* G *een continue functie* $f\colon X \to [0,1]$ *bestaat met* $f \restriction F \equiv 0$ *en* $f \restriction G \equiv 1$.

Bewijs. Van rechts naar links is niet moeilijk: gegeven de continue functie f kunnen we $U = f^{-1}\bigl[[0,\frac{1}{2})\bigr]$ en $V = f^{-1}\bigl[(\frac{1}{2},1]\bigr]$ nemen.

Van links naar rechts zal wat meer moeite kosten. Laten we eens kijken wat we nodig hebben. Als $f\colon X \to [0,1]$ een functie is zoals gevraagd dan kunnen we voor elke $r \in (0,1)$ de open verzameling $U_r = f^{-1}\bigl[[0,r)\bigr]$ nemen. De zo verkregen familie open verzamelingen bepaalt de functie geheel: er geldt namelijk, voor elke x en elke r,

$$f(x) < r \text{ dan en slechts dan als } x \in U_r,$$

en dus

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in U_r\}, & \text{als } x \in \bigcup_r U_r \text{ en} \\ 1, & \text{als } x \notin \bigcup_r U_r. \end{cases} \tag{$*$}$$

De familie $\{U_r : 0 < r < 1\}$ heeft nog een andere eigenschap namelijk:

$$\text{als } s < r \text{ dan } \operatorname{cl} U_s \subseteq U_r. \tag{$**$}$$

We zien: een continue functie van X naar $\mathbb{R}$ bepaalt een familie open verzamelingen met eigenschap $(**)$ en die familie bepaalt de functie volgens formule $(*)$.

Hierdoor geïnspireerd zullen we proberen een familie open verzamelingen $\{U_r : 0 < r < 1\}$ te maken die aan $(**)$ voldoet en dan via formule $(*)$ een functie definiëren en *aantonen dat die functie continu is*.

We beginnen met de U_r te maken voor elke $r \in \mathbb{Q}$. We nemen hiertoe aftelling $\langle q_n \rangle_n$ van $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ met $q_0 = 0$ en $q_1 = 1$. Om te beginnen kiezen we twee open verzamelingen U_0 en U_1 zó dat

$$F \subseteq U_0 \subseteq \operatorname{cl} U_0 \subseteq U_1 \subseteq X \setminus G.$$

Vervolgens kiezen we een open verzameling U_{q_2} zó dat

$$\operatorname{cl} U_0 \subseteq U_{q_2} \subseteq \operatorname{cl} U_{q_2} \subseteq U_1.$$

Laat nu U_{q_i} gevonden zijn voor alle $i < n$ (waar $n \geqslant 3$) zó dat

$$\text{als } i, j < n \text{ en } q_i < q_j \text{ dan } \operatorname{cl} U_{q_i} \subseteq U_{q_j}. \tag{$\dagger$}$$

We zoeken een U_{q_n} zó dat $(\dagger)$ ook geldt voor $i, j \leqslant n$. We kijken waar q_n ligt ten opzichte van de q_i met $i < n$; kies $i_0, i_1 < n$ zó dat $q_{i_0} < q_n < q_{i_1}$ en zó dat geen enkele q_i met $i < n$ in het interval (q_{i_0}, q_{i_1}) ligt. We kunnen nu een open verzameling U_{q_n} kiezen met

$$\operatorname{cl} U_{q_{i_0}} \subseteq U_{q_n} \subseteq \operatorname{cl} U_{q_n} \subseteq U_{q_{i_1}}.$$

Aan het eind van deze constructie hebben we een familie $\bigl\{U_q : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\bigr\}$ van open verzamelingen met eigenschap $(**)$. Definieer nu $U_r = \bigcup_{q \leqslant r} U_q$ voor $r \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Voor de grotere collectie geldt eigenschap $(**)$ ook: als $r < s$ dan kiezen we eerst p en q in $\mathbb{Q}$ met $r < p < q < s$. Dan volgt makkelijk dat $\operatorname{cl} U_r \subseteq \operatorname{cl} U_p \subseteq U_q \subseteq U_s$.

Definieer nu $f\colon X \to [0,1]$ via formule $(*)$. We beweren dat f continu is. Neem $x \in X$ en een interval (r,s) om $f(x)$. Kies p en q met $r < p < f(x) < q < s$ en neem $U = U_q \setminus \operatorname{cl} U_p$; U is open en omdat $p < f(x) < q$ geldt $x \in U$. Verder geldt dat $f[U] \subseteq (r,s)$: als $y \in U$ dan $p \leqslant f(y) \leqslant q$.

Tenslotte: als $x \in F$ dan $x \in U_r$ voor alle r, dus $f(x) = 0$ en als $x \in G$ dan $x \notin \bigcup_r U_r$ dus $f(x) = 1$. $\square$

3.32. Opgave. Voor metrische ruimten is het heel makkelijk een functie als in Stelling 3.31 te vinden; ga na dat

$$f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)}$$

voldoet.

Met behulp van het Lemma van Urysohn kunnen we ook een fraaie beschrijving van gesloten G_δ-verzamelingen (en dus ook van open F_σ-verzamelingen) geven.

3.33. Opgave. Zij X een normale ruimte. Een gesloten verzameling F in X is een G_δ-verzameling dan en slechts dan als een continue functie $f\colon X \to \mathbb{R}$ bestaat met $F = \{x : f(x) = 0\}$. *Aanwijzing*: Van rechts naar links is makkelijk. Van links naar rechts: stel $F = \bigcap_n O_n$ en kies voor elke n een continue $f_n\colon X \to [0,1]$ met $f_n \restriction F \equiv 0$ en $f_n \restriction (X \setminus O_n) \equiv 1$. Beschouw nu $f = \sum_n 2^{-n} f_n$.

Volledig reguliere ruimten

We besluiten dit hoofdstuk met een eigenschap die tussen normaliteit en regulariteit in zit.

3.34. Definitie. Een topologische ruimte X heet een $T_{3\frac{1}{2}}$*-ruimte* als voor elke gesloten deelverzameling F van X en elk punt $x \in X \setminus F$ een continue functie $f\colon X \to [0,1]$ bestaat met $f(x) = 0$ en $f \restriction F \equiv 1$.

Een ruimte die zowel T_0 als $T_{3\frac{1}{2}}$ is noemen we *volledig regulier* of een *Tychonoff ruimte*.

3.35. Opgave. Bewijs dat elke normale ruimte volledig regulier is en dat elke volledig reguliere ruimte regulier is.

3.36. Opgave. Bewijs dat elke deelruimte van een volledig reguliere ruimte weer volledig regulier is.

Uit deze beide opgaven volgt dat elke deelruimte van een normale ruimte volledig regulier is. Dit is het beste dat men kan zeggen; niet elke deelruimte van een normale ruimte hoeft normaal te zijn.

3.37. Voorbeelden.

1. Daar elke normale ruimte volledig regulier is is elke metrische ruimte volledig regulier; geef hiervan een direct bewijs.
2. De Sorgenfrey lijn is dus ook volledig regulier; dit is ook direct in te zien: als F gesloten is en $x \notin F$ kies dan $y > x$ met $[x,y) \cap F = \varnothing$. De functie f gedefinieerd door

$$f(p) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant p < y \text{ en} \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$

voldoet duidelijk.

3.38. Voorbeeld. Het Niemytzki vlak is volledig regulier; omdat de ruimte niet normaal is moeten we dit met de hand laten zien. Voor de punten boven de x-as kunnen we de gewone metriek van $\mathbb{R}^2$ gebruiken om continue functies te maken.

Neem nu een punt $(x,0)$ op de x-as en definieer voor elke $r \in (0,1]$

$$U_r = \bigl\{(x,0)\bigr\} \cup \bigl\{(p,q) : \|(p,q) - (x,r)\| < r\bigr\}.$$

Eenvoudig is in te zien dat elke U_r open is en dat $\operatorname{cl} U_r \subseteq U_s$ als $r < s$. Als in het bewijs van het Lemma van Urysohn definiëren we nu

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in U_r\}, & \text{als } x \in \bigcup_r U_r \text{ en} \\ 1, & \text{als } x \notin \bigcup_r U_r. \end{cases}$$

Dit geeft een continue functie met $f(x,0) = 0$ en $f(p,q) = 1$ als $(p,q) \notin U_1$. Door deze functie te herschalen kunnen we voor elke omgeving U van $(x,0)$ een functie g vinden met $g(x,0) = 0$ en $g(p,q) = 1$ voor $(p,q) \notin U$.

3.39. Voorbeeld. We maken het plaatje volledig door een voorbeeld te geven van een reguliere ruimte die niet volledig regulier is. We maken hiertoe een topologie op het bovenhalfvlak.

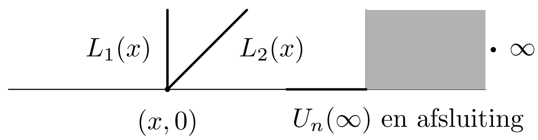
De punten boven de x-as maken we geïsoleerd, dat wil zeggen, als z niet op de x-as ligt dan is $\bigl\{\{z\}\bigr\}$ een lokale basis in z.

Voor een punt $(x,0)$ op de x-as maken we basisomgevingen als volgt: eerst stellen we $L_1(x) = \bigl\{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant 1\bigr\}$ (het verticale lijntje ter lengte 1 vanuit $(x,0)$) en $L_2(x) = \bigl\{(x+y,y) : 0 \leqslant y \leqslant 1\bigr\}$ (het lijntje dat onder een hoek van $\pi/4$ vanuit $(x,0)$ vertrekt). Vervolgens zetten we $L_x = L_1(x) \cup L_2(x)$. Als lokale basis in $(x,0)$ nemen we $\mathcal{B}_x = \{L_x \setminus F : F$ is eindig en $(x,0) \notin F\}$. De zo verkregen ruimte is regulier, zelfs volledig regulier want elke basisomgeving is open-en-gesloten.

We voegen nog één punt ∞ toe, met basisomgevingen

$$U_n(\infty) = \{\infty\} \cup \bigl\{(x,y) : x \geqslant n\bigr\} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ga na dat $\operatorname{cl} U_{n+1} = U_{n+1} \cup \bigl\{(x,0) : n < x \leqslant n+1\bigr\}$; de zo verkregen ruimte M is dus nog steeds regulier: $\operatorname{cl} U_{n+1} \subseteq U_n$. Zie ook Figuur 2.



Figuur 2. Omgevingen in Voorbeeld 3.39

De ruimte is niet volledig regulier. Neem maar eens een continue functie $f\colon M \to [0,1]$ met $f(x,0) = 0$ voor $x \leqslant 0$. We bewijzen dat $f(\infty) = 0$.

Hiertoe merken we eerst het volgende op: voor elke $x \in \mathbb{R}$ is er een aftelbare verzameling $A_x \subseteq L_x$ zó dat als $\boldsymbol{p} \in L_x \setminus A_x$ dan $f(\boldsymbol{p}) = f(x,0)$; immers voor elke n is er een eindige verzameling F_n zó dat $\bigl|f(\boldsymbol{p}) - f(x,0)\bigr| < 2^{-n}$ voor $\boldsymbol{p} \in L_x \setminus F_n$, neem nu $A_x = \bigcup_n F_n$.

We bewijzen nu: voor elke n zijn er maar aftelbaar veel $x \in [n, n+1)$ waarvoor $f(x,0) \neq 0$. Voor $n < 0$ klopt dit. Neem $n \geqslant 0$ en neem aan dat het al klopt voor $k < n$. Kies een rij $\langle x_i \rangle_i$ in $[n-1, n)$ die naar n convergeert en zó dat $f(x_i, 0) = 0$ voor alle i.

Projecteer de vereniging $\bigcup_i \bigl(L_2(x_i) \cap A_{x_i}\bigr)$ op de x-as; we krijgen een aftelbare verzameling A. Neem nu $x \in [n, n+1) \setminus A$; de lijn $L_1(x)$ snijdt dan $L_2(x_i) \setminus A_{x_i}$ voor bijna alle i. Elke omgeving van $(x,0)$ snijdt dus ook bijna alle $L_2(x_i) \setminus A_{x_i}$. Hieruit volgt dat $f(x,0) = 0$.

3.40. Opgave. Voeg nog een extra punt $-\infty$ aan de ruimte M uit Voorbeeld 3.39 toe, met basisomgevingen $U_n(-\infty) = \{-\infty\} \cup \bigl\{(x,y) : x \leqslant -n\bigr\}$. Deze nieuwe ruimte noemen we M^+.

Bewijs nu dat $f(\infty) = f(-\infty)$ voor elke continue functie $f\colon M^+ \to \mathbb{R}$.

3.41. Opgave. Bestudeer nu het artikel [1972] van van Douwen of maak Opgave 2.7.17 in het boek [1989] van Engelking.

III

COMPACTHEID EN PRODUCTEN

We zullen nu de klasse der compacte Hausdorff ruimten beschouwen. Willekeurige compacte ruimten zijn over het algemeen niet zo interessant; de compactheidseigenschap komt pas goed tot z'n recht als de Hausdorff eigenschap erbij wordt opgeteld.

In het tweede hoofdstuk van dit deel maken we producten van topologische ruimten.

4. EENVOUDIGE EIGENSCHAPPEN

Om te beginnen herhalen we de definitie van compactheid nog maar eens even.

4.1. Definitie. Een topologische ruimte is *compact* als elke open overdekking van die ruimte een eindige deeloverdekking heeft.

4.2. Voorbeelden.

1. Elke eindige ruimte is compact.
2. Elke ruimte met de co-eindige topologie is compact.
3. De Sorgenfrey lijn, het Niemytzki vlak en de ruimte uit Voorbeeld 2.19 zijn niet compact.
4. Elk gesloten en begrensd interval in $\mathbb{R}$ is compact, ten opzichte van de gewone topologie.

Door in de definitie over te gaan op complementen krijgen we de volgende herformulering van compactheid. Een ruimte is compact dan en slechts dan als elke familie gesloten verzamelingen met lege doorsnede een eindige deelfamilie heeft die ook een lege doorsnede heeft.

In de praktijk gebruiken we de contrapositieve formulering:

4.3. Stelling. *Een ruimte is compact dan en slechts dan als elke familie gesloten verzamelingen waarvan elke eindige deelfamilie een niet-lege doorsnede heeft zelf ook een niet-lege doorsnede heeft.*

In plaats van de zin 'elke eindige deelfamilie heeft een niet-lege doorsnede' zeggen we dat de familie de *eindige-doorsnede eigenschap** heeft.

We zullen nu wat eigenschappen van compacte ruimten bekijken; sommige van deze eigenschappen kennen we in feite al van de cursus Voortgezette Analyse.

4.4. Stelling. *Zij $f\colon X \to Y$ een continue surjectieve afbeelding, waarbij X een compacte ruimte is, dan is Y ook compact.*

4.5. Stelling. *Elke gesloten deelruimte van een compacte ruimte is compact.*

De stelling dat compacte deelruimten van metrische ruimten gesloten zijn geldt niet voor willekeurige topologische ruimten.

4.6. Voorbeeld. Neem $\mathbb{N}$ met de co-eindige topologie en neem de deelruimte $2\mathbb{N}$. Dan is $2\mathbb{N}$ compact (want zij draagt de co-eindige topologie) maar niet gesloten.

We kunnen wel de volgende stelling bewijzen.

* Engels: *finite intersection property.*

4.7. Stelling. *Zij X een Hausdorff ruimte en Y een compacte deelruimte van X, dan is Y gesloten in X.*

Bewijs. Het bewijs is instructief genoeg om volledig na te lopen.

Zij $x \in X \setminus Y$; we zoeken een omgeving U van x die disjunct is van Y. Kies hiertoe voor elke $y \in Y$ een omgeving U_y van x en een omgeving V_y van y zó dat $U_y \cap V_y = \varnothing$.

We hebben nu een open overdekking van Y: de familie $\{V_y : y \in Y\}$. Neem een eindige deeloverdekking, zeg $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_k}\}$.

Maak nu $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}$ en $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}$; dan zijn U en V disjunct, x is een element van U en $Y \subseteq V$.

We hebben dus niet alleen laten zien dat x een omgeving heeft die disjunct is van Y, we hebben zelfs disjuncte omgevingen voor x en Y gevonden. □

Door het bewijs van deze stelling even na te lopen krijgen we vrijwel meteen de volgende stelling cadeau.

4.8. Stelling. *Elke compacte Hausdorff ruimte is regulier.*

En als we het bewijs nog beter bekijken dan zien we ook dat de volgende stelling waar is.

4.9. Stelling. *Elke compacte Hausdorff ruimte is normaal.*

Een andere stelling uit de Voortgezette Analyse zegt dat een continue bijectie van een compacte metrische ruimte naar een andere metrische ruimte automatisch een homeomorfisme is. Deze stelling geldt onverkort voor compacte Hausdorff ruimten. Het bewijs is ook hetzelfde.

4.10. Stelling. *Zij $f\colon X \to Y$ een continue bijectie, waarbij X compact is en Y Hausdorff. Dan is f een homeomorfisme.*

Bewijs. Om de continuïteit van f^{-1} te bewijzen moeten we aantonen dat $f[A]$ gesloten is in Y voor elke gesloten verzameling A in X.

Welnu: A is compact dus $f[A]$ is compact dus $f[A]$ is gesloten. □

Deze stelling vertelt ons iets over de plaats van compacte Hausdorff topologieën tussen de andere topologieën. Immers, stel $\mathcal{T}$ en $\mathcal{S}$ zijn topologieën op dezelfde verzameling X. Neem aan dat $\mathcal{T}$ compact is, dat $\mathcal{S}$ Hausdorff is en dat $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Dan volgt uit bovenstaande stelling dat $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ omdat de identieke afbeelding een continue bijectie van $(X, \mathcal{T})$ naar $(X, \mathcal{S})$ is.

4.11. Opgave. Leid uit bovenstaande opmerking af dat compacte Hausdorff topologieën *minimaal Hausdorff* en *maximaal compact* zijn: elke topologie met echt minder open verzamelingen is niet meer Hausdorff en elke topologie met echt meer open verzamelingen is niet meer compact.

5. PRODUCTEN

Een fundamenteel stuk gereedschap in de topologie is dat van het product van topologische ruimten. Men gebruikt de producttopologie zowel bij het construeren van tegenvoorbeelden als bij het bewijzen van stellingen.

We voeren eerst eindige producten in en laten vervolgens zien hoe men het product van oneindig veel topologische ruimten maakt.

Eindige producten

Om te beginnen de definitie van het product van een eindig aantal verzamelingen.

5.1. Definitie. Laat X_1, X_2,…, X_n een eindig aantal verzamelingen zijn. Het *product* van die verzamelingen is de verzameling van alle (geordende) n-tallen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die voldoen aan $x_i \in X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

We noteren het product als $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ of $\prod_{i=1}^n X_i$.

5.2. Voorbeelden.

1. Volgens deze definitie is $\mathbb{R}^n$ inderdaad het product van n kopieën van $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ is dus de verzameling van punten in het vlak waarvan de tweede coördinaat rationaal is.

Voor de gewone topologie van $\mathbb{R}^n$ is de verzameling van open rechthoeken een basis. Dit idee gebruiken we om een topologie op andere producten te maken.

5.3. Definitie. Laat $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, …, $(X_n, \mathcal{T}_n)$ een eindige familie topologische ruimten zijn.

Een *open blok* in $\prod_{i=1}^n X_i$ is een verzameling van de vorm $\prod_{i=1}^n U_i$ waar telkens U_i open is in X_i.

5.4. Lemma. *De familie van open blokken is een basis voor een topologie op* $\prod_{i=1}^n X_i$.

Bewijs. Ga zelf na dat de doorsnede van twee open blokken weer een open blok is en dat de open blokken het product overdekken. Pas vervolgens Stelling 2.9 toe. □

5.5. Definitie. Laat $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, …, $(X_n, \mathcal{T}_n)$ een eindige familie topologische ruimten zijn.

De *producttopologie* op $\prod_{i=1}^n X_i$ is de topologie die de familie der open blokken als basis heeft.

De verzameling $\prod_{i=1}^n X_i$ met de producttopologie noemen we het *product* van de ruimten $(X_1, \mathcal{T}_1)$, …, $(X_n, \mathcal{T}_n)$.

Bij de definitie van de producttopologie hebben we ons laten leiden door de situatie in $\mathbb{R}^n$. Er is nog een andere reden om de producttopologie te definiëren zoals we dat gedaan hebben: de projecties van het product naar de factoren zijn continu en de producttopologie is de 'zuinigste' topologie die dit klaarspeelt.

5.6. Definitie. Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$ een product van een n-tal verzamelingen en $i \leqslant n$. De afbeelding $\pi_i \colon X \to X_i$ gedefinieerd door $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ heet de *projectie op de i-de coordinaat of factor*.

5.7. Stelling. *Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$ een product van een n-tal topologische ruimten. Dan is elke projectie $\pi_i \colon X \to X_i$ continu. Elke andere topologie die de projecties continu maakt is groter dan de producttopologie.*

Bewijs. Dat elke π_i continu is is eenvoudig: als $U \subseteq X_i$ open is dan is $\pi_i^{-1}[U]$ een open blok (wat zijn de factoren?).

Omgekeerd, stel $\mathcal{T}$ is een topologie die de projecties continu maakt. Dan volgt meteen dat voor elke i en elke open verzameling U van X_i het open blok $\pi_i^{-1}[U]$ tot $\mathcal{T}$ behoort. Elke eindige doorsnede van dit soort open blokken behoort dan ook tot $\mathcal{T}$ (want $\mathcal{T}$ is een topologie); maar zo krijgen we nu net alle open blokken.

Conclusie: $\mathcal{T}$ bevat alle open blokken en dus ook willekeurige verenigingen van open blokken. Maar dit is precies wat we wilden aantonen. □

Met behulp hiervan kunnen we laten zien dat continuïteit van een afbeelding *naar* een product hetzelfde is als coördinaatsgewijze continuïteit.

5.8. Stelling. *Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$ een product van een n-tal topologische ruimten. Dan geldt: een afbeelding $f: Y \to X$ is continu dan en slechts dan als alle samenstellingen $\pi_i \circ f$ continu zijn.*

Bewijs. Als f continu is, dan is zeker elke $\pi_i \circ f$ continu. (Ga na!)

Omgekeerd, neem aan dat elke samenstelling $\pi_i \circ f$ continu is. Zij $y \in Y$, en zij $U = \prod_i U_i$ een basisomgeving van $f(y)$. Nu geldt voor $z \in Y$ dat $f(z) \in U$ dan en slechts dan als voor elke i de i-de coördinaat van $f(z)$ tot U_i behoort. Die i-de coördinaat is precies $\pi_i\bigl(f(z)\bigr)$.

We kunnen dus narekenen dat

$$f^{-1}[U] = \bigcap_{i=1}^{n} (\pi_i \circ f)^{-1}[U_i],$$

waarmee is aangetoond dat $f^{-1}[U]$ een omgeving van y is. $\square$

In het algemeen zullen we in een situatie als deze de afbeelding $\pi_i \circ f$ noteren als f_i.

Omgekeerd kunnen we uit een stel afbeeldingen $f_i: Y \to X_i$ een afbeelding f van Y naar X maken: definieer maar $f(y) = \bigl(f_1(y), f_2(y), \ldots, f_n(y)\bigr)$. De afbeelding f heet wel de *diagonaal* van de afbeeldingen f_1, f_2, …, f_n. We noteren de diagonaal als $f = \triangle_{i=1}^n f_i$ of $f = f_1 \vartriangle f_2 \vartriangle \cdots \vartriangle f_n$.

Bij Voortgezette Analyse is bewezen dat elk begrensd en gesloten blok in $\mathbb{R}^n$ compact is. Een zorgvuldige analyse van dat bewijs geeft de volgende stelling.

5.9. Stelling. *Het product van een eindig aantal compacte topologische ruimten is compact.*

We gebruiken het bovengenoemde bewijs om een handige stelling over compacte rechthoeken in producten af te leiden. Door in het bewijs de rechthoek gelijk te nemen aan het hele product zien we dat het product zelf ook compact is.

5.10. Stelling. *Laat C en D compacte deelverzamelingen zijn van respectievelijk de ruimten X en Y en zij O een omgeving van $C \times D$. Dan bestaan omgevingen U van C en V van D zó dat $U \times V \subseteq O$.*

Bewijs. Neem eerst $x \in C$ vast en kies voor elke $y \in D$ omgevingen W_y van x en V_y van y met $W_y \times V_y \subseteq O$. Omdat D compact is zijn er y_1, y_2, …, y_n in D zó dat $D \subseteq V^x = \bigcup_i V_{y_i}$. Definieer $U_x = \bigcap_i U_{y_i}$; dan volgt $\{x\} \times D \subseteq U_x \times V^x \subseteq O$.

Gebruik nu de compactheid van C om $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in C te vinden zó dat $C \subseteq U = \bigcup_i U_{x_i}$. Definieer nu $V = \bigcap_i V^{x_i}$, dan volgt $C \times D \subseteq U \times V \subseteq O$. $\square$

Eén van de bewijzen dat $\mathbb{R}^2$ samenhangend is laat zich generaliseren.

5.11. Stelling. *Het product van eindig veel samenhangende ruimten is samenhangend.*

5.12. Opgave. Bewijs voor elk van de onderstaande eigenschappen dat het product de eigenschap heeft, zodra elke factor deze heeft.

T_0, T_1, T_2, regulier, volledig regulier en het hebben van een aftelbare basis.

5.13. Opgave. Het product van de Sorgenfrey lijn met zichzelf is niet normaal.
Aanwijzing: Bekijk op de 'nevendiagonaal' de verzamelingen $Q = \bigl\{(q, -q) : q \in \mathbb{Q}\bigr\}$ en $P = \bigl\{(p, -p) : p \in \mathbb{P}\bigr\}$. Laat zien dat Q en P gesloten zijn. Pas nu het argument voor het Niemytzki vlak uit Voorbeeld 3.27 aan.

5.14. Opgave. Het product van een eindig aantal metrizeerbare topologische ruimten is metrizeerbaar. *Aanwijzing*: Definieer, naar analogie met $\mathbb{R}^n$, een metriek op $\prod_{i=1}^n X_i$ door

$$d\bigl((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\bigr)=\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i),$$

waar telkens d_i een metriek op X_i is die de topologie genereert.

Oneindige producten

Om te beginnen moeten we afspreken wat het product van een willekeurige familie verzamelingen zou moeten zijn. Het antwoord ligt, na enig nadenken, eigenlijk voor de hand; als we eindig veel—zeg n—verzamelingen hebben dan bestaat het product uit geordende n-tallen punten waarbij telkens de i-de coördinaat uit de i-de verzameling komt. Zo'n n-tal is in feite een functie met domein $\{1,2,\ldots,n\}$ die voor elke i een punt in X_i kiest—een keuzefunctie.

5.15. Definitie. Laat $\{X_t\}_{t\in T}$ een familie verzamelingen zijn. Het *product* van die verzamelingen is gedefinieerd als de verzameling van alle keuzefuncties van die familie; we noteren het product als $\prod_{t\in T} X_t$.

Dus $x\in\prod_{t\in T} X_t$ dan en slechts dan als x een functie is met domein T zó dat $x(t)\in X_t$ voor alle t. Om de suggestie van coördinaten te versterken schrijven we x_t in plaats van $x(t)$ en $x=(x_t)_{t\in T}$.

Vervolgens nemen we aan dat elke X_t een topologische ruimte is, met topologie $\mathcal{T}_t$. De vraag is nu hoe we $\prod_{t\in T} X_t$ van een topologie zullen voorzien. We laten ons leiden door een natuurlijke eis, namelijk dat de projecties continu moeten zijn en dat dit zo zuinig mogelijk moet gebeuren. Vergelijk hiertoe Stelling 5.7.

5.16. Definitie. Zij $X=\prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie verzamelingen en neem $s\in T$. De afbeelding $\pi_s\colon X\to X_s$ gedefinieerd door $\pi_s\bigl((x_t)_{t\in T}\bigr)=x_s$ heet de *projectie op de s-de coördinaat of factor*.

Als we willen dat elke projectie continu is dan moet voor elke t en voor elke open verzameling U in X_t het volledig origineel $\pi_t^{-1}[U]$ open zijn. Voorts moeten eindige doorsneden van dit soort verzamelingen ook weer open zijn. Dit leidt ons ertoe een speciaal soort open blokken te beschouwen die we, ietwat slordig, eindige open blokken zullen noemen.

5.17. Definitie. Zij $X=\prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie topologische ruimten. Een *eindig open blok* in X is een verzameling van de vorm $\prod_{t\in T} U_t$, waarbij U_t een open deelverzameling van X_t is voor elke t èn waarbij voor ten hoogste eindig veel t geldt dat $U_t\neq X_t$.

Nu is het product zelf een eindig open blok en de doorsnede van twee eindige open blokken is weer een eindig open blok. De familie der eindige open blokken is dus een basis voor een topologie op het product. Dit wordt dan de producttopologie.

5.18. Definitie. Zij $X=\prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie topologische ruimten. De *producttopologie* op X is de topologie die de familie der eindige open blokken als basis heeft.

De verzameling X met de producttopologie noemen we het *product* van de familie ruimten $\bigl\{(X_t,\mathcal{T}_t):t\in T\bigr\}$.

De geldigheid van de volgende stelling hebben we als het ware gewoon geforceerd.

5.19. Stelling. *Zij $X=\prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie topologische ruimten. Dan is elke projectie $\pi_t\colon X\to X_t$ continu. Elke andere topologie die ook de projecties continu maakt is groter dan de producttopologie.*

Het bewijs staat in feite hierboven en is geheel analoog aan dat van Stelling 5.7.
Stelling 5.8, in aangepaste vorm, geldt ook.

5.20. Stelling. *Zij $X = \prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie topologische ruimten. Dan geldt: een afbeelding $f\colon Y \to X$ is continu dan en slechts dan als alle samenstellingen $\pi_t \circ f$ continu zijn.*

Het bewijs levert geen nieuwe problemen op; we gebruiken immers *eindige* open blokken om de topologie te maken.

Tenslotte kunnen we uit een familie afbeeldingen $f_t\colon Y \to X_t$ weer een afbeelding f van Y naar X maken via $f(y) = \bigl(f_t(y)\bigr)_{t\in T}$. We noemen f weer de *diagonaal* van de afbeeldingen $\{f_t\}_{t\in T}$. De notatie blijft dezelfde: $f = \triangle_{t\in T} f_t$.

5.21. Opgave. Bewijs voor elk van de onderstaande eigenschappen dat het product de eigenschap heeft, zodra elke factor deze heeft.
T_0, T_1, T_2, regulier en volledig regulier.

5.22. Opgave. Bewijs: Een aftelbaar product van ruimten met een aftelbare basis heeft zelf ook een aftelbare basis.

5.23. Stelling. *Zij $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ een product van een aftelbare familie metrizeerbare ruimten. Dan is X zelf ook metrizeerbaar.*

Bewijs. We kunnen op elke ruimte X_n een metriek d_n kiezen die de topologie voortbrengt en die begrensd is door 1. We definiëren vervolgens een metriek op X door

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n).$$

Het is eenvoudig na te gaan dat d een metriek is. Het kost iets meer moeite na te gaan dat d de producttopologie voortbrengt.

Zij U open in de producttopologie en $x \in U$; we moeten een $\varepsilon > 0$ vinden zó dat $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Kies eerst een eindig open blok $\prod_n U_n$ met $x \in \prod_n U_n \subseteq U$ en kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $U_n = X_n$ als $n \geqslant N$. Vervolgens bepalen we voor elke $n < N$ een $\varepsilon_n > 0$ zó dat $B_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq U_n$. Als we nu $\varepsilon > 0$ zó kunnen bepalen dat $d(x,y) < \varepsilon$ impliceert dat $d_n(x_n,y_n) < \varepsilon_n$ voor elke $n < N$ dan zijn we klaar (ga na dat dan $B_\varepsilon(x) \subseteq \prod_n U_n$).

Welnu, voor elke n geldt $d_n(x_n,y_n) \leqslant 2^n d(x,y)$; kies dus $\varepsilon = \min\{2^{-n}\varepsilon_n : n < N\}$ Dan geldt: Als $d(x,y) < \varepsilon$ dan geldt $d_n(x_n,y_n) < 2^n\varepsilon \leqslant 2^n 2^{-n}\varepsilon_n = \varepsilon_n$.

Zij nu U een d-open verzameling en $x \in U$; we zoeken een eindig open blok $\prod_n U_n$ zó dat $x \in \prod_n U_n \subseteq U$. Kies eerst $\varepsilon > 0$ zó dat $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ en kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\sum_{n\geqslant N} 2^{-n} < \varepsilon/2$. Definieer

$$U_n = \begin{cases} B_{\varepsilon/2}(x_n) & \text{als } n < N \text{ en} \\ X_n & \text{als } n \geqslant N. \end{cases}$$

Als $y \in \prod_n U_n$ dan geldt

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n<N} 2^{-n} d_n(x_n,y_n) + \sum_{n\geqslant N} 2^{-n} d_n(x_n,y_n) \\ &< \sum_{n<N} 2^{-n}\varepsilon/2 + \sum_{n\geqslant N} 2^{-n} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

We zien dat $\prod_n U_n \subseteq B_\varepsilon(x)$. □

5.24. Gevolg. *De producten* $[0,1]^\infty$ *en* $\mathbb{R}^\infty$ *zijn metrizeerbaar.*

5.25. Opgave. Bewijs dat een product van een familie samenhangende ruimten weer samenhangend is.

5.26. Opgave. Er is nog een voor de hand liggende manier om een product van een topologie te voorzien. Hier laten we alle open blokken toe, dus willekeurige producten van de vorm $\prod_{t\in T} U_t$ met elke U_t open in X_t. De zo verkregen topologie heet de *doostopologie* (in het engels: *boxtopology*).

a) Ga na dat de familie van alle open blokken inderdaad als basis voor een topologie kan dienen.

Deze topologie heeft niet zulke mooie eigenschappen als de producttopologie. Neem maar eens het product $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, waarbij $X_n = [0,1]$ voor elke n.

b) De diagonaal $\triangle_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Id}_n$ is niet continu; $\mathrm{Id}_n\colon [0,1] \to X_n$ is de identieke afbeelding.
Aanwijzing: De waardenverzameling heeft, als deelruimte van X, de discrete topologie.

c) De doostopologie op X is niet samenhangend en niet metrizeerbaar.

IV

DE STELLING VAN TYCHONOFF

De Stelling van Tychonoff, die zegt dat het product van willekeurig veel compacte topologische ruimten weer compact is, is één van de belangrijkste stellingen uit de topologie. De stelling duikt in vele gedaanten op; wij hebben hem nodig bij het maken van de Čech-Stone compactificatie.

Voor we de stelling van Tychonoff kunnen bewijzen moeten we iets meer van compacte ruimten weten en een paar extra noties invoeren.

Om te zien wat we nodig hebben bekijken we hoe het bewijs voor eindig veel compacte ruimten verloopt. Stel X en Y zijn compact en laat $\{U_i \times V_i : i \in I\}$ een overdekking van $X \times Y$ zijn met open blokken. De cruciale stap is het vinden, voor elke $x \in X$, van een omgeving U_x van x zó dat de open strook $U_x \times Y$ door slechts eindig veel rechthoeken $U_i \times V_i$ wordt overdekt. Dit gaat via de compactheid van Y: er zijn eindig veel i, zeg i_1, i_2, $\ldots$, i_n, zó dat $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_k U_{i_k} \times V_{i_k}$. Neem dan $U_x = \bigcap_k U_{i_k}$.

De open overdekking $\{U_x : x \in X\}$ van X heeft dan een eindige deeloverdekking; met behulp hiervan kunnen we een eindige deeloverdekking van $\{U_i \times V_i : i \in I\}$ vinden.

We reduceren dus in feite een willekeurige open overdekking, via rechthoeken, tot een overdekking met stroken en een overdekking met stroken is in feite een overdekking van één van de factoren.

We zullen voor willekeurige producten hetzelfde doen, alleen zal het niet zo makkelijk gaan als voor eindig veel factoren: er is namelijk geen laatste factor waar we mee kunnen beginnen.

Er is een belangrijk stuk gereedschap dat ons in staat stelt veel oneindige zaken tot eindige proporties terug te brengen: dat gereedschap heet filter.

6. FILTERS EN ULTRAFILTERS

We zullen de Stelling van Tychonoff via een omweg bewijzen. We zetten eerst een theorie van convergentie in willekeurige topologische ruimten op, bewijzen vervolgens het analogon van de stelling dat een metrische ruimte compact is dan en slechts dan als elke rij in die ruimte een convergente deelrij heeft en bewijzen tenslotte dat die gegeneraliseerde convergentieëigenschap productief is.

De juiste generalisatie van rijen zijn de filters. Zie Definitie 6.8 en Voorbeeld 6.9.1 voor meer uitleg.

Filters

6.1. Definitie. Zij X een verzameling. Een collectie $\mathcal{F}$ van deelverzamelingen van X is een *filter* op X als

(i) $\varnothing \notin \mathcal{F}$,
(ii) als $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ dan is er een $F_3 \in \mathcal{F}$ zó dat $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$ en
(iii) als $F \in \mathcal{F}$ en $F \subseteq G$ dan $G \in \mathcal{F}$.

6.2. Voorbeelden.

1. Als $\langle x_n \rangle_n$ een rij in X is dan is de familie $\mathcal{F}$ gedefinieerd door: $F \in \mathcal{F}$ dan en slechts dan als er een $N \in \mathbb{N}$ is met $\{x_n : n \geqslant N\} \subseteq F$, een filter op X.

2. Als X een oneindige verzameling is dan is $\mathcal{F} = \{F : X \setminus F \text{ is eindig}\}$ een filter op X, het co-eindige- of Fréchet filter.
3. Als $x \in X$ dan is $\mathcal{F}_x = \{F : x \in F\}$ een filter op X.
4. Als X een topologische ruimte is en $x \in X$ dan is $\mathcal{U}_x = \{F : x \in \operatorname{int} F\}$ een filter, het *omgevingenfilter* van x.

We kunnen een filter ook beschrijven door een basis aan te geven.

6.3. Definitie. Zij X een verzameling. Een collectie $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van X heet een *filterbasis* op X als de familie $\mathcal{F} = \{F : \text{er is een } B \in \mathcal{B} \text{ met } B \subseteq F\}$ een filter is. We noemen $\mathcal{B}$ dan ook wel een *basis* voor het filter $\mathcal{F}$.

6.4. Voorbeelden. We geven voor elk filter uit 6.2 een basis.

1. De familie van de 'staarten' van de rij $\langle x_n \rangle_n$ is een basis voor het bijbehorende filter; een *staart* is een verzameling van de vorm $\{x_n : n \geqslant N\}$.
2. Het co-eindige filter heeft geen voor de hand liggende basis, behalve als $X = \mathbb{N}$: dan nemen we de staarten van $\mathbb{N}$.
3. De familie $\big\{\{x\}\big\}$ is een basis voor $\mathcal{F}_x$.
4. Elke omgevingenbasis in x is een basis voor $\mathcal{U}_x$.

Het volgende lemma is eenvoudig te bewijzen.

6.5. Lemma. *Zij X een verzameling. Een collectie $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van X is een filterbasis dan en slechts dan als*

(i) $\varnothing \notin \mathcal{B}$ *en*
(ii) *als $F_1, F_2 \in \mathcal{B}$ dan is er een $F_3 \in \mathcal{B}$ zó dat $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$.*

Een voorbeeld dat bij compactheid een grote rol speelt is het volgende:

6.6. Voorbeeld. Stel $\{A_i : i \in I\}$ is een overdekking van een verzameling X zonder eindige deeloverdekking; dan is de familie van verzamelingen van de vorm $X \setminus \bigcup_{i \in F} A_i$, met F eindig, een filterbasis op X. Het bijbehorende filter $\mathcal{F}$ heeft een lege doorsnede want $\bigcap \mathcal{F} = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \varnothing$. Een filter met een lege doorsnede wordt een *vrij filter* genoemd.

Via dit voorbeeld is de volgende stelling snel in te zien.

6.7. Stelling. *Een ruimte X is compact dan en slechts dan als voor elk filter $\mathcal{F}$ op de ruimte geldt $\bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$.*

Bewijs. Als $\mathcal{F}$ een filter is beschouw dan $\mathcal{U} = \{X \setminus \operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\}$; geen eindige deelfamilie van $\mathcal{U}$ overdekt X (waarom niet?). Omdat X compact is kan $\mathcal{U}$ zelf dus ook X niet overdekken. Maar $X \setminus \bigcup \mathcal{U} = \bigcap \mathcal{F}$.

Omgekeerd, als X een overdekking $\mathcal{U}$ heeft zonder eindige deeloverdekking dan maken we uit $\mathcal{U}$ een filter $\mathcal{F}$ als in Voorbeeld 6.6. Maar dan geldt $\bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\} = \varnothing$. $\square$

Bekijk nog eens het filter $\mathcal{F}$ dat bij een rij $\langle x_n \rangle_n$ hoort; neem eens aan dat de rij $\langle x_n \rangle_n$ naar een punt x convergeert. Dan behoort elke omgeving van x tot $\mathcal{F}$: convergentie betekent immers dan voor elke omgeving U van x een N bestaat zó dat $x_n \in U$ voor $n \geqslant N$. Dus als $x_n \to x$ dan $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$ en het omgekeerde is ook waar (ga maar na).

We komen tot de volgende definitie.

6.8. Definitie. Zij X een topologische ruimte, $\mathcal{F}$ een filter op X en $x \in X$. We zeggen dat het filter $\mathcal{F}$ naar het punt x *convergeert* als $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$.

6.9. Voorbeelden.

1. De opmerking die aan de Definitie 6.8 vooraf gaat zegt: een rijtje $\langle x_n \rangle_n$ convergeert naar een punt x dan en slechts dan als het bij de rij behorende filter naar x convergeert.
2. Het filter $\mathcal{U}_x$ convergeert dus zeker naar x; het is het kleinste filter dat naar x convergeert.
3. Het filter $\mathcal{F}_x$ convergeert ook naar x.

Neem nu eens aan dat $\mathcal{F}$ een filter is en dat $x \in \bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\}$. Dan is voor elke omgeving U van x en elk element F van $\mathcal{F}$ de doorsnede $U \cap F$ niet leeg. De familie $\mathcal{G} = \{U \cap F : U \in \mathcal{U}_x, F \in \mathcal{F}\}$ is zelfs een filter en we zien dat $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{G}$ en $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

We concluderen: als $x \in \bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\}$ dan is er een filter $\mathcal{G}$ zó dat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ en $\mathcal{G}$ convergeert naar x.

We noemen een filter $\mathcal{G}$ *fijner* dan een filter $\mathcal{F}$ als $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$; we noemen $\mathcal{F}$ dan ook *grover* dan $\mathcal{G}$.

We krijgen de volgende stelling (bewijs zelf de implicatie van rechts naar links).

6.10. Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een topologische ruimte X. Dan geldt voor elke $x \in X$ dat $x \in \bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\}$ dan en slechts dan als er een filter $\mathcal{G}$ is dat fijner is dan $\mathcal{F}$ en dat naar x convergeert.*

We kunnen nu het beloofde analogon van de stelling dat een metrische ruimte compact is dan en slechts dan als elke rij in die ruimte een convergente deelrij heeft formuleren en bewijzen.

6.11. Stelling. *Een topologische ruimte is compact dan en slechts dan als voor elk filter op die ruimte een fijner filter bestaat dat convergeert.*

Bewijs. Combineer Stellingen 6.7 en 6.10. □

Nu we convergentie van filters hebben gedefinieerd kunnen we dit gebruiken om afsluitingen en continuïteit te beschrijven.

6.12. Opgave. Zijn A een deelverzameling van een topologische ruimte X en $x \in X$. Bewijs: $x \in \operatorname{cl} A$ dan en slechts dan als er een filter $\mathcal{F}$ is met $A \in \mathcal{F}$ dat naar x convergeert.

Vervolgens bekijken we continuïteit. Allereerst moeten we beeldfilters definiëren. Dit gaat vrij natuurlijk; als $f\colon X \to Y$ een afbeelding is en $\mathcal{F}$ een filter op X dan is $\{f[F] : F \in \mathcal{F}\}$ een filterbasis op Y (ga na); het door deze basis voortgebrachte filter noteren we als $f(\mathcal{F})$ en we noemen dit het *beeldfilter* van $\mathcal{F}$ onder f.

6.13. Opgave. Laat $f\colon X \to Y$ een afbeelding tussen topologische ruimten zijn. Dan geldt:

a) Als $x \in X$ dan is f continu in x dan en slechts dan als voor elk filter op X dat naar x convergeert het beeldfilter naar $f(x)$ convergeert.
b) De afbeelding f is continu dan en slechts dan als voor elk convergent filter op X het beeldfilter ook convergeert (naar de juiste limiet).

We kunnen ook inzien dat convergentie in een product hetzelfde is als coördinaatsgewijze convergentie.

6.14. Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een product $X = \prod_{t \in T} X_t$ van topologische ruimten. Dan geldt: $\mathcal{F}$ convergeert naar $x = (x_t)_{t \in T}$ dan en slechts dan als voor elke t het filter $\pi_t(\mathcal{F})$ naar x_t convergeert.*

Bewijs. Omdat de projecties continu zijn volgt uit convergentie coördinaatsgewijze convergentie.

Omgekeerd, neem aan dat $\pi_t(\mathcal{F})$ naar x_t convergeert voor elke t. Zij U een basisomgeving van x, bepaald door $U_{t_1}, U_{t_2}, \ldots, U_{t_n}$.

Voor iedere i geldt dan dat $U_{t_i} \in \pi_{t_i}(\mathcal{F})$, dus $\pi_{t_i}(F_i) \subseteq U_{t_i}$ voor een $F_i \in \mathcal{F}$. Maar dan geldt $F_i \subseteq \pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}]$ en dus $\pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}] \in \mathcal{F}$ voor elke i.

Nu volgt $U \in \mathcal{F}$, want $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}]$. □

Ultrafilters

We gaan nu een speciaal soort filters bekijken: ultrafilters.

6.15. Definitie. Een *ultrafilter* is een filter waarvoor geen fijner filter bestaat.

Met andere woorden: als voor elk filter $\mathcal{G}$ met $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ geldt dat $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ ($\mathcal{F}$ is een *maximaal* filter) dan noemen we $\mathcal{F}$ een ultrafilter.

We bewijzen eerst een paar karakteriseringen van ultrafilters.

6.16. Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een verzameling X; dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(i) *$\mathcal{F}$ is een ultrafilter;*
(ii) *voor elke deelverzameling A van X geldt: als $A \cap F \neq \varnothing$ voor alle $F \in \mathcal{F}$ dan $A \in \mathcal{F}$;*
(iii) *voor elk tweetal deelverzamelingen A en B van X geldt: als $A \cup B \in \mathcal{F}$ dan $A \in \mathcal{F}$ of $B \in \mathcal{F}$;*
(iv) *voor elke deelverzameling A van X geldt: $A \in \mathcal{F}$ of $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Bewijs. (i) $\Rightarrow$ (ii): neem aan dat $A \cap F \neq \varnothing$ voor alle $F \in \mathcal{F}$. Dan is $\{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ een filterbasis (ga na!) en het filter $\mathcal{G}$ dat hierdoor wordt voortgebracht is fijner dan $\mathcal{F}$ en bevat A; maar dan $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ en dus $A \in \mathcal{F}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): neem aan dat $A \notin \mathcal{F}$. Dan geldt voor geen enkele $F \in \mathcal{F}$ dat $F \subseteq A$ (waarom?) en dus $F \cap X \setminus A \neq \varnothing$ voor alle $F \in \mathcal{F}$. Maar dan $X \setminus A \in \mathcal{F}$ en dus ook $(X \setminus A) \cap (A \cup B) \in \mathcal{F}$. Merk nu op dat $(X \setminus A) \cap (A \cup B) \subseteq B$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): pas (iii) toe op A en $X \setminus A$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): als $\mathcal{G}$ een filter zou zijn dat echt fijner was dan $\mathcal{F}$ dan was er een $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Maar dan ook $X \setminus A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ en dus $\varnothing \in \mathcal{G}$; dit is een tegenspraak. □

6.17. Opgave. Bewijs: als $\mathcal{F}$ een ultrafilter op X is en $f\colon X \to Y$ een afbeelding dan is het beeldfilter $f(\mathcal{F})$ ook een ultrafilter.

De volgende stelling volgt nu makkelijk uit Stelling 6.11.

6.18. Stelling. *In een compacte ruimte is elk ultrafilter convergent.*

Het omgekeerde is ook waar: als in een topologische ruimte elk ultrafilter convergeert dan is deze ruimte compact. Voor we dat kunnen bewijzen zullen we manieren moeten vinden om ultrafilters te maken. Dat is helaas niet makkelijk. Eén soort ultrafilters kunnen we eenvoudig beschrijven.

6.19. Voorbeeld. Als $x \in X$ dan is $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$ een ultrafilter.

Dit is ook het enige 'makkelijke' voorbeeld van een ultrafilter dat we kunnen geven. In tegenstelling tot 'gewone' filters zijn ultrafilters niet eenvoudig te beschrijven. Als voorbeeld dient de volgende stelling. We gebruiken hierbij de afbeelding $\varphi\colon 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ gedefinieerd door $\varphi(A) = \sum_{n \in A} 2^{-n}$.

6.20. Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een vrij ultrafilter op $\mathbb{N}$. De verzameling $U = \bigl\{\varphi(F) : F \in \mathcal{F}\bigr\}$ is niet Lebesgue-meetbaar.*

Het Keuzeaxioma

Om ultrafilters te kunnen maken hebben we iets nodig dat ons in één keer de sprong van 'eindig' naar 'oneindig' laat maken. Dat 'iets' is het *Keuzeaxioma.*

6.21. Het Keuzeaxioma. Als $\{X_t : t \in T\}$ een niet-lege familie van niet-lege verzamelingen is dan is het product $\prod_{t\in T} X_t$ niet leeg.

Dit lijkt op het intrappen van een open deur maar is het echt niet. Het punt is dat er geen *manier* gegeven wordt om ook maar *één* individueel punt in $\prod_{t\in T} X_t$ te maken.

6.22. Opmerking. Het Keuzeaxioma is geen stelling, we zullen niet proberen hem te bewijzen en sinds de zestiger jaren weten we dat we het ook niet kunnen. Evenmin kunnen we bewijzen dat het Keuzeaxioma fout is.

Om deze zinnen een beetje toe te lichten het volgende. Tot het begin van deze eeuw werd 'verzameling' gedefinieerd als 'een stel dingen bij elkaar' en er werd, ondanks deze nietszeggende definitie, belangrijk werk mee gedaan. Op een gegeven moment bleek dat deze onbeperkte definitie tot paradoxen leidde: 'de verzameling van alle verzamelingen is geen verzameling'.

Toen werd het tijd na te denken wat men wel en niet met verzamelingen kan en mag doen. Het resultaat van dit denkwerk was een stel leefregels (axioma's) waar je je bij het werken met verzamelingen aan moet houden.

Zo mag je, gegeven twee verzamelingen x en y een nieuwe verzameling maken die alleen x en y als elementen heeft: $\{x, y\}$.

Een ander axioma zegt dat bij elke verzameling x een verzameling z bestaat zó dat $z = \bigcup x$.

Uit deze twee kunnen we afleiden dat $x \cup y$ bestaat voor elk tweetal verzamelingen x en y: er geldt immers $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$.

Als je je aan deze (overigens vrij natuurlijke) regels houdt zal je paradoxen als 'de verzameling van alle verzamelingen' niet meer tegenkomen; die collectie is te groot om door de axioma's beschreven te worden.

Het Keuzeaxioma neemt tussen de axioma's een bijzondere plaats in omdat het, in tegenstelling tot de andere, duidelijk niet-constructief is. Net als bij het Parallelenpostulaat van Euclides in de meetkunde is heel hard geprobeerd het Keuzeaxioma uit de andere axioma's af te leiden of te laten zien dat het niet waar was; zoals boven opgemerkt zijn beide onmogelijk. Toevoeging van het Keuzeaxioma tot de rest van de lijst leidt niet tot tegenspraken net zo min als de toevoeging van zijn ontkenning.

De meerderheid van de wiskundigen gebruikt zonder problemen het Keuzeaxioma en wij doen dat verder ook.

Voor wie meer wil weten: pak een boek over verzamelingenleer uit de Bibliotheek.

We formuleren nog twee andere beweringen die met het Keuzeaxioma equivalent zijn. Hiertoe moeten we nog een paar extra noties definiëren.

6.23. Definitie. Zij X een verzameling. Een *partiële ordening* op X is een relatie op X, suggestief geschreven als $\preccurlyeq$, met de volgende drie eigenschappen.

(i) Voor alle $x \in X$ geldt $x \preccurlyeq x$.
(ii) Voor alle x en y in X geldt: als $x \preccurlyeq y$ en $y \preccurlyeq x$ dan $x = y$.
(iii) Voor alle x, y en z in X geldt: als $x \preccurlyeq y$ en $y \preccurlyeq z$ dan $x \preccurlyeq z$.

Deze eigenschappen brengen de eigenschappen van $\leqslant$ op $\mathbb{R}$ en $\subseteq$ op families verzamelingen onder één noemer. Beide relaties voldoen aan de drie eigenschappen.

De ordening $\leqslant$ heeft nog een eigenschap die $\subseteq$ niet heeft:

6.24. Definitie. Een *lineaire ordening* is een partiële ordening met de volgende extra eigenschap:
Als $x, y \in X$ dan geldt $x \preccurlyeq y$ of $y \preccurlyeq x$.

Het beste dat we kunnen krijgen is een lineaire ordening als op $\mathbb{N}$.

6.25. Definitie. Een *welordening* is een partiële ordening ten opzichte van welke elke niet-lege deelverzameling een kleinste element heeft. (Een welgeordende verzameling is dus automatisch lineair geordend.)

6.26. Voorbeelden.
1. Elke familie verzamelingen is door $\subseteq$ partieel geordend.
2. De verzameling $\mathbb{R}$ is door $\leqslant$ lineair geordend.
3. De verzameling $\mathbb{N}$ is door $\leqslant$ welgeordend.
4. Definieer $\preccurlyeq$ op $\mathbb{R}^2$ door $(x,y) \preccurlyeq (u,v)$ dan en slechts dan als $x \leqslant u$ en $y \geqslant v$; dan is $\preccurlyeq$ een partiële ordening die niet lineair is.
5. Definieer $\preccurlyeq$ op $\mathbb{R}^2$ door $(x,y) \preccurlyeq (u,v)$ dan en slechts dan als $x < u$, of $x = u$ en $y \leqslant v$; dan is $\preccurlyeq$ een lineaire ordening op $\mathbb{R}^2$. Dit is de *lexicografische ordening*.
6. De verzameling $\mathbb{N}^2$ is door de lexicografische ordening welgeordend.

We krijgen de volgende uitspraken.

6.27. De Welordeningsstelling. Elke verzameling kan welgeordend worden.

6.28. Het Lemma van Zorn. Als X een partieel geordende verzameling is waarin elke lineair geordende deelverzameling een bovengrens heeft dan heeft X een *maximaal element*, dat wil zeggen een element x zó dat er géén $y \neq x$ is met $x \preccurlyeq y$.

Net als het Keuzeaxioma zijn de Welordeningsstelling en het Lemma van Zorn niet constructief; er wordt niet gezegd hoe de welordening te maken of hoe het maximale element te vinden. Er wordt alleen gezegd dat ze er zijn.

Over de woorden 'stelling' en 'lemma': deze worden gebruikt omdat de beweringen uit het Keuzeaxioma afgeleid zijn. Men heeft bewezen (met gebruik van alleen de andere axioma's van de verzamelingenleer) dat het Keuzeaxioma, de Welordeningsstelling en het Lemma van Zorn equivalent zijn. Als de geschiedenis anders was gelopen hadden we nu misschien het Welordeningsaxioma en de Keuzestelling gehad.

We noemen nog een paar gevolgen van het Keuzeaxioma:

(i) Elke vectorruimte heeft een basis.
(ii) In een ring met 1 is elk ideaal bevat in een maximaal ideaal.
(iii) De stelling van Hahn-Banach: als V een vectorruimte is, C een convexe deelverzameling van V en W een deelruimte van V met $W \cap C = \varnothing$ dan bestaat een deelruimte U van V van codimensie 1 zó dat $W \subseteq U$ en $U \cap C = \varnothing$ (codimensie 1 betekent dat er een vector x in $V \setminus U$ is zó dat V opgespannen wordt door $U \cup \{x\}$).

Wij hebben de volgende stelling nodig:

6.29. Stelling (Ultrafilterstelling). *Zij X een verzameling en $\mathcal{F}$ een filter op X. Dan is er een ultrafilter $\mathcal{G}$ dat fijner is dan $\mathcal{F}$.*

Bewijs. We passen het Lemma van Zorn toe. Beschouw hiertoe de familie

$$\mathfrak{F} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ is een filter dat fijner is dan } \mathcal{F}\}.$$

De familie $\mathfrak{F}$ is partieel geordend door $\subseteq$. Neem eens aan dat $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ niet leeg is en lineair geordend door $\subseteq$ en stel $\mathcal{G} = \bigcup \mathfrak{F}'$.

Duidelijk geldt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ voor elke $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$; we beweren dat $\mathcal{G}$ een filter is.

(i) $\varnothing \notin \mathcal{G}$ omdat $\varnothing \notin \mathcal{H}$ voor elke $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$.

(ii) Als $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ kies dan $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ in $\mathfrak{F}'$ met $G_1 \in \mathcal{H}_1$ en $G_2 \in \mathcal{H}_2$. Nu geldt $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$ of $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1$, bijvoorbeeld de eerste mogelijkheid. Dan $G_1, G_2 \in \mathcal{H}_2$ en dus ook $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{H}_2$. Maar dan ook $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$.

(iii) Als $G \in \mathcal{G}$ en $G \subseteq H$ kies dan $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$ met $G \in \mathcal{H}$; dan geldt $H \in \mathcal{H}$ en dus $H \in \mathcal{G}$.

We zien dat $\mathcal{G}$ een filter is. Dus $\mathcal{G}$ is een bovengrens voor $\mathfrak{F}'$.

De partieel geordende verzameling $\mathfrak{F}$ voldoet aan de voorwaarden van het Lemma van Zorn, er is dus een maximaal element, noem dit $\mathcal{G}$. Dan is $\mathcal{G}$ een filter, $\mathcal{G}$ is fijner dan $\mathcal{F}$ en elk ander filter dat fijner is dan $\mathcal{G}$ behoort tot $\mathfrak{F}$ en is dus gelijk aan $\mathcal{G}$.

Conclusie: $\mathcal{G}$ is een ultrafilter dat fijner is dan $\mathcal{F}$. □

We kunnen nu het omgekeerde van Stelling 6.18 bewijzen.

6.30. Stelling. *Als in een topologische ruimte elk ultrafilter convergeert dan is de ruimte compact.*

Bewijs. Het bewijs is nu niet moeilijk meer. Volgens de Ultrafilterstelling is er voor elke filter een fijner ultrafilter en volgens de aanname convergeert dit ultrafilter. Pas nu Stelling 6.11 toe. □

We kunnen nu eindelijk de Stelling van Tychonoff bewijzen.

6.31. Stelling (Stelling van Tychonoff). *Een product van topologische ruimten is compact dan en slechts dan als elke factor compact is.*

Bewijs. Dat elke factor compact is als het product dat is volgt uit het feit dat de projecties continu zijn.

Neem nu aan dat elke factor X_t van het product $X = \prod_{t\in T} X_t$ compact is. Zij $\mathcal{F}$ een ultrafilter op X. Voor elke t is het beeldfilter $\pi_t(\mathcal{F})$ een ultrafilter (Opgave 6.17) en dus convergent, zeg naar een punt x_t.

Volgens Stelling 6.14 convergeert $\mathcal{F}$ naar het punt $(x_t)_{t\in T}$. □

We zullen nog een bewijs van de Stelling van Tychonoff geven; hierbij gaan we wat omslachtiger te werk maar we leren er wel iets nieuws van. Het bewijs maakt ook gebruik van ultrafilters.

We definiëren eerst netjes wat een open strook is.

6.32. Definitie. Een *open strook* in een product $\prod_{t\in T} X_t$ van topologische ruimten is een open blok dat maar van één coördinaat afhangt; dus een open blok van de vorm $\pi_t^{-1}[U]$ met U open in X.

Bewijs van de Stelling van Tychonoff, 2. Neem eens aan dat $\mathcal{U}$ een familie eindige open blokken is in $X = \prod_{t\in T} X_t$ zó dat geen eindige deelfamilie van $\mathcal{U}$ een overdekking is. Maak een filter $\mathcal{F}$ als in Voorbeeld 6.6, dus een basis voor $\mathcal{F}$ is de familie $\{X \setminus \bigcup \mathcal{U}' : \mathcal{U}'$ is een eindige deelfamilie van $\mathcal{U}\}$.

Neem vervolgens een ultrafilter $\mathcal{G}$ dat fijner is dan $\mathcal{F}$. Bekijk nu een $U \in \mathcal{U}$; U is de doorsnede van eindig veel open stroken: $U = \bigcap_{i=1}^n \pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}]$. Nu is $\mathcal{G}$ een ultrafilter en $X \setminus U \in \mathcal{G}$, er is dus een t_i zó dat $X \setminus \pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}] \in \mathcal{G}$.

Conclusie: bij elke $U \in \mathcal{U}$ is een strook U^+ te vinden zó dat $U \subseteq U^+$ en $X \setminus U^+ \in \mathcal{G}$.

We maken zo'n simultane keuze van stroken (Keuzeaxioma) en we bekijken de familie $\mathcal{U}^+ = \{U^+ : U \in \mathcal{U}\}$.

Omdat $U \subseteq U^+$ voor elke U geldt $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{U}^+$.

Voor elke eindige deelfamilie $\mathcal{V}$ van $\mathcal{U}^+$ geldt $X \setminus \bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{G}$, dus geen eindige deelfamilie van $\mathcal{U}^+$ is een overdekking.

Neem nu $t \in T$ vast en bekijk de deelfamilie $\mathcal{U}_t$ van $\mathcal{U}^+$ die bestaat uit stroken van de vorm $\pi_t^{-1}[O]$ met O open in X_t. Stel $\mathcal{V}_t = \{O : \pi_t^{-1}[O] \in \mathcal{U}_t\}$. Omdat geen eindige deelfamilie van $\mathcal{U}_t$

het product X overdekt kan geen eindige deelfamilie van $\mathcal{V}_t$ de ruimte X_t overdekken en omdat X_t compact is is $\mathcal{V}_t$ geen overdekking van X_t.

Kies nu (simultaan) $x_t \in X_t \setminus \bigcup \mathcal{V}_t$ voor elke t. Het punt $x = (x_t)_{t\in T}$ wordt niet door $\mathcal{U}^+$ overdekt en dus ook niet door $\mathcal{U}$. □

Dit bewijs is in feite een bewijs van een andere stelling. Om die te formuleren moeten we nog een definitie geven.

6.33. Definitie. Een *subbasis* voor een topologie $\mathcal{T}$ is een deelfamilie $\mathcal{S}$ van $\mathcal{T}$ zó dat de familie doorsneden van eindig veel elementen van $\mathcal{S}$ een basis is voor $\mathcal{T}$.

Merk op dat $\varnothing$ eindig is en een deelfamilie van elke familie; als $\mathcal{S}$ een subbasis is dan behoort $\bigcap \varnothing$ dus ook tot de bijbehorende basis. Maar

$$\bigcap \varnothing = \bigl\{x \in X : \forall S \in \varnothing\, [x \in S]\bigr\} = X,$$

dus: ongeacht of $\mathcal{S}$ de ruimte overdekt, de familie eindige doorsneden is altijd een overdekking.

6.34. Voorbeelden.

1. De familie van alle open stroken is een subbasis voor de producttopologie.
2. De familie van alle intervallen van de vorm $(-\infty, b)$ en (a, ∞) is een subbasis voor de gewone topologie van $\mathbb{R}$.

Een subbasis wordt meestal gebruikt om uit een familie verzamelingen waarvan men zeker wilt dat die open worden een topologie te maken. Hiertoe neemt men eerst alle eindige doorsneden van elementen van die familie en gebruikt de zo verkregen familie als basis voor de gewenste topologie. In feite is dit de manier geweest waarop we de producttopologie gemaakt hebben: de open stroken moesten open worden om de projecties continu te maken.

De stelling waar net op gezinspeeld werd is het Subbasislemma van Alexander.

6.35. Stelling (Subbasislemma van Alexander). *Zij X een topologische ruimte en $\mathcal{S}$ een subbasis voor de topologie. Dan geldt: X is compact dan en slechts dan als elke overdekking van X met elementen van $\mathcal{S}$ een eindige deeloverdekking heeft.*

Bewijs. Het bewijs loopt parallel aan het tweede bewijs van de Stelling van Tychonoff: noem de familie van doorsneden van eindige deelfamilies van $\mathcal{S}$ even $\mathcal{B}$. Dan is $\mathcal{B}$ een basis. Stel $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ is een overdekking zonder eindige deeloverdekking en maak een filter $\mathcal{F}$ als tevoren. Neem weer een ultrafilter $\mathcal{G}$ dat fijner is dan $\mathcal{F}$ en kies, met behulp van $\mathcal{G}$, voor elke $U \in \mathcal{U}$ een $S_U \in \mathcal{S}$ zó dat $U \subseteq S_U$ en $X \setminus S_U \in \mathcal{G}$.

Dan is $\{S_U : U \in \mathcal{U}\}$ een overdekking van X met elementen van $\mathcal{S}$ zonder eindige deeloverdekking. □

Met behulp van deze stelling bewijzen we heel makkelijk dat een gesloten en begrensd interval in $\mathbb{R}$ compact is.

Laat $[a, b]$ zo'n interval zijn en neem een overdekking met subbasis elementen:

$$\mathcal{U} = \bigl\{[a, x_\lambda) : \lambda \in \Lambda\bigr\} \cup \bigl\{(y_\mu, b] : \mu \in M\bigr\}.$$

Zij $x = \sup_\lambda x_\lambda$ en kies μ zó dat $x \in (y_\mu, b]$ (waarom is er zo'n μ?). Kies vervolgens een λ zó dat $x_\lambda > y_\mu$; dan is $\bigl\{[a, x_\lambda), (y_\mu, b]\bigr\}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{U}$.

V

BOOLE ALGEBRA'S

Boole Algebra's zijn ontstaan uit het werk van George Boole [1854]. Boole wilde rekenregels opstellen die zowel op het menselijk redeneren als op kansrekening(!) toepasbaar waren. De geschiedenis heeft hem gelijk gegeven: in [1921] toonde Post aan dat met behulp van Boole's rekenregels alle ware beweringen (en alleen die) af te leiden waren en in [1936] bewees M. H. Stone† dat de rekenregels ook het werken met verzamelingen exact beschrijven. We zullen ons hier tot de verzameling-theoretische aspecten van Boole algebra's beperken; de logische kant komt beter in een cursus Propositielogica tot zijn recht.

We beginnen met af te spreken wat Boole algebra's eigenlijk zijn en waar men ze tegen kan komen. In het tweede hoofdstuk van dit deel bespreken we de Representatiestelling van Stone.

7. ALGEBRA'S EN RINGEN

We beginnen meteen met de definitie van Boole algebra's te geven. Men kan Boole algebra's op diverse (equivalente) manieren definiëren; we kiezen de definitie die het makkelijkst het verband met operaties op verzamelingen blootlegt. Daarna bespreken we kort andere benaderingen.

Definitie van Boole algebra's

Om met de deur in huis te vallen: een *Boole algebra* bestaat uit een verzameling B, twee binaire operaties $\wedge$ en $\vee$, een unaire operatie $'$ en twee vaste elementen $\mathbf{0}$ en $\mathbf{1}$ van B. Deze voldoen aan de volgende regels (x, y en z stellen elementen van B voor):

(i) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ en $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; (associativiteit)
(ii) $x \wedge y = y \wedge x$ en $x \vee y = y \vee x$; (commutativiteit)
(iii) $x \wedge (x \vee y) = x$ en $x \vee (x \wedge y) = x$ (absorptie)
(iv) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ en $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$; en (distributiviteit)
(v) $x \wedge x' = \mathbf{0}$ en $x \vee x' = \mathbf{1}$. (complementering)

Als we elementen van B als 'beweringen' opvatten dan ligt de interpretatie van de symbolen voor de hand: $\wedge$ is 'en', $\vee$ is 'of', x' is het tegengestelde van x, $\mathbf{0}$ is 'onwaar' en $\mathbf{1}$ is 'waar'.

Net als bij topologische ruimten gaan we een beetje slordig met de notatie om. Formeel moeten we eigenlijk het geordende zestal $(B, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ een Boole algebra noemen; we spreken normaal gewoon over de Boole algebra B en gaan er van uit dat de andere componenten meegegeven zijn.

Uit de Voortgezette Analyse kennen we het begrip *ring van verzamelingen*: een familie $\mathcal{R}$ van deelverzamelingen van een vaste verzameling X die voldoet aan

$$\text{als } A, B \in \mathcal{R} \text{ dan ook } A \cup B \in \mathcal{R} \text{ en } A \setminus B \in \mathcal{R}.$$

Het is eenvoudig na te gaan dat ook $A \cap B \in \mathcal{R}$ als $A, B \in \mathcal{R}$ (probeer het nog eens). Als ook nog $X \in \mathcal{R}$ dan is $\mathcal{R}$ (of beter $(\mathcal{R}, \cap, \cup, ', \varnothing, X)$) een Boole algebra, waarbij $A' = X \setminus A$.

Elke ring van verzamelingen kan uitgebreid worden tot een Boole algebra.

† De Stone van de Stelling van Stone-Weierstraß

7.1. Opgave. Zij $\mathcal{R}$ een ring van verzamelingen op een verzameling X; toon aan dat $\mathcal{R} \cup \{X \setminus A : A \in \mathcal{R}\}$ een Boole algebra is.

7.2. Voorbeeld. Met behulp van Opgave 7.1 krijgen we een paar Boole algebra's kado. Zij X een verzameling en definieer $F_X = \{A \subseteq X : A \text{ is eindig}\}$ en $A_X = \{A \subseteq X : A \text{ is aftelbaar}\}$. Dan zijn F_X en A_X ringen van verzamelingen op X (ga na); hun bijbehorende Boole algebra's heten respectievelijk de eindig-co-eindige en de aftelbaar-co-aftelbare algebra's van X.

7.3. Voorbeeld. Zij V een inwendig-productruimte en zij $\mathcal{B}$ de familie van alle gesloten lineaire deelruimten. We maken van $\mathcal{B}$ een Boole algebra door af te spreken

(i) $X \wedge Y = X \cap Y$;
(ii) $X \vee Y = X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$;
(iii) $X' = X^{\perp} = \bigl\{y : (\forall x \in X)(y \perp x)\bigr\}$; en
(iv) $\mathbf{0} = \{o\}$ en $\mathbf{1} = X$.

Ga zorgvuldig na dat dit inderdaad een Boole algebra oplevert.

We bespreken nog een belangrijk voorbeeld; het komt regelrecht uit de topologie.

7.4. Definitie. Een deelverzameling van een topologische ruimte heet *regulier open* als zij het inwendige van haar afsluiting is; dus U is regulier open als $U = \operatorname{int}\operatorname{cl} U$.

7.5. Opgave. De eenheidsschijf $O = \bigl\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\bigr\}$ is regulier open in $\mathbb{R}^2$; haar deelverzameling $\bigl\{(x,y) : x \neq 0\bigr\}$ is het niet.

7.6. Opgave. Zij A een deelverzameling van een topologische ruimte. Toon aan:

a) $\operatorname{int}\operatorname{cl}\operatorname{int}\operatorname{cl} A = \operatorname{int}\operatorname{cl} A$;
b) $\operatorname{int}\operatorname{cl} A$ is regulier open; en
c) als A gesloten is dan is $\operatorname{int} A$ regulier open.

We noteren de familie van alle regulier open verzamelingen van X met $\operatorname{ro}(X)$.

7.7. Opgave. Bewijs dat $\operatorname{ro}(X)$ een Boole algebra wordt als we afspreken: $U \wedge V = U \cap V$, $U \vee V = \operatorname{int}\operatorname{cl}(U \cup V)$, $U' = X \setminus \operatorname{cl} U$, $\mathbf{0} = \varnothing$ en $\mathbf{1} = X$.

We noemen $\operatorname{ro}(X)$ de *regulier open algebra van* X.

Boole ringen

Uit de Algebra kennen we het begrip *ring*; een ring is een verzameling R met daarop twee bewerkingen gedefinieerd: optellen en vermenigvuldigen. De som van x en y noteren we $x + y$ en het product als xy. We eisen dat $(R, +)$ een Abelse (commutatieve) groep is, dus:

(i) $x + (y + z) = (x + y) + z$, voor alle $x, y, z \in R$;
(ii) $x + y = y + x$, voor alle $x, y \in R$;
(iii) er is een vast element 0 van R met $0 + x = x$, voor elke $x \in R$; en
(iv) voor elke $x \in R$ is er een $y \in R$ met $x + y = 0$, deze y noteren we als $-x$.

Van de vermenigvuldiging eisen we á priori niet meer dan dat deze associatief is en zich netjes gedraagt ten opzichte van de optelling:

(v) $x(yz) = (xy)z$, voor alle $x, y, z \in R$; en
(vi) $x(y + z) = xy + xz$ en $(y + z)x = yx + zx$, voor alle $x, y, z \in R$.

We eisen dus bijvoorbeeld niet dat de vermenigvuldiging commutatief is of dat er een 1 moet bestaan.

7.8. Definitie. Een *Boole ring* is een ring waarin elk element gelijk is aan zijn eigen kwadraat: er geldt $x^2 = x$ voor elke x in de ring.

Een Boole ring is automatisch commutatief en heeft een eenvoudige optelling.

7.9. Opgave. Laat zien dat in een Boole ring de volgende twee rekenregels gelden: $x + x = 0$ voor elke x en $xy = yx$ voor alle x en y.

7.10. Opgave. Toon aan dat een ring van verzamelingen een Boole ring is als we symmetrisch verschil nemen als optelling gebruiken en doorsnede nemen als vermenigvuldiging:

$$A \oplus B = A \triangle B \text{ en } A \odot B = A \cap B.$$

Het bewijs van de stelling van Stone laat zien dat we hiermee, in essentie, *alle* Boole ringen hebben beschreven: elke Boole ring is isomorf met een ring van verzamelingen, waarbij respectievelijk $+$ met symmetrisch verschil en $\cdot$ met doorsnede corresponderen.

De Boole algebra's zijn precies de Boole ringen met 1.

7.11. Opgave. Zij B een Boole ring met 1. Bewijs dat B een Boole algebra is met $x \wedge y = xy$, $x \vee y = x + y + xy$, $x' = 1 + x$, $\mathbf{0} = 0$ en $\mathbf{1} = 1$. *Aanwijzing*: Zie ook de volgende paragraaf.

7.12. Opgave. Zij B een Boole algebra. Bewijs dat door $xy = x \wedge y$ en $x + y = (x \wedge y') \vee (y \wedge x')$ te definiëren B een Boole ring met 1 wordt.

Partiële ordeningen

Boole algebra's (en ringen) kunnen ook volledig in termen van partiële ordeningen, zie Definitie 6.23, beschreven worden. Hiertoe moeten we een aantal begrippen bekijken die we in het kader van $\mathbb{R}$ al kennen.

7.13. Definitie. Zij $(P, \preccurlyeq)$ een partieel geordende verzameling. Een deelverzameling A van P heet *naar boven begrensd* als er een $p \in P$ is zó dat $a \preccurlyeq p$ voor alle $a \in A$. Het element p heet dan een *bovengrens* voor A. Als er een *kleinste* bovengrens voor A bestaat dan noemen we die het *supremum* van A en noteren hem als $\bigvee A$.

Op dezelfde manier spreken we af wat naar beneden begrensd, ondergrens en infimum betekenen, we noteren het infimum van A met $\bigwedge A$.

7.14. Opgave. Toon aan: A heeft een maximum dan en slechts dan als $\bigvee A \in A$.

7.15. Opgave. Definieer een partiële ordening op $\mathbb{R}^2$ door $(x, y) \preccurlyeq (u, v)$ dan en slechts dan als $x \leqslant u$ en $y \leqslant v$. Bepaal supremum en infimum van $\bigl\{(x, 1 - x) : 0 < x < 1\bigr\}$.

7.16. Definitie. Zij $(P, \preccurlyeq)$ een partieel geordende verzameling. Als $x, y \in P$ en als $\bigvee\{x, y\}$ bestaat dan noteren we dit als $x \vee y$ en $\bigwedge\{x, y\}$ noteren we als $x \wedge y$ (als dit bestaat). We noemen $(P, \preccurlyeq)$ een *tralie** als $x \wedge y$ en $x \vee y$ voor alle $x, y \in P$ bestaan.

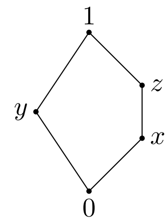
7.17. Opgave. Zij $(P, \preccurlyeq)$ een tralie. Toon aan:

a) $x \wedge y = y \wedge x$ en $x \vee y = y \vee x$;
b) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ en $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
c) $x \vee (y \wedge z) \preccurlyeq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$; en
d) $x \wedge (y \vee z) \succcurlyeq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

---

* In het Engels: *lattice*.

7.18. Opgave. Beschouw de partiële ordening gegeven in het volgende plaatje:



a) Bepaal $x \wedge (y \vee z)$ en $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
b) Bepaal $x \vee (y \wedge z)$ en $(x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

De notaties $x \wedge y$ en $x \vee y$ zijn niet toevallig gekozen; op een Boole algebra bestaat namelijk een natuurlijke partiële ordening waarin $x \wedge y = \bigwedge\{x, y\}$ en $x \vee y = \bigvee\{x, y\}$. Die ordening kunnen we zelfs op een willekeurige Boole ring definiëren; we krijgen dan $xy = \bigwedge\{x, y\}$ en $x + y + xy = \bigvee\{x, y\}$.

7.19. Stelling. *Zij R een Boole ring. Definieer $x \preccurlyeq y$ door $x = xy$. Dan is $\preccurlyeq$ een partiële ordening en $(R, \preccurlyeq)$ is een tralie met 0 als minimum.*

Bewijs. We lopen de drie eisen voor partiële ordeningen langs:
(i) $x \preccurlyeq x$ wegens $x = x^2$;
(ii) uit $x \preccurlyeq y$ en $y \preccurlyeq x$ volgt $x = xy = yx = y$; en
(iii) als $x \preccurlyeq y$ en $y \preccurlyeq z$ dan geldt $x = xy$ en $y = yz$ en dus $x = xy = x(yz) = (xy)z = xz$.

Het is duidelijk dan $0 = \min R$, want $0 = 0x$ voor alle x.

Rest nog te bewijzen dat R een tralie is. Met behulp van de volgende opgave volgt dat $x \wedge y = xy$ en $x \vee y = x + y + xy$. □

7.20. Opgave. Zij R een Boole ring. Toon aan:
a) $xy \preccurlyeq x, y$;
b) als $z \preccurlyeq x, y$ dan ook $z \preccurlyeq xy$;
c) $x, y \preccurlyeq x + y + xy$; en
d) als $x, y \preccurlyeq z$ dan ook $x + y + xy \preccurlyeq z$.

De distributieve wetten voor Boole algebra's gelden ook in Boole ringen; blijkbaar komt een situatie als in Opgave 7.18 niet voor in Boole ringen.

7.21. Opgave. Zij R een Boole ring. Toon aan:
a) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
b) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

In een Boole algebra betekent $x \preccurlyeq y$ dus dat $x = x \wedge y$; we kunnen $\preccurlyeq$ ook met behulp van $\vee$ karakteriseren.

7.22. Opgave. Toon aan dat in een Boole algebra geldt: $x = x \wedge y$ dan en slechts dan als $x \vee y = y$. We zien dat $x \preccurlyeq y$ dan en slechts dan als $x \vee y = y$.

Hoewel we in een Boole ring zonder 1 niet over x' kunnen spreken zijn *relatieve* complementen wel mogelijk.

7.23. Opgave. Zij R een Boole ring en definieer $x \setminus y = x + xy$. Toon aan:
a) $y \wedge (x \setminus y) = 0$ en $(x \wedge y) \vee (x \setminus y) = x$;
b) $x + y = (x \setminus y) \vee (y \setminus x)$;
c) $x \setminus (y \vee z) = (x \setminus y) \wedge (x \setminus z)$ en $x \setminus (y \wedge z) = (x \setminus y) \vee (x \setminus z)$ (De Morgan).

In een Boole ring is een 1 voor de vermenigvuldiging niets anders dan een maximum ten opzichte van $\preccurlyeq$ (ga maar na). Een Boole algebra is dus een Boole ring met een maximum.

Rekenregels

In de vorige paragrafen zijn al wat rekenregels voor Boole algebra's gebruikt; in Opgave 7.12 moest bijvoorbeeld bewezen worden dat $x \wedge x = x$. We verzamelen hier een aantal van de belangrijkste rekenregels (sommige moesten hiervoor al bewezen worden en staan hier alleen voor de volledigheid).

7.24. Opgave. Toon aan: $x \wedge x = x$ en $x \vee x = x$.

Hoewel het door de definitie gesuggereerd wordt moeten we nagaan dat x' het enige complement van x is.

7.25. Opgave. Als $x \wedge z = \mathbf{0}$ en $x \vee z = \mathbf{1}$ dan geldt $z = x'$. *Aanwijzing*: $z = z \wedge (x \vee x')$, gebruik distributiviteit om af te leiden dat $z = z \wedge x'$ (dus $z \preccurlyeq x'$); laat ook zien dat $z = z \vee x'$.

7.26. Opgave. Toon aan:
a) $(x')' = x$;
b) als $x' = y'$ dan $x = y$; en
c) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ en $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

7.27. Opgave. Toon aan:
a) $x \preccurlyeq y$ dan en slechts dan als $x' \succcurlyeq y'$ dan en slechts dan als $x \wedge y' = 0$; en
b) $z \wedge x \preccurlyeq y$ dan en slechts dan als $x \preccurlyeq z' \vee y$.

8. DE REPRESENTATIESTELLING VAN STONE

We gaan nu laten zien elke Boole ring met een ring van verzamelingen correspondeert en elke Boole algebra met een algebra van verzamelingen. Om in te zien wat we eigenlijk zoeken geven we nog een topologisch voorbeeld van een Boole algebra:

8.1. Voorbeeld. Zij X een topologische ruimte. De familie van alle verzamelingen die tegelijk open en gesloten zijn (de *clopen* verzamelingen) vormen een Boole algebra. We noteren deze algebra als $\mathrm{co}(X)$.

De deelfamilie $\mathrm{cco}(X)$ van $\mathrm{co}(X)$ die uit alle *compacte* clopen verzamelingen bestaat is een ring van verzamelingen. Merk op dat X compact is dan en slechts dan als $\mathrm{co}(X) = \mathrm{cco}(X)$.

De stelling van M. H. Stone zegt nu dat elke Boole ring van de vorm $\mathrm{cco}(X)$ is en elke Boole algebra van de vorm $\mathrm{co}(X)$. Verder zegt de stelling dat we voor X een redelijk mooie ruimte kunnen nemen.

8.2. Stelling. *Zij B een Boole algebra. Dan bestaat een compacte Hausdorff ruimte X zó dat B isomorf is met $\mathrm{co}(X)$ en ook zó dat $\mathrm{co}(X)$ een basis voor de topologie van X is.* □

Voor Boole ringen luidt de stelling bijna eender, alleen zal de ruimte X niet noodzakelijk compact zijn maar (slechts) *lokaal compact*. Dit laatste betekent dat de familie van alle open verzamelingen met compacte afsluitingen een basis voor de topologie vormen.

8.3. Voorbeelden.
1. Elke compacte ruimte is lokaal compact.
2. $\mathbb{R}$ is lokaal compact (maar niet compact).
3. ℓ_2 is niet lokaal compact.

8.4. Stelling. *Zij B een Boole ring. Dan bestaat een lokaal compacte Hausdorff ruimte X zó dat B isomorf is met $\mathrm{cco}(X)$ en ook zó dat $\mathrm{cco}(X)$ een basis voor de topologie van X is.* □

In beide gevallen noemen we X de *Stone ruimte* van B; we noteren deze als $\mathfrak{S}(B)$. Merk op dat niet elke (lokaal) compacte ruime een Stone ruimte kan zijn: de familie van alle (compacte) clopen verzamelingen moet een basis voor de topologie zijn; samenhangende ruimten als $\mathbb{R}$ en $[0,1]$ vallen dus meteen af. We noemen een ruimte *nuldimensionaal* als de familie $\mathrm{co}(X)$ een basis voor de topologie is.

8.5. Voorbeelden. We kennen al een paar nuldimensionale ruimten.

1. Een discrete ruimte is nuldimensionaal.
2. $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{P}$ zijn nuldimensionaal; immers, als $p,q \in \mathbb{P}$ dan is $(p,q) \cap \mathbb{Q}$ clopen in $\mathbb{Q}$, evenzo voor $\mathbb{P}$.
3. Het convergente rijtje $\{0\} \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ is nuldimensionaal.
4. De Cantorverzameling is nuldimensionaal.
5. De Sorgenfreylijn is nuldimensionaal.
6. De ruimte uit Voorbeeld 2.19 is nuldimensionaal.

De volgende stelling completeert de Representatiestelling van Stone.

8.6. Stelling. *Elke lokaal compacte nuldimensionale Hausdorff ruimte treedt op als Stone ruimte. Preciezer: als X lokaal compact nuldimensionaal en Hausdorff is dan is X homeomorf met de Stone ruimte van* $\mathrm{cco}(X)$. $\square$

In het bewijs van de stelling zullen we zien dat er een heel natuurlijk homeomorfisme bestaat tussen X en $\mathfrak{S}\bigl(\mathrm{cco}(X)\bigr)$.

De rest van dit hoofdstuk zal gewijd zijn aan het bewijs van Stellingen 8.2, 8.4 en 8.6. Het grootste probleem zal zijn de *punten* van de Stone ruimte te maken; zodra we die hebben is het definiëren van de topologie niet moeilijk meer.

Idealen en filters

De punten en open verzamelingen van de Stone ruimte van een Boole ring maken we uit deelverzamelingen die bekend staan als idealen en filters.

Laat R een ring zijn. Een *ideaal* in R is een niet-lege deelverzameling I die voldoet aan:

(i) I is een ondergroep van R (dus $0 \in I$ en als $x, y \in I$ dan ook $-x \in I$ en $x + y \in I$); en
(ii) als $y \in I$ en $x \in R$ dan $xy \in I$.

Een ideaal is dus wat meer dan alleen een deelring.

In een Boole ring kunnen we idealen geheel in termen van de partiële orde beschrijven.

8.7. Opgave. Zij B een Boole ring. Toon aan: een deelverzameling I is een ideaal dan en slechts dan als 1) als $y \in I$ en $x \preccurlyeq y$ dan $x \in I$, en 2) als $x, y \in I$ dan $x \vee y$ in I.

Door $\preccurlyeq$ om te draaien en $\vee$ te vervangen door $\wedge$ krijgen we bijna de definitie van een filter op een Boole ring. Een *filter* op een Boole ring B is een niet-lege deelverzameling F die voldoet aan 1) als $y \in F$ en $x \succcurlyeq y$ dan $x \in F$, 2) als $x, y \in F$ dan $x \wedge y$ in F en 3) $0 \notin F$.

8.8. Opgave. Ga na dat een filter op een verzameling X niets anders is dan een filter op de Boole algebra 2^X.

Net als gewone filters kunnen we filters in Boole ringen ordenen door inclusie. Maximale filters noemen we ook weer ultrafilters. Het bewijs van Stelling 6.29 kunnen we vrijwel letterlijk kopiëren om te concluderen dat elk filter op een Boole ring bevat is in een ultrafilter. We zullen ultrafilters altijd met kleine letters aangeven: u, v, w. De reden is dat de ultrafilters in een Boole ring B de punten van de Stone ruimte $\mathfrak{S}(B)$ zijn.

We kunnen ultrafilters op Boole ringen en algebra's op dezelfde manier als in Stelling 6.16 karakteriseren.

8.9. Opgave. Zij F een filter op een Boole ring B; dan zijn de volgende uitspraken equivalent.

(i) F is een ultrafilter;
(ii) voor elk element a van B geldt: als $a \wedge b \neq \mathbf{0}$ voor alle $b \in F$ dan $a \in F$;
(iii) voor elk tweetal elementen a en b van B geldt: als $a \vee b \in F$ dan $a \in F$ of $b \in F$;
(iv) *als B een Boole algebra is*: voor elk element a van B geldt: $a \in F$ of $a' \in F$.

Het bewijs van de stelling

We gaan nu de Representatiestelling van Stone bewijzen. We nemen een vaste Boole ring B.

8.10. Definitie. De Stone ruimte $\mathfrak{S}(B)$ van B heeft de familie van alle ultrafilters op B als onderliggende verzameling.

Om een topologie op $\mathfrak{S}(B)$ te definiëren geven we een basis aan. Hiertoe definieren we voor $a \in B$:

$$\bar{a} = \{u \in \mathfrak{S}(B) : a \in u\}.$$

We leiden een paar eigenschappen van de afbeelding $a \mapsto \bar{a}$ af.

8.11. Lemma. *Er geldt*

(i) $a \neq \mathbf{0}$ *dan en slechts dan als* $\bar{a} \neq \varnothing$;
(ii) $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \cap \bar{b}$;
(iii) $\overline{a \vee b} = \bar{a} \cup \bar{b}$; *en*
(iv) $\overline{a \setminus b} = \bar{a} \setminus \bar{b}$.

Bewijs. (i): pas de ultrafilterstelling toe op het filter $\{x : a \preccurlyeq x\}$ om in te zien dat $\bar{a} \neq \varnothing$ als $a \neq \mathbf{0}$; het omgekeerde volgt uit het feit dat $\mathbf{0}$ nooit in een filter zit.

(ii): $u \in \overline{a \wedge b}$ betekent $a \wedge b \in u$ en $u \in \bar{a} \cap \bar{b}$ betekent $a, b \in u$; ga nu na dat $a \wedge b \in u$ dan en slechts dan als $a, b \in u$ (u is een filter).

(iii): nu moet bewezen worden: $a \vee b \in u$ dan en slechts dan als $a \in u$ of $b \in u$. Van rechts naar links volgt omdat u een filter is; het omgekeerde gebruikt dat u een *ultra*filter is, zie het bewijs van Stelling 6.16.

(iv): probeer dit zelf. □

8.12. Lemma. *Als B een Boole algebra is dan geldt* $\bar{\mathbf{1}} = \mathfrak{S}(B)$ *en* $\overline{a'} = \mathfrak{S}(B) \setminus \bar{a}$.

Bewijs. Dit is makkelijk: $\mathbf{1}$ zit in elk filter en $a' = 1 \setminus a$. □

Nu kunnen we met behulp van B een topologie op B definiëren.

8.13. Lemma. *De familie* $\mathcal{B} = \{\bar{a} : a \in B\}$ *is een basis voor een topologie op* $\mathfrak{S}(B)$.

Bewijs. Uit Lemma 8.11 volgt meteen dat $\mathcal{B}$ gesloten is onder het nemen van doorsneden. Rest nog te bewijzen dat $\mathfrak{S}(B) = \bigcup \mathcal{B}$; maar dit volgt meteen uit het feit dat een filter een niet-lege verzameling is. □

Van nu af aan denken we ons $\mathfrak{S}(B)$ altijd voorzien van de topologie die door $\{\bar{a} : a \in B\}$ gegenereerd wordt. Lemma 8.11 zegt eigenlijk niets anders dan dat de afbeelding $a \mapsto \bar{a}$ een isomorfisme tussen B en $\mathcal{B}$ is.

8.14. Lemma. *De ruimte* $\mathfrak{S}(B)$ *is Hausdorff.*

Bewijs. Laat u en v verschillende ultrafilters op B zijn. Dan is er zowel een $a \in u \setminus v$ als een $b \in v \setminus u$ — u en v zijn *ultra*filters, dus $u \nsubseteq v$ en $v \nsubseteq u$. Nu volgt $u \in \overline{a \setminus b}$, $v \in \overline{b \setminus a}$ en $\overline{a \setminus b} \cap \overline{b \setminus a} = \varnothing$. □

De volgende stelling maakt het bewijs van Stellingen 8.2 en 8.4 af.

8.15. Stelling. *Een deelverzameling A van $\mathfrak{S}(B)$ is compact en open dan en slechts dan als ze van de vorm $\bar{a}$ is.*

Bewijs. Stel A is compact en open en zij $I_A = \{a \in B : \bar{a} \subseteq A\}$. Dan is I_A een ideaal in B en omdat $\mathcal{B}$ een basis is geldt $A = \bigcup\{\bar{a} : a \in I_A\}$. Omdat A compact is zijn er eindig veel elementen $a_1, \ldots, a_n$ van I_A zó dat $A = \bar{a}_1 \cup \cdots \cup \bar{a}_n$. Pas nu Lemma 8.11 toe: $\bar{a}_1 \cup \cdots \cup \bar{a}_n = \overline{a_1 \vee \cdots \vee a_n}$ en dus $A = \bar{a}$, waar $a = a_1 \vee \cdots \vee a_n$.

Omgekeerd moeten we nog bewijzen dat elke verzameling $\bar{a}$ compact is. Neem een familie $\{\bar{b} : b \in C\}$ van basis-open verzamelingen waarvan geen eindige deelfamilie de verzameling $\bar{a}$ overdekt. We gaan bewijzen dat de gehele familie $\bar{a}$ ook niet overdekt. Hiervoor kunnen we de redenering uit Voorbeeld 6.6 aanpassen om in te zien dat de familie $\{a \setminus b : b \in C\}$ een filter bepaalt. Als $b_1, \ldots, b_n$ in C dan volgt $\bigwedge_{i=1}^n a \setminus b_i = a \setminus \bigvee_{i=1}^n b_i \neq \mathbf{0}$ omdat $\bar{a} \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{b}_i \neq \varnothing$. Het filter is dan

$$F = \left\{x : (\exists b_1, \ldots, b_n \in C)\left(\bigwedge_{i=1}^n a \setminus b_i \preccurlyeq x\right)\right\}.$$

Kies nu een ultrafilter u dat F uitbreidt; dan volgt $u \in \bar{a} \setminus \bigcup\{\bar{b} : b \in C\}$. □

Tot slot bewijzen we Stelling 8.6.

8.16. Stelling. *Zij X een lokaal compacte Hausdorff ruimte. Dan is elk ultrafilter op $\operatorname{cco}(X)$ van de vorm $u_x = \{C : x \in C\}$ voor een $x \in X$. De afbeelding $x \mapsto u_x$ is dan een homeomorfisme tussen X en $\mathfrak{S}\big(\operatorname{cco}(X)\big)$.*

Bewijs. Zij u een ultrafilter en kies $C \in u$ vast. Dan is $\{C \cap D : D \in u\}$ een familie gesloten verzamelingen met de eindige-doorsnede eigenschap in de compacte ruimte C. De doorsnede hiervan, F_u, is dus niet leeg. Omdat u een ultrafilter is, en X nuldimensionaal, bestaat F_u uit één punt x_u: als $x \in F_u$ en $y \neq x$ kies dan $A \in \operatorname{cco}(X)$ met $x \in A$ en $y \notin A$; dan volgt dat $A \cap B \neq \varnothing$ voor alle $B \in u$ en dus $A \in u$, maar dan $y \notin F_u$. We zien dat $u = u_{x_u}$.

Omgekeerd is elke familie u_x is zeker een filter op $\operatorname{cco}(X)$. Als $D \notin u_x$ dan is er, omdat D gesloten is en $\operatorname{cco}(X)$ een basis voor X, een $C \in u_x$ met $C \cap D = \varnothing$; hieruit volgt dat u_x een ultrafilter is. Merk op dat $x = x_{u_x}$.

Uit de vorige twee alinea's volgt nu dat $i : x \mapsto u_x$ een bijectie tussen X en $\operatorname{cco}(X)$ is. Uit de definitie volgt meteen dat $x \in C$ dan en slechts dan als $C \in u_x$. We zien dat $i[C] = \bar{C}$ en $i^{-1}[\bar{C}] = C$, waaruit volgt dat i en i^{-1} continu zijn. □

VI

DUALITEIT EN VOORBEELDEN

De Representatiestelling van Stone wordt ook wel de *Stone-Dualiteit* genoemd; we zullen zien wat zo'n dualiteit inhoudt en wat we er mee kunnen doen. Verder zullen we van een paar Boole algebra's de bijbehorende Stone ruimten uitrekenen.

9. STONE-DUALITEIT

We hebben gezien dat de toevoegingen $B \mapsto \mathfrak{S}(B)$ en $X \mapsto \mathrm{co}(X)$ elkaars inversen zijn: voor elke B geldt $B \approx \mathrm{co}\bigl(\mathfrak{S}(B)\bigr)$ en voor elke X geldt $X \approx \mathfrak{S}\bigl(\mathrm{co}(X)\bigr)$ — $\approx$ betekent respectievelijk 'is isomorf met' of 'is homeomorf met'. Bij de overgang van ruimte naar algebra en omgekeerd worden nog meer dingen getransformeerd, zoals in het volgende tabelletje.

Ruimten		Algebras
open verzameling	$\longleftrightarrow$	ideaal
gesloten verzameling	$\longleftrightarrow$	filter
continue afbeelding	$\longleftrightarrow$	homomorfisme
injectie	$\longleftrightarrow$	surjectie
surjectie	$\longleftrightarrow$	injectie

In wat volgt stellen X en Y altijd compacte nuldimensionale Hausdorff ruimten voor en B en D altijd Boole algebra's.

9.1. Opgave. Als O open is dan is $\mathrm{co}(O) = \{C \in \mathrm{co}(X) : C \subseteq O\}$ een ideaal en, omgekeerd, als I een ideaal is dan is $\mathfrak{S}(I) = \bigcup\{\bar{c} : c \in I\}$ een open verzameling. Verder geldt $\mathrm{co}\bigl(\mathfrak{S}(I)\bigr) = I$ en $\mathfrak{S}\bigl(\mathrm{co}(O)\bigr) = O$.

9.2. Opgave. Als H gesloten is dan is $\mathrm{co}(H) = \{C \in \mathrm{co}(X) : H \subseteq C\}$ een filter en, omgekeerd, als F een filter is dan is $\mathfrak{S}(F) = \bigcap\{\bar{c} : c \in F\}$ een gesloten verzameling. Verder geldt $\mathrm{co}\bigl(\mathfrak{S}(F)\bigr) = F$ en $\mathfrak{S}\bigl(\mathrm{co}(H)\bigr) = H$.

De derde regel is iets moeilijker, hoewel het makkelijk is een homomorfisme uit een continue afbeelding te maken. De definite van een homomorfisme ligt voor de hand.

9.3. Definitie. Een afbeelding $\varphi : B \to D$ tussen Boole algebra's is een *homomorfisme* als het voldoet aan: $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$ $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$, $\varphi(x') = \varphi(x)'$, $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ en $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Een *isomorfisme* is een homomorfisme dat bijectief is.

9.4. Opgave. Toon aan dat een homomorfisme $\varphi : B \to D$ een isomorfisme is dan en slechts dan als er een homomorfisme $\psi : D \to B$ met $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_D$ en $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_B$.

9.5. Opgave. Als $f : X \to Y$ een continue afbeelding is dan definieert $O \mapsto f^{-1}[O]$ een homomorfisme van $\mathrm{co}(Y)$ naar $\mathrm{co}(X)$.

We noteren het zo gecreëerde homomorfisme als $\mathrm{co}(f)$. Met wat meer moeite kunnen we uit een homomorfisme een continue afbeelding maken.

9.6. Stelling. *Bij elk homomorfisme $\varphi : B \to D$ bestaat een continue afbeelding $f : \mathfrak{S}(D) \to \mathfrak{S}(B)$ zó dat $\varphi = \operatorname{co}(f)$.*

9.7. Opgave. Bewijs Stelling 9.6.

a) Toon aan dat $\varphi^{-1}[u]$ een ultrafilter is als u het is.
b) De afbeelding $f : \mathfrak{S}(D) \to \mathfrak{S}(B)$, gedefinieerd door $f(u) = \varphi^{-1}[u]$, is continu. *Aanwijzing*: Ga na dat $f^{-1}[\bar{a}] = \overline{\varphi(a)}$.
c) Ga na dat $\operatorname{co}(f) = \varphi$.

De overige twee regels kunnen redelijk recht voor z'n raap vastgesteld worden.

9.8. Opgave. Als F en G disjuncte gesloten verzamelingen in X zijn dan is er een clopen verzameling C met $F \subseteq C$ en $G \cap C = \varnothing$.

9.9. Opgave. Neem aan $f : X \to Y$ is injectief.

a) Als $C \in \operatorname{co}(X)$ dan is $f[C]$ clopen in $f[X]$ en $f[C] \cap f[X \setminus C] = \varnothing$.
b) Er is een clopen verzameling C_1 in Y met $C_1 \cap f[X] = f[C]$ en $f[X] \setminus C_1 = f[X \setminus C]$.
c) $\operatorname{co}(f)(C_1) = C$ (dus $\operatorname{co}(f)$ is surjectief).

9.10. Opgave. Neem aan $f : X \to Y$ is niet injectief en kies $x \neq y$ met $f(x) = f(y)$.

a) Er is een clopen verzameling C zó dat $x \in C$ en $y \notin C$.
b) Er is geen clopen verzameling C_1 in Y met $f^{-1}[C_1] = C$ (dus $\operatorname{co}(f)$ is niet surjectief).

9.11. Opgave. Een homomorfisme $\varphi : B \to D$ is injectief dan en slechts dan als alleen $\mathbf{0}$ aan $\varphi(x) = \mathbf{0}$ voldoet.

9.12. Opgave. Als $f : X \to Y$ is surjectief is dan $f^{-1}[C] \neq \varnothing$ als $C \neq \varnothing$ (dus $\operatorname{co}(f)$ is injectief).

9.13. Opgave. Als $f : X \to Y$ niet surjectief is dan is er een niet-lege $C \in \operatorname{co}(Y)$ met $C \cap f[X] = \varnothing$; dan geldt $f^{-1}[C] = \varnothing$ (dus $\operatorname{co}(f)$ is niet injectief).

Een homomorfisme tussen Boole algebra's is ook een ringhomomorfisme; de *kern*van zo'n homomorfisme is een ideaal. Zij $\varphi : B \to D$ een surjectief homomorfisme; de eerste isomorfiestelling voor ringen zegt dat D isomorf is met de quotiëntring $B/\ker(\varphi)$. Wegens Stelling 4.10 zijn, als $f : X \to Y$ injectief is, X en $f[X]$ homeomorf. De kern van het homomorfisme $\operatorname{co}(f)$ is het ideaal $I_X = \{C : C \cap f[X] = \varnothing\}$. We zien dat $\operatorname{co}(X)$ isomorf is met het quotiënt $\operatorname{co}(Y)/I_X$.

10. VOORBEELDEN

We zullen nu wat expliciete voorbeelden uitrekenen.

10.1. Opgave. De Stone ruimte van de eindig co-eindige algebra B op $\mathbb{N}$ is homeomorf met het convergente rijtje $\{0\} \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.

a) Als u een ultrafilter op B is met een eindig element dan is er een n zó dat $u = u_n = \{A : n \in A\}$.
b) Als u geen eindig element bevat dan geldt $u = u_\infty = \{A : \mathbb{N} \setminus A \text{ is eindig}\}$.
c) $u_n \mapsto 2^{-n}$ en $u_\infty \mapsto 0$ definieert een homeomorfisme tussen $\mathfrak{S}(B)$ en het convergente rijtje.

De spelden in $\mathbb{R}$

We bepalen de Stone-ruimte van de Boole ring $\mathcal{P}^1$ voortgebracht door de spelden in $\mathbb{R}$.

Bij elk reëel getal x horen twee ultrafilters x^- en x^+:

$$x^- = \bigl\{P : (\exists a < x)\bigl((a,x] \subseteq P\bigr)\bigr\},$$
$$x^+ = \bigl\{P : (\exists b > x)\bigl((x,b] \subseteq P\bigr)\bigr\}.$$

Er zijn verder geen ultrafilters op $\mathcal{P}^1$.

10.2. Opgave. Toon aan dat x^- en x^+ inderdaad ultrafilters op $\mathcal{P}^1$ zijn.

10.3. Opgave. Zij u een ultrafilter op $\mathcal{P}^1$.
a) u bevat een speld $(a,b]$.
b) Zij $x = \sup\{c : (c,b] \in u\}$ en $y = \inf\{c : (a,c] \in u\}$; dan geldt $x = y$.
c) $(a,x] \in u$ of $(x,b] \in u$.
d) Als $(a,x] \in u$ dan $u = x^-$; als $(x,b] \in u$ dan $u = x^+$.

De onderliggende verzameling van $\mathfrak{S}(\mathcal{P}^1)$ bestaat dus uit twee kopiën van $\mathbb{R}$: de verzamelingen $\mathbb{R}^- = \{x^- : x \in \mathbb{R}\}$ en $\mathbb{R}^+ = \{x^+ : x \in \mathbb{R}\}$. Deze kopiën liggen niet los van elkaar maar zijn door elkaar heen gevlochten.

10.4. Opgave. Voor elke speld $(a,b]$ geldt $\overline{(a,b]} = \{x^-, x^+ : a \leqslant x \leqslant b\}$.

Beide kopieën van $\mathbb{R}$ liggen dus dicht in $\mathfrak{S}(\mathcal{P}^1)$. De ruimte $\mathfrak{S}(\mathcal{P}^1)$ ziet er eigenlijk als volgt uit: elk punt x van $\mathbb{R}$ is gesplitst in twee punten x^- en x^+ met $x^- < x^+$ en verder ook zó dat $x^+ < y^-$ als $x < y$.

10.5. Opgave. De deelruimten $\mathbb{R}^-$ en $\mathbb{R}^+$ van $\mathfrak{S}(\mathcal{P}^1)$ zijn beide homeomorf met de Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$.

De ring $\mathcal{P}^1$ hoort bij twee natuurlijke Boole algebra's: de algebra B_1 die in Opgave 7.1 gemaakt is en de algebra B_2 gegenereerd door de familie $\bigl\{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\bigr\}$.

10.6. Opgave. Wat is het verschil tussen B_1 en B_2?

10.7. Opgave. De Stone ruimte van B_1 is $\mathfrak{S}(\mathcal{P}^1)$ met één extra punt ∞: het ultrafilter $\{\mathbb{R} \setminus P : P \in \mathcal{P}^1\}$.

10.8. Opgave. De Stone ruimte van B_2 is $\mathfrak{S}(\mathcal{P}^1)$ met twee extra punten: de ultrafilters $u_{-\infty}$, met basis $\bigl\{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\bigr\}$, en u_∞, met basis $\bigl\{(c, \infty) : c \in \mathbb{R}\bigr\}$.

De Maatalgebra

Een interessante algebra is de maatalgebra. Deze ontstaat als volgt. We beginnen met de σ-algebra $\mathcal{B}$ van Borel-verzamelingen van $[0,1]$. Verder bekijken we het ideaal $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{B} : m(N) = 0\}$ van verzamelingen van de maat nul. De *maatalgebra* $\mathbb{M}$ is de quotient-algebra $\mathcal{B}/\mathcal{N}$. De Stone-ruimten van $\mathcal{B}$ en $\mathbb{M}$ zijn niet homeomorf met bekende ruimten, het zijn totaal nieuwe ruimten. De interessantste van de twee is die van de maatalgebra.

Rekenen in de maatalgebra is rekenen met Borel-verzamelingen 'modulo verzamelingen van de maat nul'; elementen van $\mathcal{B}$ stellen hetzelfde element van $\mathbb{M}$ voor als hun symmetrisch verschil van de maat nul is.

10.9. Opgave. Zij A een familie Borel-verzamelingen van positieve maat en zó dat $m(a \cap b) = 0$ als $a, b \in A$ verschillend zijn.

a) Zij $n \in \mathbb{N}$, de familie $A_n = \{a \in A : m(a) > 2^{-n}\}$ is eindig. *Aanwijzing*: A_n heeft ten hoogste 2^n elementen.

b) A is aftelbaar.

10.10. Opgave. Elke paarsgewijs disjuncte familie open verzamelingen in $\mathfrak{S}(\mathbb{M})$ is aftelbaar.

We noemen een ruimte *separabel*als deze een aftelbare dichte deelverzameling heeft. In een separabele ruimte is elke paarsgewijs disjuncte familie open verzamelingen aftelbaar (waarom?); het omgekeerde geldt niet.

10.11. Opgave. Zij u een ultrafilter op $\mathbb{M}$; voor elke n is er een i zó dat $[i2^{-n}, (i+1)2^{-n}] \in u$.

10.12. Opgave. Zij $\langle u_n \rangle_n$ een rij ultrafilters op $\mathbb{M}$. Er is een element a van M met $m(a) < \frac{1}{2}$ zó dat $a \in u_n$ voor alle n. *Aanwijzing*: Kies $a_n \in u_n$ met $m(a_n) < 2^{-n-2}$ en zet $a = \bigcup_n a_n$.

10.13. Opgave. De ruimte $\mathfrak{S}(\mathbb{M})$ is niet separabel.

VII

TOEPASSINGEN

11. DE CANTORVERZAMELING IS UNIEK

In [1910] bewees L. E. J. Brouwer dat er maar één Cantorverzameling is, hiermee bedoelen we dat de Cantorverzameling door een klein lijstje eigenschappen volledig gekarakteriseerd is.

11.1. Stelling. *Zij X een compacte nuldimensionale metriseerbare ruimte zonder geïsoleerde punten; dan is X homeomorf met de Cantorverzameling C.*

De rest van dit hoofdstuk is aan het bewijs van deze stelling gewijd. Het bewijs gaat via de Boole algebra $\mathrm{co}(C)$; we zullen de eigenschappen uit de stelling vertalen naar $\mathrm{co}(C)$ en vervolgens bewijzen dat $\mathrm{co}(C)$ door deze (vertaalde) eigenschappen volledig gekarakteriseerd is. We nemen een ruimte compacte nuldimensionale metriseerbare ruimte X zonder geïsoleerde punten en laten zien dat $\mathrm{co}(X)$ isomorf is met $\mathrm{co}(C)$.

De eigenschappen compact en nuldimensionaal zorgen er voor dat we echt een vertaling naar de Boole algebra's mogen maken. We moeten nu nog 'metriseerbaar' en 'zonder geïsoleerde punten' vertalen. We beginnen met het laatste.

11.2. Definitie. Een element a van een Boole algebra heet een *atoom* als $a > \mathbf{0}$ en als er geen b is met $a > b > \mathbf{0}$.

11.3. Opgave. Een element a is een atoom dan en slechts dan als $u_a = \{x : x \geqslant a\}$ een ultrafilter is.

Merk op dat in dit geval $\bar{a} = \{u_a\}$; als a een atoom is dan is u_a een geïsoleerd punt. Het omgekeerde is ook waar.

11.4. Opgave. Als x een geïsoleerd punt is dan is $\{x\}$ een atoom in $\mathrm{co}(X)$.

We hebben 'X heeft geen geïsoleerde punten' dus vertaald in '$\mathrm{co}(X)$ heeft geen atomen'. Het metriseerbaar zijn van X lijkt wat lastiger omdat een metriek het toch van de punten en minder van de clopen verzamelingen moet hebben. Toch is er een eenvoudige vertaling.

11.5. Stelling. *De ruimte X is metriseerbaar dan en slechts dan als* $\mathrm{co}(X)$ *aftelbaar is.*

Voor het bewijs hebben we een hulpstelling nodig.

11.6. Stelling. *Elke compacte metriseerbare ruimte heeft een aftelbare basis.*

Bewijs. Zij M zo'n ruimte en zij d een metriek op M. Omdat (M, d) totaal begrensd is bestaat voor elke n een eindige verzameling F_n met $M = \bigcup_{x \in F_n} B(x; 2^{-n})$. De familie $\mathcal{B} = \{B(x; 2^{-n}) : x \in F_n, n \in \mathbb{N}\}$ is aftelbaar en een basis voor M. Zij namelijk $p \in M$ en neem $\varepsilon > 0$. Kies n zo groot dat $3 \cdot 2^{-n} < \varepsilon$ en vervolgens een $x \in F_n$ zó dat $p \in B(x; 2^{-n})$. Uit de driehoeksongelijkheid volgt verder $B(x; 2^{-n}) \subseteq B(p; \varepsilon)$. Hieruit dat elke open verzameling te schrijven is als vereniging van elementen van $\mathcal{B}$. □

Bewijs van Stelling 11.5. Neem aan dat X metriseerbaar is. Om te bewijzen dat X slechts aftelbaar veel clopen verzamelingen heeft nemen we een aftelbare basis $\mathcal{B}$ voor X en merken op dat elke clopen verzameling C te schrijven is als vereniging van *eindig* veel elementen van $\mathcal{B}$. Omdat $\mathcal{B}$ maar aftelbaar veel eindige deelfamilies heeft volgt nu dat $\mathrm{co}(X)$ aftelbaar is.

Omgekeerd, neem aan dat $\mathrm{co}(X)$ aftelbaar is en laat $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ een aftelling zijn. Voor elke n is de karakteristieke functie χ_n van C_n continu. De diagonaalafbeelding $\chi = \triangle_{n\in\mathbb{N}} \chi_n$ van X naar $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ is dus ook continu. Als $x \neq y$ is er een n met $x \in C_n$ en $y \notin C_n$ (en dus $\chi_n(x) \neq \chi_n(y)$); de afbeelding χ is dus ook injectief. Omdat X compact is volgt uit Stelling 4.10 dat X en $\chi[X]$ homeomorf zijn; X is dus metriseerbaar. □

Bij een compacte nuldimensonale metriseerbare ruimte zonder geïsoleerde punten hoort dus een aftelbare Boole algebra zonder atomen.

Het bewijs van de stelling

We gaan bewijzen dat twee aftelbare Boole algebra's zonder atomen isomorf zijn. Hiertoe nemen we twee zulke algebra's B en D en tellen ze af: $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$. We nemen aan dat $b_0 = \mathbf{0}$, $d_0 = \mathbf{0}$, $b_1 = \mathbf{1}$ en $d_1 = \mathbf{1}$.

We construeren een isomorfisme $\varphi : B \to D$ met behulp van recursie: we bouwen een stijgende rij isomorfismen $\langle \varphi_n \rangle_n$ tussen eindige deelalgebra's B_n van B en D_n van D zó dat $\{b_i : i \leqslant n\} \subseteq B_n$ en $\{d_i : i \leqslant n\} \subseteq D_n$.

Het begin is makkelijk: neem $B_0 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ en $D_0 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ en zet $\varphi_0(b_0) = d_0$ en $\varphi_0(b_1) = d_1$.

Bij de stap van n naar $n+1$ moeten we alleen iets doen als $b_{n+1} \notin B_n$ of als $d_{n+1} \notin D_n$ (anders zetten we gewoon $\varphi_{n+1} = \varphi_n$, $B_{n+1} = B_n$ en $D_{n+1} = D_n$).

Als $b_{n+1} \notin B_n$ dan bekijken we de kleinste Boole algebra B_n^+ waar B_n en b_{n+1} in zitten; we zoeken dan een element d_{n+1}^+ van D zó dat we door middel van $b_{n+1} \mapsto d_{n+1}^+$ ons isomorfisme φ_n uit kunnen breiden tot een isomorfisme φ_n^+ van B_n^+ naar D_n^+ (de kleinste algebra waar D_n en d_{n+1} in zitten). Als $d_{n+1} \in D_n^+$ dan hebben we B_{n+1}, D_{n+1} en φ_{n+1} gevonden; anders doen we het bovenstaande nog een keer en vinden een $b_{n+1}^+ \in B$ zó dat $b_{n+1} \mapsto d_{n+1}$ een verdere uitbreiding van ons isomorfisme geeft.

We hebben het volgende resultaat nodig.

11.7. Opgave. Als B een eindige Boole algebra is elke $a \in B$ het supremum van een stel atomen.

a) Als u een ultrafilter op B is dan is $\bigwedge u$ een atoom. *Aanwijzing*: $a = \bigwedge u$ behoort tot u en als $\mathbf{0} < b < a$ dan behoren b en $a \setminus b$ niet tot u.
b) Zij $a \in B$ en A de verzameling atomen die onder a zitten, dan $a = \bigvee A$. *Aanwijzing*: Zo niet neem dan een ultrafilter u waar $a \setminus \bigvee A$ in zit.

We gaan verder met de constructie. Zij A_n de verzameling van alle atomen van B_n; omdat φ_n een isomorfisme is is $\varphi_n[A_n]$ de verzameling van alle atomen van D_n. We verdelen A_n in drie groepen: $A_n^0 = \{a : a \wedge b_{n+1} = \mathbf{0}\}$, $A_n^1 = \{a : a \leqslant b_{n+1}\}$ en A_n^2, de rest.

11.8. Opgave. Zij $A_n^+ = A_n^0 \cup A_n^1 \cup \{a \wedge b_{n+1}, a \wedge b_{n+1}' : a \in A_n^2\}$. Dan is A_n^+ de atomenverzameling van B_n^+ en $B_n^+ = \{\bigvee A : A \subseteq A_n^+\}$. *Aanwijzing*: Zeker $A_n^+ \subseteq B_n^+$; verder is $\{\bigvee A : A \subseteq A_n^+\}$ een Boole algebra waar B_n en b_{n+1} in zitten.

We maken φ_n^+ door voor ieder element van A_n^+ aan te geven wat zijn beeld is; voor $b \in B_n'$ zetten we dan $\varphi_n^+(b) = \bigvee \{\varphi_n^+(a) : a \leqslant b\}$. Als $a \in A_n^0 \cup A_n^1$ dan moeten we $\varphi_n^+(a) = \varphi_n(a)$ nemen. Voor elke $a \in A_n^2$ kiezen we een $d_a \in D$ met $\mathbf{0} < d_a < \varphi_n(a)$ (nu gebruiken we pas dat D geen atomen heeft) en zetten we $\varphi_n^+(a \cap b_{n+1}) = d_a$ en $\varphi_n^+(a \cap b_{n+1}') = \varphi_n(a) \setminus d_a$. Merk op dat $d_{n+1}^+ = \bigvee_{a \in A_n^1} \varphi_n(a) \vee \bigvee_{a \in A_n^2} d_a$.

11.9. Opgave. De afbeelding φ_n^+ is als gewenst.

a) Voor $b \in B_n$ geldt $\varphi_n^+(b) = \varphi_n(b)$.
b) $D_n^+ = \varphi_n^+[B_n^+]$ is de kleinste Boole algebra waar D_n en d_{n+1} in zitten.
c) φ_n^+ is een isomorfisme tussen B_n^+ en D_n^+.

Nu kunnen we een isomorfisme $\varphi : B \to D$ definiëren door $\varphi(b_n) = \varphi_n(b_n)$.

11.10. Opgave. De afbeelding φ is een isomorfisme.

a) Voor elke b en elke m geldt: als $b \in B_m$ dan $\varphi(b) = \varphi_m(b)$.
b) Als $a, b \in B$ dan $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$, $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ en $\varphi(a') = \varphi(a)'$. *Aanwijzing*: Kies n zó dat $a, b \in B_n$.
c) Als $b > \mathbf{0}$ dan $\varphi(b) > \mathbf{0}$; dus φ is injectief.
d) Omdat $d_n \in D_n$ is φ ook surjectief.

Het bewijs van de stelling van Brouwer is nu af: er is een isomorfisme φ tussen $\mathrm{co}(X)$ en $\mathrm{co}(C)$; de afbeelding $\mathfrak{S}(\varphi) : C \to X$ is dan een homeomorfisme.

Met behulp van de stelling van Brouwer kunnen we inzien dat veel ruimten die er verschillend uit zien toch homeomorf zijn.

11.11. Opgave. Het topologische product $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ is homeomorf met C. Een expliciet homeomorfisme is gegeven door $\langle x_i \rangle_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{2x_i}{3^{i+1}}$.

11.12. Opgave. De producten C^2, C^3, …, $C^{\mathbb{N}}$ zijn allemaal homeomorf met C. Probeer expliciete homeomorfismen aan te geven.

11.13. Voorbeeld. Veel Juliaverzamelingen zijn homeomorf met de Cantorverzameling. Als f een rationale complexe functie is dan is Fatouverzameling van f de verzameling van die z die een omgeving hebben waarop de iteraties van f zich netjes gedragen (de familie is *normaal*). De Juliaverzameling J_f is het complement van de Fatouverzameling. De Juliaverzameling is compact en heeft geen geïsoleerde punten; ze is of samenhangend of nuldimensionaal en in het laatste geval dus homeomorf met de Cantorverzameling. Dit verklaart waarom sommige schrijvers over 'Cantor Dust' spreken.

12. VOLLEDIGE BOOLE ALGEBRA'S

Een Boole algebra heet *volledig* als het supremum van elke deelverzameling bestaat.

12.1. Opgave. Een Boole algebra is volledig dan en slechts dan als het infimum van elke deelverzameling bestaat. *Aanwijzing*: $\bigwedge A = \bigl(\bigvee\{a' : a \in A\}\bigr)'$.

Voorbeelden

12.2. Voorbeeld. De algebra 2^X is volledig.

12.3. Voorbeeld. De $\mathrm{ro}(X)$ van een (willekeurige) topologische ruimte is volledig: voor elke deelverzameling A geldt $\bigvee A = \operatorname{int}\operatorname{cl}\bigcup A$.

12.4. Voorbeeld. De σ-algebra $\mathcal{B}$ van alle Borel-verzamelingen in $[0,1]$ is niet volledig: neem een verzameling X die niet Borel is en bekijk $A = \bigl\{\{x\} : x \in X\bigr\}$; wat zou $\bigvee A$ moeten zijn.

12.5. Voorbeeld. De maatalgebra $\mathbb{M}$ is wel volledig. Zij $A \subseteq \mathbb{M}$ en kies voor elke $a \in A$ een Borel-verzameling B_a die a representeert. We zoeken een Borel-verzameling B die $b = \bigvee A$ kan representeren. Omdat we modulo $\mathcal{N}$ rekenen betekent dit dat B aan de volgende eisen moet voldoen:

(i) voor alle $a \in A$ geldt $m(B_a \setminus B) = 0$; en
(ii) als D zó is dat $m(B_a \setminus D) = 0$ voor alle $a \in A$ dan ook $m(B \setminus D) = 0$.

De eerste regel is een vertaling van 'b is een bovengrens voor A' en de tweede regel zegt dat b de kleinste bovengrens is.

We vinden B als vereniging van een aftelbare deelfamilie van $\{B_a : a \in A\}$. Hiertoe bekijken we de verzameling van alle getallen van de vorm $m(B_F)$, waarbij F een eindige deelverzameling van A voorstelt en $B_F = \bigcup_{a\in F} B_a$. Al die getallen zijn niet groter dan 1, we nemen hun supremum s. We kiezen een stijgende rij $\langle F_n \rangle_n$ eindige deelverzamelingen van A met de eigenschap dat $m(B_{F_n}) > s - 2^{-n}$ voor elke n en we nemen $B = \bigcup_n B_{F_n}$. Merk op dat $m(B) = s$.

Zij $a \in A$; voor elke n geldt $m(B_a \cup B_{F_n}) \leqslant s$ en dus $m(B_a \setminus B) \leqslant 2^{-n}$, we zien dat $m(B_a \setminus B) = 0$.

Zij D een Borel-verzameling met de eigenschap dat $m(B_a \setminus D) = 0$ voor alle a. Dan geldt $m(B_F \setminus D) \leqslant \sum_{a\in F} m(B_a \setminus D) = 0$ voor elke F en daarmee ook $m(B \setminus D) = \lim_n m(B_{F_n} \setminus D) = 0$.

Extreem onsamenhangende ruimten

We zullen nu de ruimten onderzoeken die bij volledige Boole algebra's horen. Deze zijn door de volgende topologische eigenschap gekarakteriseerd.

12.6. Definitie. We noemen een topologische ruimte *extreem onsamenhangend* als de afsluiting van elke open verzameling weer open is (en dus ook clopen).

12.7. Opgave. Een ruimte is extreem onsamenhangend als elk tweetal disjuncte open verzamelingen disjuncte afsluitingen hebben.

Er zijn ruimten die zowel samenhangend als extreem onsamenhangend zijn, denk aan de indiscrete en aan de co-eindige topologie, maar dit zijn meer uitwassen van de definitie. Extreem onsamenhangende Hausdorff ruimten zijn onsamenhangend, zelfs *totaal onsamenhangend*; dit laatste betekent dat elk tweetal punten disjuncte *clopen* omgevingen heeft.

12.8. Stelling. *Een Boole algebra is volledig dan en slechts dan als zijn Stone ruimte extreem onsamenhangend is.*

12.9. Opgave. Zij B een volledige Boole algebra. Zij U open in $\mathfrak{S}(B)$ en zet $b = \bigvee\{a : \bar{a} \subseteq U\}$.
a) $U \subseteq \bar{b}$;
b) $\bar{b} \subseteq \operatorname{cl} U$;
c) $\operatorname{cl} U$ is open.

12.10. Opgave. Zij B een Boole algebra met extreem onsamenhangende Stone ruimte $\mathfrak{S}(B)$. Zij $A \subseteq B$ en kies b zó dat $\bar{b} = \operatorname{cl} \bigcup\{\bar{a} : a \in A\}$. Dan geldt $b = \bigvee A$.

Extreem onsamenhangende Hausdorff ruimten hebben veel merkwaardige eigenschappen. We zullen er een van behandelen: geen enkel punt is de limiet van een niet-triviale convergente rij. Een convergente rij is *niet-triviaal* als de punten in de rij allemaal verschillend zijn.

12.11. Lemma. *Zij X een Hausdorff ruimte en $\langle x_n \rangle_n$ een (niet-triviale) convergente rij in X met limiet x; dan kunnen we voor elke n een omgeving U_n van x_n kiezen zó dat $U_n \cap U_m = \varnothing$ als $n \neq m$.*

Bewijs. Merk eerst op dat de verzameling $\{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ compact is. We kiezen de U_n met behulp van recursie. Pas het bewijs van Stelling 4.7 toe om disjuncte open verzamelingen U_0 en V_0 te vinden met $x_0 \in U_0$ en $\{x\} \cup \{x_m : m > 0\} \subseteq V_0$. Vervolgens kiezen we U_1 en V_1 binnen V_0 met $x_1 \in U_1$ en $\{x\} \cup \{x_m : m > 1\} \subseteq V_1$. Op stap n kiezen we U_n en V_n binnen V_{n-1} met $x_n \in U_n$ en $\{x\} \cup \{x_m : m > n\} \subseteq V_n$. Aan het eind is de rij $\langle U_n \rangle_n$ als gewenst. □

De volgende stelling laat zien waarom zich in een extreem onsamenhangende Hausdorff ruimte geen convergente rijen bevinden.

12.12. Stelling. *Zij X een Hausdorff ruimte en x de limiet van een niet-triviale convergente rij. Dan zijn er twee disjuncte open verzamelingen U en V met $x \in \operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V$.*

Bewijs. Neem, in de notatie van het voorgaande Lemma, $U = \bigcup_n U_{2n}$ en $V = \bigcup_n U_{2n+1}$. $\square$

12.13. Voorbeeld. In Voorbeeld 2.19 hebben we ruimte geconstrueerd met een deelverzameling A en een punt x in $\operatorname{cl} A$ zonder dat er een rij in A is die naar x convergeert.

In de Stone ruimte $\mathfrak{S}(\mathbb{M})$ van de maatalgebra is de situatie nog dramatischer: er zijn geen geisoleerde punten dus voor elk punt x geldt $x \in \operatorname{cl}\bigl(\mathfrak{S}(\mathbb{M}) \setminus \{x\}\bigr)$ zonder dat er een rij in $\mathfrak{S}(\mathbb{M}) \setminus \{x\}$ is die naar x convergeert.

Completeringen

Net als metrische ruimten kunnen Boole algebra's ook gecompleteerd worden.

12.14. Definitie. Zij B een Boole algebra. Een completering van B bestaat uit een volledige Boole algebra D en een inbedding $i : B \to D$ zó dat vor elke $d > \mathbf{0}$ een $b > \mathbf{0}$ bestaat met $i(b) \leqslant d$. We zeggen dat $i[B]$ dicht ligt in D.

Met behulp van de Representatiestelling van Stone kunnen we voor elke Boole algebra een completering construeren.

12.15. Stelling. *Elke Boole algebra heeft een completering; deze is uniek op isomorfie na.*

Bewijs. Zij B een Boole algebra, $X = \mathfrak{S}(B)$ en neem $D = \operatorname{ro}(X)$. De natuurlijke inclusieafbeelding van $\operatorname{co}(X)$ in $\operatorname{ro}(X)$ is een homomorfisme: bedenkt dat $C = \operatorname{cl} \int C$ als C clopen is. Als $U \in \operatorname{ro}(X)$ niet leeg is dan bestaat voor elke $x \in U$ een clopen C met $x \in C \subseteq U$; de clopen algebra is dus een dichte deelalgebra van $\operatorname{ro}(X)$.

Als E nog een andere completering is met inbedding $j : B \to E$ dan is $phi : D \to E$, gedefinieerd door $\varphi(d) = \bigvee\{j(b) : i(b) \leqslant d\}$, een isomorfisme. $\square$

We kunnen de Stone-Dualiteit op het completeringsproces toepassen; we krijgen dan een nieuwe topologische constructie.

12.16. Stelling. *Laat D de completering van B zijn en $i : B \to D$ de inbedding. De afbeelding $\mathfrak{S}(i) : \mathfrak{S}(D) \to \mathfrak{S}(B)$ heeft de volgende eigenschap: als F gesloten is en $\mathfrak{S}(i)[F] = \mathfrak{S}(B)$ dan geldt $F = \mathfrak{S}(D)$.*

Bewijs. We bewijzen het contrapositieve. Neem aan $F \neq \mathfrak{S}(D)$, dan is er een $d > \mathbf{0}$ zó dat $\bar{d} \cap F = \varnothing$. Kies een $b > \mathbf{0}$ met $i(b) \leqslant d$; dan $\bar{b} \cap \mathfrak{S}(i)[F] = \varnothing$ en dus $\mathfrak{S}(i)[F] \neq \mathfrak{S}(B)$. $\square$

We noemen een afbeelding als in de stelling *irreducibel*.

12.17. Opgave. Een afbeelding $f : X \to Y$ is irreducibel dan en slechts dan als voor elke niet lege open verzameling U van X het inwendige van $f[U]$ niet leeg is.

12.18. Opgave. Als $f : X \to Y$ een continue irreducibele surjectie is dan geldt X is separabel dan en slechts dan als Y het is. *Aanwijzing*: Als D dicht is in Y kies dan voor elke $d \in D$ een x_d met $f(x_d) = d$; dan is $\{x_d : d \in D\}$ dicht in X.

We hebben dus bij elke compacte nuldimensionale Hausdorff ruimte X een extreem onsamenhangende compacte ruimte $E(X)$ geconstrueerd en een irreducibele continue surjectie $\pi_X : E(X) \to X$. De ruimte $E(X)$ — of preciezer, het paar $\bigl(E(X), \pi_X\bigr)$ — wordt de *absoluut* van X genoemd. De absoluut kan voor elke compacte Hausdorff ruimte gedefinieerd worden. Dit werd voor het eerst door Gleason in [1958] gedaan.

12.19. Opgave. Zij X compact Hausdorff en $Y = \mathfrak{S}\bigl(\mathrm{ro}(X)\bigr)$. Definieer $\pi : Y \to X$ door $\bigl\{\pi(u)\bigr\} = \bigcap_{U \in u} \mathrm{cl}\, U$.

a) π is welgedefinieerd;

b) π is continu;

c) π is irreducibel.

12.20. Voorbeeld. De abslouut van de Cantorverzameling is een separabele ruimte zonder geisoleerde punten en zonder convergente rijen. Dus elke punt is verdichtingspunt van de aftelbare dichte deelverzameling zonder dat daaruit een rij te maken is die naar het punt convergeert.

Literatuur

Boole, G.
[1854] *An Investigation of the Laws of Thought (On which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probability)*. Macmillan. Het boek waarin Boole zijn gedachten over logica uiteenzette.

Brouwer, L. E. J.
[1910] On the structure of perfect sets of points. *Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, **12**, 785–794.

van Douwen, E. K.
[1972] A regular space on which every continuous real-valued function is constant. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **20**, 143–145.

Engelking, R.
[1989] *General Topology. Revised and completed edition.* Sigma Series in Pure Mathematics 6. Heldermann Verlag, Berlin.

Gleason, A. M.
[1958] Projective topological spaces. *Illinois Journal of Mathematics*, **2**, 482–489.

Hausdorff, F.
[1914] *Grundzüge der Mengenlehre*. Chelsea Publishing Company, New York. Een van de eerste systematische uiteenzettingen over metrische en topologische ruimten. Nog steeds de moeite waard. Dit is een herdruk, uit 1978, van de eerste uitgave die in 1914 in Leipzig verscheen.

Post, E.
[1921] Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of Mathematics*, **43**, 163–185.

Stone, M. H.
[1936] The theory of representations for Boolean algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, **40**, 37–111.

Index