wi4041

Metrizeerbaarheid

dr. K.P. Hart

Cursus 2000/2001

Inhoud

I

TOPOLOGISCHE RUIMTEN

We beginnen met de eigenschappen van metrische ruimten te inventariseren die eigenlijk alleen van de open verzamelingen afhangen; de *topologische eigenschappen*. Daarna definiëren we wat topologische ruimten zijn en bekijken we een paar voorbeelden.

1. TOPOLOGISCHE EIGENSCHAPPEN

Om te beginnen halen we op welke eigenschappen de familie der open verzamelingen van een metrische ruimten heeft. We herhalen nog even de definitie.

1.1. Definitie. Een deelverzameling U van een metrische ruimte X heet *open* als voor ieder punt p van U een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $B_\varepsilon(p) \subseteq U$.

De familie van alle open verzamelingen in X, *de topologie van* X, noteren we met $\mathcal{T}$. De volgende stelling is bij Voortgezette Analyse aan bod geweest.

1.2. Stelling. *De familie* $\mathcal{T}$ *voldoet aan de volgende drie eigenschappen.*

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,
(ii) *als* $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ *dan* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ *en*
(iii) *als* $\{U_i\}_i \subseteq \mathcal{T}$ *dan* $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$.

1.3. Opgave. Bewijs deze stelling.

We zullen nu een lijst maken van alle *topologische* eigenschappen en noties die we bij Voortgezette Analyse gezien hebben.

omgeving. Een *omgeving* van een punt p is een open verzameling die p bevat.

inwendig punt. Een punt p is een *inwendig punt* van een verzameling A als er een omgeving U van p is met $U \subseteq A$.

inwendige. Het *inwendige* van een verzameling A is de verzameling van al haar inwendige punten. Notatie $\operatorname{int} A$.

uitwendig punt. Een punt is een *uitwendig punt* van een verzameling A als het een inwendig punt van het complement van A is.

uitwendige. Het *uitwendige* van een verzameling is de verzameling van al haar uitwendige punten. Notatie $\operatorname{ext} A$

randpunt. Een punt is een *randpunt* als het noch een inwendig- noch een uitwendig punt van die verzameling is.

rand. De *rand* van een verzameling A is de verzameling van al haar randpunten. Notatie ∂A.

gesloten verzameling. Een verzameling is *gesloten* als ze het complement van een open verzameling is.

afsluiting. De *afsluiting* van een verzameling is de vereniging van die verzameling en haar rand. Notatie $\operatorname{cl} A$.

adherent punt. Een punt is een *adherent punt* van een verzameling als elke omgeving van dat punt de verzameling snijdt.

verdichtingspunt. Een punt p is een *verdichtingspunt* van een verzameling als elke omgeving van p punten van de verzameling bevat die ongelijk zijn aan p.

dichte deelverzameling. Een deelverzameling A van een ruimte X heet *dicht* als $\operatorname{cl} A = X$.

G_δ-verzameling. Een verzameling is een G_δ-verzameling als zij geschreven kan worden als doorsnede van een aftelbare collectie open verzamelingen.

F_σ-verzameling. Een verzameling is een F_σ-verzameling als zij geschreven kan worden als vereniging van een aftelbare collectie gesloten verzamelingen.

1.4. Opgave. Ga na dat de collectie $\mathcal{F}$ van gesloten verzamelingen in een metrische ruimte de volgende eigenschappen heeft.

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{F}$,
(ii) als $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ dan $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ en
(iii) als $\{F_i\}_i \subseteq \mathcal{F}$ dan $\bigcap_i F_i \in \mathcal{F}$.

1.5. Opgave. Definieer voor een deelverzameling A van een metrische ruimte

$$A^\circ = \bigcup\{U : \ U \text{ is open en } U \subseteq A\}$$

en

$$\bar{A} = \bigcap\{F : \ F \text{ is gesloten en } A \subseteq F\}$$

Bewijs dat $A^\circ = \operatorname{int} A$ en $\bar{A} = \operatorname{cl} A$.

1.6. Opgave. In deze opgave is X een metrische ruimte en $A \subseteq X$. Bewijs de volgende formules/uitspraken:

(i) $\operatorname{cl} A = X \setminus \operatorname{ext} A$,
(ii) $\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(X \setminus A)$,
(iii) $\partial A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$,
(iv) $x \in \operatorname{cl} A$ dan en slechts dan als x een adherent punt is van A en
(v) A is dicht in X dan en slechts dan als $U \cap A \neq \varnothing$ voor elke niet-lege open deelverzameling van X.

Continuïteit is ook met behulp van alléén open verzamelingen te beschrijven; de eerste stelling staat in het dictaat Voortgezette Analyse:

1.7. Stelling. *Een afbeelding $f\colon X \to Y$ is continu dan en slechts dan als voor elke open deelverzameling U van Y het volledig origineel $f^{-1}[U]$ open is in X.*

De volgende stelling staat niet expliciet in het dictaat Voortgezette Analyse maar zit al impliciet in de definitie opgesloten:

1.8. Stelling. *Laat $f\colon X \to Y$ een afbeelding tussen metrische ruimten zijn. Dan geldt: f is continu in $p \in X$ dan en slechts dan als voor elke omgeving U van $f(p)$ een omgeving V van p bestaat zó dat $f[V] \subseteq U$ (ofwel $V \subseteq f^{-1}[U]$).*

1.9. Opgave. Bewijs voorgaande stelling.

Het begrip homeomorfisme is ook topologisch; het is immers afgeleid van het begrip continuiteit. Een *homeomorfisme* tussen twee metrische ruimten is een continue bijectie waarvan de inverse afbeelding ook continu is.

De volgende eigenschappen die metrische ruimten kunnen hebben zijn ook topologisch:

splitsbaarheid. Een ruimte X heet *splitsbaar* als er twee niet-lege gesloten deelverzamelingen F en G van X bestaan zó dat $F \cap G = \varnothing$ en $X = F \cup G$.

samenhang. Een ruimte heet *samenhangend* als ze niet splitsbaar is.

compactheid. Een ruimte heet *compact* als elke open overdekking een eindige deeloverdekking heeft.

De Stelling van Stone-Weierstraß is ook een topologische stelling; in het bewijs speelt de metriek op de ruimte X geen rol, alleen de compactheid. Natuurlijk speelt de metriek op de ruimte $C(X)$ van continue functies van X naar $\mathbb{R}$ wel een rol omdat de stelling nu eenmaal zegt dat voor elke compacte ruimte X de bijbehorende metrische ruimte $C(X)$ een bepaalde eigenschap heeft.

Als laatste noemen we convergentie van rijen: een rij $\langle x_n \rangle_n$ convergeert naar een punt x dan en slechts dan als voor elke omgeving U van x een N bestaat zó dat $x_n \in U$ voor elke $n \geqslant N$.

De volgende eigenschappen zijn echte metrische eigenschappen; de metriek is niet uit de definitie weg te halen:

begrensdheid. Een metrische ruimte (X, d) heet *begrensd* als er een getal M bestaat zó dat $d(x, y) \leqslant M$ voor elke $x, y \in X$.

totale begrensdheid. Een metrische ruimte (X, d) heet *totaal begrensd* als voor elke $\varepsilon > 0$ de open overdekking $\{B_\varepsilon(x) : x \in X\}$ een eindige deeloverdekking heeft.

volledigheid. Een metrische ruimte (X, d) heet *volledig* als elke Cauchy-rij in X convergent is.

isometrie. Een *isometrie* tussen twee metrische ruimten is een bijectie die de afstand bewaart.

1.10. Opgave. Ga na dat bovenstaande eigenschappen niet topologisch zijn door telkens paren homeomorfe ruimten aan te geven waarvan één ruimte de eigenschap wel heeft en de ander niet.

2. TOPOLOGISCHE RUIMTEN

We gaan nu 'vergeten' dat we open verzamelingen met behulp van metrieken gemaakt hebben. We zullen structuren bekijken waar alléén een familie 'open' verzamelingen voorhanden is. Allereerst geven we de definitie van een topologie.

2.1. Definitie. Zij X een verzameling. Een *topologie* op X is een collectie $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen van X met de volgende drie eigenschappen (regelrecht uit Stelling 1.2 geciteerd):

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,
(ii) als $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ dan $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ en
(iii) als $\{U_i\}_i \subseteq \mathcal{T}$ dan $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$.

2.2. Definitie. Een *topologische ruimte* is een paar $(X, \mathcal{T})$ waar X een verzameling is en $\mathcal{T}$ een topologie op X.

Voordat we een paar voorbeelden van topologische ruimten gaan bekijken merken we op dat alle *topologische* noties die we hierboven besproken hebben zich onmiddelijk naar de situatie van topologische ruimten laten vertalen; we weten dus meteen wanneer we een afbeelding tussen topologische ruimten continu (in een punt) zullen noemen of hoe we de afsluiting van een deelverzameling definiëren of wanneer een deelverzameling dicht ligt in een topologische ruimte.

2.3. Voorbeelden.

1. Op elke verzameling X is $\mathcal{T}_i = \{\varnothing, X\}$ een topologie; de zogeheten *indiscrete topologie*. Dit is de minimale topologie die op X gemaakt kan worden; ga na dat een indiscrete ruimte altijd samenhangend en compact is en dat elke niet-lege deelverzameling dicht ligt. Voorts is elke afbeelding naar X continu.
2. Het andere uiterste is de *discrete topologie*: dit is de collectie 2^X van *alle* deelverzamelingen van X. Deze topologie kennen we al; hij is met behulp van de discrete metriek gedefinieerd. Als X meer dan één punt bevat is de discrete topologie niet samenhangend; $(X, 2^X)$ is compact dan en slechts dan als X eindig is. Elke afbeelding met X als domein is continu.
3. Laat X nu een oneindige verzameling zijn. Definieer
$$\mathcal{T}_{ce} = \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ is eindig}\}.$$
Het is niet moeilijk in te zien dat $\mathcal{T}_{ce}$ een topologie is; de zogeheten *co-eindige topologie*. Een verzameling is dus gesloten dan en slechts dan als zij eindig is of gelijk aan X. Een co-eindige ruimte is altijd samenhangend en compact (ga na).
4. Een klassiek voorbeeld is het volgende: definieer een topologie $\mathcal{T}_s$ op $\mathbb{R}$ door: $U \in \mathcal{T}_s$ dan en slechts dan als voor elke $x \in U$ een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $[x, x+\varepsilon) \subseteq U$.* Ga na dat $\mathcal{T}_s$ inderdaad een topologie is. We zullen de topologische ruimte $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ met $\mathbb{S}$ aanduiden. Deze ruimte staat bekend als de *Sorgenfrey lijn*, de topologie $\mathcal{T}_s$ wordt ook wel de *speldentopologie* genoemd omdat hij bepaald wordt door spelden, dat wil zeggen: intervallen van de vorm $[a, b)$ (zie ook Voortgezette Analyse).

2.4. Afspraak. Als we een metrische ruimte tegenkomen zullen we deze altijd van zijn bijbehorende *metrische topologie* voorzien denken, tenzij uitdrukkelijk anders vermeld. In het bijzonder denken we ons $\mathbb{R}$ altijd voorzien van de gewone topologie.

2.5. Opgave. Laat X oneindig zijn en voorzien van de co-eindige topologie. Bewijs dat elke continue afbeelding $f\colon X \to \mathbb{R}$ constant is.

2.6. Opgave. Ga na of de ruimte $\mathbb{S}$ samenhangend is of compact. Toon aan dat de 'Entier' functie gedefinieerd door $x \mapsto [x]$, waar $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$ continu is van $\mathbb{S}$ naar $\mathbb{R}$. Bepaal, in $\mathbb{S}$, het inwendige van $[0, 1]$ en de afsluiting van $(0, 1)$.

Basis voor een topologie

In het dictaat Voortgezette Analyse is ook gedefinieerd wat een basis voor de open verzamelingen is. We herhalen deze definitie maar nu in de context van topologische ruimten.

2.7. Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een *basis* voor de ruimte (of voor de topologie) is een deelcollectie $\mathcal{B}$ van $\mathcal{T}$ met de eigenschap dat voor elke $U \in \mathcal{T}$ een deelfamilie $\mathcal{B}'$ van $\mathcal{B}$ bestaat zó dat $U = \bigcup \mathcal{B}'$.

2.8. Voorbeelden.

1. In een metrische ruimte is de familie van alle open bollen een basis voor de topologie.
2. In de Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is de familie van alle half-open intervallen een basis.

We kunnen aan een collectie deelverzamelingen zien of hij een basis voor een topologie kan zijn; dit is de inhoud van de volgende stelling

---

* In deze topologie zijn de getallen alléén van boven te benaderen; denk aan het passen van schoenen: een beetje te groot mag, te klein is nooit goed.

2.9. Stelling. *Neem aan dat $\mathcal{B}$ een basis voor de topologie $\mathcal{T}$ op de verzameling X is. Dan voldoet $\mathcal{B}$ aan de volgende twee eigenschappen.*

(i) *Als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ en $x \in B_1 \cap B_2$ dan is er een $B \in \mathcal{B}$ zó dat $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$ en*
(ii) *$X = \bigcup \mathcal{B}$.*

Omgekeerd, als een familie $\mathcal{B}$ aan deze eigenschappen voldoet dan is er een topologie waar $\mathcal{B}$ een basis voor is.

Bewijs. De tweede eigenschap is duidelijk: ook X is open. De eerste eigenschap volgt uit het feit dat de doorsnede van twee open verzamelingen weer open is: als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ dan bestaat een collectie $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ met $B_1 \cap B_2 = \bigcup \mathcal{B}'$. Kies dan, als $x \in B_1 \cap B_2$ een $B \in \mathcal{B}'$ met $x \in B$.

Als $\mathcal{B}$ aan de basiseigenschappen voldoet dan nemen we voor $\mathcal{T}$ de collectie van alle mogelijke verenigingen van deelfamilies van $\mathcal{B}$. Het is niet moeilijk na te gaan dat $\mathcal{T}$ een topologie op X is. Om te zien dat $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ merken we op dat $B = \bigcup\{B\}$ voor elke $B \in \mathcal{B}$. We hebben voorts $\mathcal{T}$ zo gemaakt dat $\mathcal{B}$ automatisch een basis voor $\mathcal{T}$ is. □

2.10. Voorbeeld. Ga na dat de familie $\bigl\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ en } a < b\bigr\}$ aan de basiseigenschappen voldoet.

Een speciale plaats in de topologie wordt ingenomen door de ruimten met een aftelbare basis. In navolging van Hausdorff [1914] zegt men dat die ruimten aan het *tweede aftelbaarheidsaxioma** voldoen. Zo heeft $\mathbb{R}$ een aftelbare basis, de familie van alle open intervallen met rationale eindpunten.

2.11. Opgave. Bewijs dat $\mathbb{S}$ niet aan het tweede aftelbaarheids axioma voldoet.

Lokale bases

Een tweede manier om topologieën te maken is via lokale bases.

2.12. Definitie. Laat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte zijn en $x \in X$. Een *lokale basis in x* is een collectie $\mathcal{B}_x$ omgevingen van x met de eigenschap dat voor elke omgeving U van x er een $B \in \mathcal{B}_x$ is met $B \subseteq U$.

We noemen een lokale basis ook wel een *basis voor de omgevingen* of een *omgevingenbasis*.

2.13. Voorbeelden.

1. Het standaardvoorbeeld van een omgevingenbasis is natuurlijk de familie bollen rond een punt in een metrische ruimte. Als $x \in X$, waar (X, d) een metrische ruimte is dan zijn $\bigl\{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\bigr\}$ en $\bigl\{B_{2^{-n}}(x) : n \in \mathbb{N}\bigr\}$ lokale bases in x.
2. Als $x \in \mathbb{S}$ dan is $\bigl\{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\bigr\}$ een omgevingenbasis voor x.

We kunnen ook topologieën maken door voor ieder punt x in een verzameling X een familie $\mathcal{B}_x$ te kiezen en deze als lokale bases te gebruiken. Hiertoe moeten we eerst uitzoeken welke eigenschappen zo'n 'toekenning van lokale bases' moet hebben.

2.14. Stelling. *Neem aan dat in de ruimte $(X, \mathcal{T})$ voor iedere $x \in X$ een lokale basis $\mathcal{B}_x$ gekozen is. Dan gelden de volgende eigenschappen.*

(i) *Voor elke x is $\mathcal{B}_x$ niet leeg en $x \in B$ voor elke $B \in \mathcal{B}_x$.*
(ii) *Als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ dan is er een $B \in \mathcal{B}_x$ zó dat $B \subseteq B_1 \cap B_2$.*
(iii) *Als $y \in B \in \mathcal{B}_x$ dan is er een $D \in \mathcal{B}_y$ zó dat $D \subseteq B$.*

---

* In het Engels: *The second axiom of countability.* Ruimten die aan het tweede aftelbaarheids axioma voldoen worden *second countable spaces* genoemd.

In eigenschap (iii) ligt opgesloten dat elk element van $\mathcal{B}_x$ open is; hij is omgeving van al zijn punten.

Neem nu aan dat we voor elk punt x in een verzameling X een collectie deelverzamelingen hebben gekozen zó dat aan (i), (ii) en (iii) van Stelling 2.14 is voldaan. Definieer $\mathcal{T}$ door: $U \in \mathcal{T}$ dan en slechts dan als voor elke $x \in U$ een $B \in \mathcal{B}_x$ bestaat zó dat $B \subseteq U$.

We gaan na dat $\mathcal{T}$ inderdaad een topologie is en dat voor elke x de familie $\mathcal{B}_x$ een lokale basis (voor $\mathcal{T}$) in x is.

Dat $\varnothing \in \mathcal{T}$ is duidelijk (waarom?) en om in te zien dat $X \in \mathcal{T}$ gebruiken we Eigenschap (i). Eigenschap (ii) zorgt er voor dat de doorsnede van twee elementen van $\mathcal{T}$ ook weer tot $\mathcal{T}$ behoort. Dat verenigingen van deelcollecties van $\mathcal{T}$ tot $\mathcal{T}$ behoren is ook niet moeilijk in te zien.

Eigenschap (iii) impliceert dat voor elke x elk element van $\mathcal{B}_x$ tot $\mathcal{T}$ behoort en daarmee volgt uit de definitie van $\mathcal{T}$ dat $\mathcal{B}_x$ inderdaad een omgevingenbasis voor x is.

Ook hier kan men een aftelbaarheids axioma formuleren. Een ruimte voldoet aan het *eerste aftelbaarheidsaxioma** als elk punt in de ruimte een aftelbare omgevingen basis heeft.

2.15. Voorbeelden.

1. Elke metrische ruimte voldoet aan het eerste aftelbaarheids axioma: Voor elke x is $\bigl\{B_{2^{-n}}(x) : n \in \mathbb{N}\bigr\}$ een aftelbare lokale basis.
2. De Sorgenfrey lijn voldoet ook aan het eerste aftelbaarheids axioma.

2.16. Opgave. Als X aan het eerste aftelbaarheids axioma voldoet dan geldt voor elke punt x en elke deelverzameling A van X: $x \in \operatorname{cl} A$ dan en slechts dan als er een rij in A is die naar x convergeert.

2.17. Voorbeeld. We nemen $X = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\bigr\}$, het bovenhalfvlak. We wijzen voor elk punt in X een lokale basis aan. Voor elk punt (x,y) in X stellen we $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{B(x,y,n) : n \in \mathbb{N}\}$, waar de verzamelingen $B(x,y,n)$ als volgt gedefinieerd zijn.

Voor een punt (x,y) met $y > 0$ en voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we

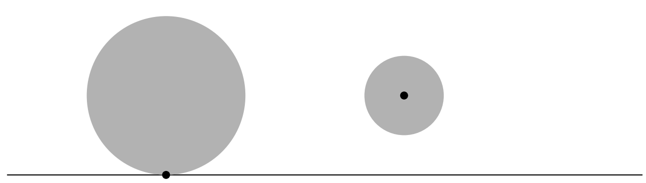
$$B(x,y,n) = \bigl\{(s,t) \in X : \|(s,t) - (x,y)\| < 2^{-n}\bigr\},$$

de gewone open cirkelschijf om (x,y) met straal 2^{-n}.

Voor een punt $(x,0)$ en voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we

$$B(x,0,n) = \bigl\{(x,0)\bigr\} \cup \bigl\{(s,t) \in X : \|(s,t) - (x,2^{-n})\| < 2^{-n}\bigr\},$$

de verzameling die bestaat uit het punt $(x,0)$ en de open cirkelschijf met straal 2^{-n} die in $(x,0)$ de x-as raakt, zie Figuur 1.



Figuur 1. Basisomgevingen in het Niemytzki vlak

* In het Engels: *The first axiom of countability.* Ruimten die aan het eerste aftelbaarheids axioma voldoen worden *first countable spaces* genoemd.

Deze topologische ruimte staat bekend als het *Niemytzki vlak*.

2.18. Opgave. Toon aan dat de toekenning in het Niemytzki vlak inderdaad aan de eigenschappen uit Stelling 2.14 voldoet.

Bewijs vervolgens dat het Niemytzki vlak samenhangend is en dat *elke* deelverzameling van de x-as gesloten is.

2.19. Voorbeeld. We nemen de volgende deelverzameling van $\mathbb{R}^2$:

$$X = \bigl\{(0,0)\bigr\} \cup \bigl\{(2^{-n},0) : n \in \mathbb{N}\bigr\} \cup \bigl\{(2^{-n},2^{-m}) : n,m \in \mathbb{N}\bigr\}.$$

We kennen elk punt een lokale basis toe: de punten ongelijk aan $(0,0)$ krijgen hun gewone omgevingen. Voor het punt $(0,0)$ doen we iets speciaals: voor elke $n \in \mathbb{N}$ en elke functie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiëren we

$$\begin{aligned} B(f,n) = \bigl\{(0,0)\bigr\} &\cup \bigl\{(2^{-m},0) : m \in \mathbb{N}, m \geqslant n\bigr\} \\ &\cup \bigl\{(2^{-m},2^{-l}) : m \in \mathbb{N}, m \geqslant n, l \geqslant f(m)\bigr\}. \end{aligned}$$

We zetten $\mathcal{B}_{(0,0)} = \bigl\{B(f,n)\bigr\}_{f,n}$.

2.20. Opgave. Toon aan dat in Voorbeeld 2.19 inderdaad een goede toekenning van lokale bases is gedaan. Bewijs dat $(0,0)$ in de afsluiting van $A = \bigl\{(2^{-n},2^{-m}) : n,m \in \mathbb{N}\bigr\}$ zit maar dat geen enkele rij in A naar $(0,0)$ convergeert. Deze ruimte voldoet dus niet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

II

NIEUWE TOPOLOGISCHE EIGENSCHAPPEN

We zullen in dit deel een aantal nieuwe topologische eigenschappen introduceren. De eerste eigenschappen vertellen iets over de mogelijkheid punten te onderscheiden; deze worden dan ook *scheidingsaxioma's* genoemd. Vervolgens noemen we een paar eigenschappen die te maken hebben met de grootte van bepaalde, bij de topologie horende, verzamelingen: de minimale grootte van een (lokale) basis en van een dichte deelverzameling.

Afspraak. We zullen vanaf nu veelal over 'de topologische ruimte X' spreken en de topologie $\mathcal{T}$ niet altijd expliciet noemen.

3. SCHEIDINGSAXIOMA'S

Als we met de indiscrete topologie werken kunnen we geen onderscheid maken tussen verschillende punten: er is maar één niet-lege open verzameling en dus hebben alle punten dezelfde familie omgevingen. We zullen eerst een paar eigenschappen formuleren die een steeds groter onderscheid tussen punten mogelijk maken.

Punten van punten scheiden

De eenvoudigste *scheidingseigenschap* is de volgende:

3.1. Definitie. Een topologische ruimte X heet een T_0*-ruimte* als de collecties omgevingen per punt verschillen. Met andere woorden: als $x \neq y$ dan is er een omgeving van x waar y niet in zit of omgekeerd.

3.2. Voorbeelden.
1. De eenvoudigste T_0-ruimte is $X = \{0, 1\}$ met als open verzamelingen $\varnothing$, $\{0\}$ en X.
2. Een ander voorbeeld krijgen we door $\mathbb{R}$ te nemen en als basis de collectie $\bigl\{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\bigr\}$.

We zien dat T_0-ruimten al een redelijke hoeveelheid open verzamelingen moeten hebben. De volgende stelling impliceert dat er tenminste zoveel open verzamelingen moet zijn als punten in de ruimte.

3.3. Stelling. *Een ruimte X is een T_0-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x, y \in X$ geldt: als $x \neq y$ dan $\operatorname{cl}\{x\} \neq \operatorname{cl}\{y\}$.*

Bewijs. Als X een T_0-ruimte is en $x \neq y$ dan is er bijvoorbeeld een omgeving van y waar x niet in zit; we zien dat $y \notin \operatorname{cl}\{x\}$.

Omgekeerd laat $x, y \in X$ en stel dat $x \in \operatorname{cl}\{y\}$. Dan volgt meteen dat $\operatorname{cl}\{x\} \subseteq \operatorname{cl}\{y\}$. Als ook nog $y \in \operatorname{cl}\{x\}$ dan volgt $\operatorname{cl}\{y\} \subseteq \operatorname{cl}\{x\}$ en dus $\operatorname{cl}\{x\} = \operatorname{cl}\{y\}$ en daarmee, volgens onze veronderstelling, $x = y$. We zien: als $x \neq y$ dan $x \notin \operatorname{cl}\{y\}$ of $y \notin \operatorname{cl}\{x\}$; in beide gevallen is er een omgeving die het ene punt wel heeft en het andere punt niet. $\square$

3.4. Opgave. Bepaal $\operatorname{cl}\{x\}$ voor de punten van de ruimten in de voorbeelden uit 3.2.

Een nog betere manier om punten uit elkaar te houden is door in Definitie 3.1 het woord 'of' te vervangen door 'en'.

3.5. Definitie. Een topologische ruimte X heet een T_1*-ruimte* als voor elk tweetal verschillende punten x en y in X er omgevingen U van x en V van y zijn met $x \notin V$ en $y \notin U$.

Een handige karakterizering van T_1-ruimten is de volgende.

3.6. Stelling. *Een ruimte X is een T_1-ruimte dan en slechts dan als $\{x\}$ gesloten is voor elke $x \in X$.*

Bewijs. Bewijs zelf de implicatie van links naar rechts.

De implicatie van rechts naar links volgt door, bij gegeven x en y, respectievelijk $U = X \setminus \{y\}$ en $V = X \setminus \{x\}$ te nemen. □

De volgende stelling volgt meteen uit de definities of uit de karakterizeringen.

3.7. Stelling. *Elke T_1-ruimte is een T_0-ruimte.*

3.8. Voorbeelden.

1. Elke co-eindige topologie is T_1; de co-eindige topologie is in feite de kleinste T_1-topologie die op een verzameling te maken is.
2. Een eindige T_1-ruimte is discreet (ga na).
3. Elke metrische ruimte is een T_1-ruimte: als $x \neq y$ neem $U = B_r(x)$ en $V = B_r(y)$, waar $r = d(x, y)$.

3.9. Opgave. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Bewijs: de ruimte $(X, \mathcal{T})$ is T_1 dan en slechts dan als $\mathcal{T}_{ce} \subseteq \mathcal{T}$.

Een nog betere puntenscheiding krijgen we als volgt.

3.10. Definitie. Een topologische ruimte X heet een T_2- of *Hausdorff ruimte* als elk tweetal verschillende punten in X disjuncte omgevingen heeft; dus als $x \neq y$ dan zijn er een omgeving U van x en een omgeving V van y zó dat $U \cap V = \varnothing$.

Het moge duidelijk zijn dat elke T_2-ruimte een T_1-ruimte is. Het onderscheid wordt nog iets duidelijker door de volgende karakterizeringen.

3.11. Stelling. *Zij X een topologische ruimte.*

(i) *X is een T_1-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ geldt $\{x\} = \bigcap\{U : U$ is een omgeving van $x\}$.*

(ii) *X is een T_2-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ geldt $\{x\} = \bigcap\{\operatorname{cl} U : U$ is een omgeving van $x\}$.*

3.12. Voorbeelden.

1. Elke metrische ruimte is Hausdorff: als $x \neq y$ dan $B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing$ waar $r = d(x, y)/2$.
2. De Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is Hausdorff: als $x < y$ dan zijn $(-\infty, y)$ en $[y, \infty)$ disjunkte omgevingen van x en y.
3. Ga na dat het Niemytzki vlak en de ruimte uit Voorbeeld 2.19 ook Hausdorff zijn.

Uit de Voortgezette Analyse kennen we volgende stelling voor metrische ruimten.

3.13. Stelling. *Laat f en g continue afbeeldingen zijn van een topologische ruimte X naar een Hausdorff ruimte Y. Dan is de verzameling $A = \bigl\{x \in X : f(x) = g(x)\bigr\}$ gesloten in X.*

Bewijs. Doe dit zelf; het is makkelijker te bewijzen dat $X \setminus A$ open is. □

3.14. Opgave. Maak een continue afbeelding f van $\mathbb{R}$ met de gewone topologie naar $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{ce})$ zó dat $\{x : f(x) = x\} = \mathbb{Q}$.

3.15. Opgave. Bewijs dat in een Hausdorff ruimte elk rijtje ten hoogste één limiet heeft. Laat ook zien dat in $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{ce})$ de rij $\langle n \rangle_n$ naar elk punt van $\mathbb{N}$ convergeert.

Punten en gesloten verzamelingen scheiden

We maken onze lijst van scheidingseigenschappen nog iets langer. Om te beginnen scheiden we punten van gesloten verzamelingen.

3.16. Definitie. Een ruimte X heet een T_3-*ruimte* als voor elke gesloten verzameling F in X en elk punt $x \in X \setminus F$ disjunkte open verzamelingen U en V bestaan met $x \in U$ en $F \subseteq V$.

Door naar complementen te kijken krijgen we de volgende karakterizering van de T_3-eigenschap.

3.17. Stelling. *Een ruimte X is een T_3-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ en elke omgeving U van x er een omgeving V van x is zó dat $\operatorname{cl} V \subseteq U$.*

3.18. Voorbeelden.

1. Elke metrische ruimte heeft de T_3-eigenschap: als U een omgeving van x is en $B_r(x) \subseteq U$ dan $\operatorname{cl} B_{r/2}(x) \subseteq U$.
2. De Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is een T_3-ruimte: als U een omgeving van x is en $[x, x+\varepsilon) \subseteq U$ neem dan $V = [x, x+\varepsilon)$ want $\operatorname{cl} V = V$.

3.19. Opgaven.

1. Toon aan dat het Niemytzki vlak een T_3-ruimte is. *Aanwijzing*: Toon aan dat $\operatorname{cl} B(x, y, n+1) \subseteq B(x, y, n)$ voor elk punt (x, y) en elke n.
2. Toon aan dat de ruimte uit Voorbeeld 2.19 een T_3-ruimte is. *Aanwijzing*: Elke basisomgeving is open-en-gesloten.

We kunnen de T_3-eigenschap wat interessanter maken door er de T_0-eigenschap bij op te tellen:

3.20. Definitie. Een topologische ruimte X heet *regulier* als ze een T_0- en een T_3-ruimte is.

De reden is dat we dan een versterking van de Hausdorff eigenschap krijgen.

3.21. Stelling. *Elke reguliere ruimte is een Hausdorff ruimte.*

Bewijs. Stel $x \neq y$ in de reguliere ruimte X. Neem aan dat bijvoorbeeld $x \notin \operatorname{cl}\{y\}$; gebruik nu de T_3-eigenschap. □

3.22. Voorbeelden.

1. Zij $X = [0, 1]$ het eenheidsinterval.Geef elk punt $x > 0$ zijn gewone omgevingen. Voor het punt 0 en elke $n \in \mathbb{N}$ zetten we $B(0, n) = [0, 2^{-n}) \setminus \{2^{-m} : m \in \mathbb{N}\}$. Dit levert een legitiem systeem van omgevingenbases. De zo verkregen ruimte is Hausdorff (ga na). Omdat $\operatorname{cl} B(0, n) = [0, 2^{-n}]$ voor elke n is de ruimte niet regulier (ga na).
2. Neem $X = \mathbb{R}$ en stel

$$\mathcal{T} = \{U \setminus C : U \text{ is open in de gewone topologie en } C \text{ is aftelbaar}\}.$$

Ga na dat $\mathcal{T}$ een Hausdorff topologie is die niet regulier is.

De volgende scheidingseigenschap is de sterkste die we voorlopig zullen beschouwen. De definitie zal niet als een verrassing komen.

3.23. Definitie. Een ruimte X heet een T_4-*ruimte* als voor elk tweetal disjunkte gesloten verzamelingen F en G in X disjunkte open verzamelingen U en V bestaan met $F \subseteq U$ en $G \subseteq V$.

3.24. Voorbeelden.

1. Elke metrische ruimte heeft de T_4-eigenschap: laat F en G disjuncte en gesloten verzamelingen in de metrische ruimte X zijn. Kies voor elke $x \in F$ een getal $r(x) > 0$ zó dat $B_{3r(x)}(x) \cap G = \varnothing$ en kies analoog $r(x) > 0$ voor elke $x \in G$. Stel nu $U = \bigcup\bigl\{B_{r(x)}(x) : x \in F\bigr\}$ en $V = \bigcup\bigl\{B_{r(x)}(x) : x \in G\bigr\}$. Ga na dat $U \cap V = \varnothing$ (zelfs $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \varnothing$).
2. De ruimten uit Voorbeeld 3.2 zijn T_4-ruimten omdat daar geen disjunkte gesloten verzamelingen zijn.
3. De Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is een T_4-ruimte: Als F en G gesloten en disjunkt zijn kies dan voor $x \in F$ ($x \in G$) een $\varepsilon_x > 0$ zó dat $[x, x+\varepsilon_x) \cap G = \varnothing$ (of $[x, x+\varepsilon_x) \cap F = \varnothing$). Ga na dat $U = \bigcup\bigl\{[x, x+\varepsilon_x) : x \in F\bigr\}$ en $V = \bigcup\bigl\{[x, x+\varepsilon_x) : x \in G\bigr\}$ disjunkt zijn.

Zoals uit bovenstaande voorbeelden blijkt is de combinatie van T_4 en T_0 niet zo interessant. De combinatie van T_4 en T_1 is dat wel.

3.25. Definitie. Een topologische ruimte X heet *normaal* als ze een T_1- en een T_4-ruimte is.

Omdat in een T_1-ruimte punten gesloten verzamelingen opleveren is de volgende stelling meteen duidelijk.

3.26. Stelling. *Elke normale ruimte is regulier.*

Niet elke reguliere ruimte is normaal.

3.27. Voorbeeld. Het Niemytzki vlak is niet normaal. Om dit in te zien nemen we de volgende disjunkte gesloten verzamelingen: $F = \bigl\{(x,0) : x \in \mathbb{Q}\bigr\}$ en $G = \bigl\{(x,0) : x \in \mathbb{P}\bigr\}$ (we gebruiken $\mathbb{P}$ voor de verzameling der irrationale getallen). Laat $U \supseteq F$ en $V \supseteq G$ open verzamelingen zijn; we moeten aantonen dat $U \cap V \neq \varnothing$. Dit zal ons enige zweetdruppels kosten.

We beginnen met $\mathbb{P}$ op te delen in aftelbaar veel stukken: voor elke n stellen we

$$G_n = \{x \in \mathbb{P} : B(x,0,n) \subseteq V\}.$$

We beweren nu: als $x \in \operatorname{cl} G_n$ (ten opzichte van de gewone topologie van $\mathbb{R}$) dan $(x,0) \in \operatorname{cl} V$ (in het Niemytzki vlak).

Stel maar dat $\langle x_i \rangle_i$ een rij in G_n is met limiet x. We bewijzen dat $B(x,0,n) \setminus \bigl\{(x,0)\bigr\}$ overdekt wordt door de familie $\bigl\{B(x_i,0,n) : i \in \mathbb{N}\bigr\}$. Laat $(p,q) \in B(x,0,n) \setminus \bigl\{(x,0)\bigr\}$ en zij $\varepsilon = 2^{-n} - \bigl\|(x,2^{-n}) - (p,q)\bigr\|$. Voor elke i met $|x_i - x| < \varepsilon$ geldt $\bigl\|(x_i,2^{-n}) - (p,q)\bigr\| < 2^{-n}$ (driehoeksongelijkheid) en dus $(p,q) \in B(x_i,0,n)$. We zien dat $B(x,0,n) \setminus \bigl\{(x,0)\bigr\} \subseteq V$ en dus dat $(x,0) \in \operatorname{cl} V$.

Rest nog te bewijzen dat $\operatorname{cl} G_n \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ voor een $n \in \mathbb{N}$: neem dan q in de doorsnede en kies $m \geqslant n$ met $B(q,0,m) \subseteq U$.

Neem eens aan dat $\operatorname{cl} G_n \cap \mathbb{Q} = \varnothing$ voor alle n. We gebruiken de Neststelling van Cantor om tot een tegenspraak te komen.

Neem een aftelling $\langle q_n \rangle_n$ van de rationale getallen. Kies een gesloten interval I_1 om 0 zó dat $I_1 \cap G_1 = \varnothing$ (dit kan omdat $0 \notin \operatorname{cl} G_1$). Kies vervolgens een deelinterval J_1 van I_1 met $q_1 \notin J_1$. We gaan verder met inductie: als J_n gevonden is kiezen we eerst een rationaal getal q in het inwendige van J_n. Vervolgens kiezen we, omdat $q \notin \operatorname{cl} G_{n+1}$, een gesloten interval I_{n+1} om q disjunkt van G_{n+1}. Tenslotte verkleinen we I_{n+1} tot een interval J_{n+1} met $q_{n+1} \notin J_{n+1}$.

Volgens de Neststelling is er een punt x in $\bigcap_n I_n$. Omdat we alle rationale getallen vermeden hebben zit x niet in $\mathbb{Q}$. Omdat duidelijk $\mathbb{P} = \bigcup_n G_n$ en omdat we elke G_n hebben vermeden zit x ook niet in $\mathbb{P}$. Dit is een duidelijke tegenspraak.

3.28. Opgave. In Voorbeeld 3.27 is verkapt de Stelling van Baire gebruikt. Deze Stelling zegt: *als $\langle F_n\rangle_n$ een rij nergens dichte deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ is dan is het complement van $\bigcup_n F_n$ een dichte deelverzameling van $\mathbb{R}$.*

Een verzameling A heet *nergens dicht* als $\operatorname{int}\operatorname{cl} A = \varnothing$.

a) Bewijs de Stelling van Baire. *Aanwijzing*: Loop het bewijs in Voorbeeld 3.27 nauwkeurig na.

b) Bewijs met behulp van de Stelling van Baire dat $\mathbb{Q}$ geen G_δ-verzameling van $\mathbb{R}$ is.

c) Bewijs met behulp van de Stelling van Baire dat het Niemytzki vlak niet normaal is.

Normale ruimten

Normale ruimten hebben een paar eigenschappen die reguliere ruimten niet hebben; de belangrijkste, voor ons, is dat normale ruimten een groot aantal continue functies naar $\mathbb{R}$ hebben.

Voor we de stelling die al die continue functies levert formuleren en bewijzen moeten we de T_4-eigenschap een beetje herformuleren.

Allereerst een formulering in termen van gesloten en open verzamelingen.

3.29. Lemma. *Een ruimte X is een T_4-ruimte dan en slechts dan als voor elke gesloten verzameling F en elke open verzameling U met $F \subseteq U$ een open verzameling V bestaat met $F \subseteq V \subseteq \operatorname{cl} V \subseteq U$.*

Bewijs. Gegeven F en U bekijk de disjunkte gesloten verzamelingen F en $X \setminus U$. Als $O_1 \supseteq F$ en $O_2 \supseteq X \setminus U$ open en disjunkt zijn dan geldt $\operatorname{cl} O_1 \subseteq U$.

Omgekeerd, als F en G disjunkt en gesloten zijn kies dan $U \supseteq F$ met $\operatorname{cl} U \subseteq X \setminus G$ en neem $V = X \setminus \operatorname{cl} U$. □

We kunnen de T_4-eigenschap ook iets versterken.

3.30. Lemma. *Als X een T_4-ruimte is en F en G gesloten en disjunkt in X dan bestaan open verzamelingen $U \supseteq F$ en $V \supseteq G$ zó dat $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \varnothing$.*

Bewijs. Kies disjunkte open verzamelingen $O_1 \supseteq F$ en $O_2 \supseteq G$. Kies dan $U \supseteq F$ met $\operatorname{cl} U \subseteq O_1$ en neem $V = O_2$. □

De volgende stelling staat bekend als het Lemma van Urysohn.

3.31. Stelling. *Een ruimte X is een T_4-ruimte dan en slechts dan als voor elk tweetal gesloten en disjunkte verzamelingen F en G een continue functie $f\colon X \to [0,1]$ bestaat met $f \restriction F \equiv 0$ en $f \restriction G \equiv 1$.*

Bewijs. Van rechts naar links is niet moeilijk: gegeven de continue functie f kunnen we $U = f^{-1}\big[[0,\frac{1}{2})\big]$ en $V = f^{-1}\big[(\frac{1}{2},1]\big]$ nemen.

Van links naar rechts zal wat meer moeite kosten. Laten we eens kijken wat we nodig hebben. Als $f\colon X \to [0,1]$ een functie is zoals gevraagd dan kunnen we voor elke $r \in (0,1)$ de open verzameling $U_r = f^{-1}\big[[0,r)\big]$ nemen. De zo verkregen familie open verzamelingen bepaalt de functie geheel: er geldt namelijk, voor elke x en elke r,

$$f(x) < r \text{ dan en slechts dan als } x \in U_r,$$

en dus

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in U_r\}, & \text{als } x \in \bigcup_r U_r \text{ en} \\ 1, & \text{als } x \notin \bigcup_r U_r. \end{cases} \tag{$*$}$$

De familie $\{U_r : 0 < r < 1\}$ heeft nog een andere eigenschap namelijk:

$$\text{als } s < r \text{ dan } \operatorname{cl} U_s \subseteq U_r. \tag{$**$}$$

We zien: een continue functie van X naar $\mathbb{R}$ bepaalt een familie open verzamelingen met eigenschap $(**)$ en die familie bepaalt de functie volgens formule $(*)$.

Hierdoor geïnspireerd zullen we proberen een familie open verzamelingen $\{U_r : 0 < r < 1\}$ te maken die aan $(**)$ voldoet en dan via formule $(*)$ een functie definiëren en *aantonen dat die functie continu is*.

We beginnen met de U_r te maken voor elke $r \in \mathbb{Q}$. We nemen hiertoe aftelling $\langle q_n \rangle_n$ van $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ met $q_0 = 0$ en $q_1 = 1$. Om te beginnen kiezen we twee open verzamelingen U_0 en U_1 zó dat

$$F \subseteq U_0 \subseteq \operatorname{cl} U_0 \subseteq U_1 \subseteq X \setminus G.$$

Vervolgens kiezen we een open verzameling U_{q_2} zó dat

$$\operatorname{cl} U_0 \subseteq U_{q_2} \subseteq \operatorname{cl} U_{q_2} \subseteq U_1.$$

Laat nu U_{q_i} gevonden zijn voor alle $i < n$ (waar $n \geqslant 3$) zó dat

$$\text{als } i, j < n \text{ en } q_i < q_j \text{ dan } \operatorname{cl} U_{q_i} \subseteq U_{q_j}. \tag{$\dagger$}$$

We zoeken een U_{q_n} zó dat $(\dagger)$ ook geldt voor $i, j \leqslant n$. We kijken waar q_n ligt ten opzichte van de q_i met $i < n$; kies $i_0, i_1 < n$ zó dat $q_{i_0} < q_n < q_{i_1}$ en zó dat geen enkele q_i met $i < n$ in het interval (q_{i_0}, q_{i_1}) ligt. We kunnen nu een open verzameling U_{q_n} kiezen met

$$\operatorname{cl} U_{q_{i_0}} \subseteq U_{q_n} \subseteq \operatorname{cl} U_{q_n} \subseteq U_{q_{i_1}}.$$

Aan het eind van deze constructie hebben we een familie $\{U_q : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$ van open verzamelingen met eigenschap $(**)$. Definieer nu $U_r = \bigcup_{q \leqslant r} U_q$ voor $r \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Voor de grotere collectie geldt eigenschap $(**)$ ook: als $r < s$ dan kiezen we eerst p en q in $\mathbb{Q}$ met $r < p < q < s$. Dan volgt makkelijk dat $\operatorname{cl} U_r \subseteq \operatorname{cl} U_p \subseteq U_q \subseteq U_s$.

Definieer nu $f \colon X \to [0,1]$ via formule $(*)$. We beweren dat f continu is. Neem $x \in X$ en een interval (r,s) om $f(x)$. Kies p en q met $r < p < f(x) < q < s$ en neem $U = U_q \setminus \operatorname{cl} U_p$; U is open en omdat $p < f(x) < q$ geldt $x \in U$. Verder geldt dat $f[U] \subseteq (r,s)$: als $y \in U$ dan $p \leqslant f(y) \leqslant q$.

Tenslotte: als $x \in F$ dan $x \in U_r$ voor alle r, dus $f(x) = 0$ en als $x \in G$ dan $x \notin \bigcup_r U_r$ dus $f(x) = 1$. $\square$

3.32. Opgave. Voor metrische ruimten is het heel makkelijk een functie als in Stelling 3.31 te vinden; ga na dat

$$f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)}$$

voldoet.

Met behulp van het Lemma van Urysohn kunnen we ook een fraaie beschrijving van gesloten G_δ-verzamelingen (en dus ook van open F_σ-verzamelingen) geven.

3.33. Opgave. Zij X een normale ruimte. Een gesloten verzameling F in X is een G_δ-verzameling dan en slechts dan als een continue functie $f \colon X \to \mathbb{R}$ bestaat zó dat $F = \{x : f(x) = 0\}$. *Aanwijzing*: Van rechts naar links is makkelijk. Van links naar rechts: stel $F = \bigcap_n O_n$ en kies voor elke n een continue $f_n \colon X \to [0,1]$ met $f_n \restriction F \equiv 0$ en $f_n \restriction (X \setminus O_n) \equiv 1$. Beschouw $f = \sum_n 2^{-n} f_n$.

Volledig reguliere ruimten

We besluiten dit hoofdstuk met een eigenschap die tussen normaliteit en regulariteit in zit.

3.34. Definitie. Een topologische ruimte X heet een $T_{3\frac{1}{2}}$*-ruimte* als voor elke gesloten deelverzameling F van X en elk punt $x \in X \setminus F$ een continue functie $f\colon X \to [0,1]$ bestaat met $f(x) = 0$ en $f \restriction F \equiv 1$.

Een ruimte die zowel T_0 als $T_{3\frac{1}{2}}$ is noemen we *volledig regulier* of een *Tychonoff ruimte*.

3.35. Opgave. Bewijs dat elke normale ruimte volledig regulier is en dat elke volledig reguliere ruimte regulier is.

3.36. Opgave. Bewijs dat elke deelruimte van een volledig reguliere ruimte weer volledig regulier is.

Uit deze beide opgaven volgt dat elke deelruimte van een normale ruimte volledig regulier is. Dit is het beste dat men kan zeggen; niet elke deelruimte van een normale ruimte hoeft normaal te zijn.

3.37. Voorbeelden.

1. Daar elke normale ruimte volledig regulier is is elke metrische ruimte volledig regulier; geef hiervan een direct bewijs.
2. De Sorgenfrey lijn is dus ook volledig regulier; dit is ook direct in te zien: als F gesloten is en $x \notin F$ kies dan $y > x$ met $[x, y) \cap F = \varnothing$. De functie f gedefinieerd door

$$f(p) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant p < y \text{ en} \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$

voldoet duidelijk.

3.38. Voorbeeld. Het Niemytzki vlak is volledig regulier; omdat de ruimte niet normaal is moeten we dit met de hand laten zien. Voor de punten boven de x-as kunnen we de gewone metriek van $\mathbb{R}^2$ gebruiken.

Neem nu een punt $(x, 0)$ op de x-as en definieer voor elke $r \in (0, 1]$

$$U_r = \bigl\{(x, 0)\bigr\} \cup \bigl\{(p, q) : \|(p, q) - (x, r)\| < r\bigr\}.$$

Eenvoudig is in te zien dat elke U_r open is en dat $\operatorname{cl} U_r \subseteq U_s$ als $r < s$. Als in het bewijs van het Lemma van Urysohn definiëren we nu

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in U_r\}, & \text{als } x \in \bigcup_r U_r \text{ en} \\ 1, & \text{als } x \notin \bigcup_r U_r. \end{cases}$$

Dit geeft een continue functie met $f(x, 0) = 0$ en $f(p, q) = 1$ als $(p, q) \notin U_1$. Door deze functie te herschalen kunnen we voor elke omgeving U van $(x, 0)$ een functie g vinden met $g(x, 0) = 0$ en $g(p, q) = 1$ voor $(p, q) \notin U$.

3.39. Voorbeeld. We maken het plaatje volledig door een voorbeeld te geven van een reguliere ruimte die niet volledig regulier is. We maken hiertoe een topologie op het bovenhalfvlak.

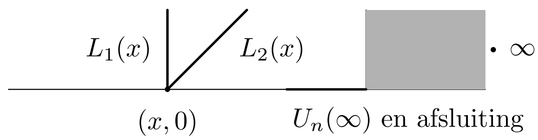
De punten boven de x-as maken we geïsoleerd, dat wil zeggen, als z niet op de x-as ligt dan is $\bigl\{\{z\}\bigr\}$ een lokale basis in z.

Voor een punt $(x, 0)$ op de x-as maken we basisomgevingen als volgt: eerst stellen we $L_1(x) = \bigl\{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant 1\bigr\}$ (het verticale lijntje ter lengte 1 vanuit $(x, 0)$) en $L_2(x) = \bigl\{(x+y, y) : 0 \leqslant y \leqslant 1\bigr\}$ (het lijntje dat onder een hoek van $\pi/4$ vanuit $(x, 0)$ vertrekt). Vervolgens zetten we $L_x = L_1(x) \cup L_2(x)$. Als lokale basis in $(x,0)$ nemen we $\mathcal{B}_x = \{L_x \setminus F : F$ is eindig en $(x,0) \notin F\}$. De zo verkregen ruimte is regulier, zelfs volledig regulier want elke basisomgeving is open-en-gesloten.

We voegen nog één punt ∞ toe, met basisomgevingen

$$U_n(\infty) = \{\infty\} \cup \bigl\{(x,y) : x \geqslant n\bigr\} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ga na dat $\operatorname{cl} U_{n+1} = U_{n+1} \cup \bigl\{(x,0) : n < x \leqslant n+1\bigr\}$; de zo verkregen ruimte M is dus nog steeds regulier: $\operatorname{cl} U_{n+1} \subseteq U_n$. Zie ook Figuur 2.



Figuur 2. Omgevingen in Voorbeeld 3.39

De ruimte is niet volledig regulier. Neem maar eens een continue functie $f\colon M \to [0,1]$ met $f(x,0) = 0$ voor $x \leqslant 0$. We bewijzen dat $f(\infty) = 0$.

Hiertoe merken we eerst het volgende op: voor elke $x \in \mathbb{R}$ is er een aftelbare verzameling $A_x \subseteq L_x$ zó dat als $\boldsymbol{p} \in L_x \setminus A_x$ dan $f(\boldsymbol{p}) = f(x,0)$; immers voor elke n is er een eindige verzameling F_n zó dat $\bigl|f(\boldsymbol{p}) - f(x,0)\bigr| < 2^{-n}$ voor $\boldsymbol{p} \in L_x \setminus F_n$, neem nu $A_x = \bigcup_n F_n$.

We bewijzen nu: voor elke n zijn er maar aftelbaar veel $x \in [n, n+1)$ waarvoor $f(x,0) \neq 0$. Voor $n < 0$ klopt dit. Neem $n \geqslant 0$ en neem aan dat het al klopt voor $k < n$. Kies een rij $\langle x_i \rangle_i$ in $[n-1, n)$ die naar n convergeert en zó dat $f(x_i, 0) = 0$ voor alle i.

Projecteer de vereniging $\bigcup_i \bigl(L_2(x_i) \cap A_{x_i}\bigr)$ op de x-as; we krijgen een aftelbare verzameling A. Neem nu $x \in [n, n+1) \setminus A$; de lijn $L_1(x)$ snijdt dan $L_2(x_i) \setminus A_{x_i}$ voor bijna alle i. Elke omgeving van $(x,0)$ snijdt dus ook bijna alle $L_2(x_i) \setminus A_{x_i}$. Hieruit volgt dat $f(x,0) = 0$.

3.40. Opgave. Voeg nog een extra punt $-\infty$ aan de ruimte M uit Voorbeeld 3.39 toe, met basisomgevingen $U_n(-\infty) = \{-\infty\} \cup \bigl\{(x,y) : x \leqslant -n\bigr\}$. Deze nieuwe ruimte noemen we M^+.

Bewijs nu dat $f(\infty) = f(-\infty)$ voor elke continue functie $f\colon M^+ \to \mathbb{R}$.

3.41. Opgave. Bestudeer nu het artikel [1972] van van Douwen of maak Opgave 2.7.17 in het boek [1989] van Engelking.

III

COMPACTHEID EN PRODUCTEN

We zullen nu de klasse der compacte Hausdorff ruimten beschouwen. Willekeurige compacte ruimten zijn over het algemeen niet zo interessant; de compactheidseigenschap komt pas goed tot z'n recht als de Hausdorff eigenschap erbij wordt opgeteld.

In het tweede hoofdstuk van dit deel maken we producten van topologische ruimten.

4. EENVOUDIGE EIGENSCHAPPEN

Om te beginnen herhalen we de definitie van compactheid nog maar eens even.

4.1. Definitie. Een topologische ruimte is *compact* als elke open overdekking van die ruimte een eindige deeloverdekking heeft.

4.2. Voorbeelden.

1. Elke eindige ruimte is compact.
2. Elke ruimte met de co-eindige topologie is compact.
3. De Sorgenfrey lijn, het Niemytzki vlak en de ruimte uit Voorbeeld 2.19 zijn niet compact.
4. Elk gesloten en begrensd interval in $\mathbb{R}$ is compact, ten opzichte van de gewone topologie.

Door in de definitie over te gaan op complementen krijgen we de volgende herformulering van compactheid. Een ruimte is compact dan en slechts dan als elke familie gesloten verzamelingen met lege doorsnede een eindige deelfamilie heeft die ook een lege doorsnede heeft.

In de praktijk gebruiken we de contrapositieve formulering:

4.3. Stelling. *Een ruimte is compact dan en slechts dan als elke familie gesloten verzamelingen waarvan elke eindige deelfamilie een niet-lege doorsnede heeft zelf ook een niet-lege doorsnede heeft.*

In plaats van de zin 'elke eindige deelfamilie heeft een niet-lege doorsnede' zeggen we dat de familie de *eindige doorsnede eigenschap** heeft.

We zullen nu wat eigenschappen van compacte ruimten bekijken; sommige van deze eigenschappen kennen we in feite al van de cursus Voortgezette Analyse.

4.4. Stelling. *Zij $f\colon X \to Y$ een continue surjectieve afbeelding, waarbij X een compacte ruimte is, dan is Y ook compact.*

4.5. Stelling. *Elke gesloten deelruimte van een compacte ruimte is compact.*

De stelling dat compacte deelruimten van metrische ruimten gesloten zijn geldt niet voor willekeurige topologische ruimten.

4.6. Voorbeeld. Neem $\mathbb{N}$ met de co-eindige topologie en neem de deelruimte $2\mathbb{N}$. Dan is $2\mathbb{N}$ compact (want zij draagt de co-eindige topologie) maar niet gesloten.

We kunnen wel de volgende stelling bewijzen.

---

* Engels: *finite intersection property.*

4.7. Stelling. *Zij X een Hausdorff ruimte en Y een compacte deelruimte van X, dan is Y gesloten in X.*

Bewijs. Het bewijs is instructief genoeg om volledig na te lopen.

Zij $x \in X \setminus Y$; we zoeken een omgeving U van x die disjunct is van Y. Kies hiertoe voor elke $y \in Y$ een omgeving U_y van x en een omgeving V_y van y zó dat $U_y \cap V_y = \varnothing$.

We hebben nu een open overdekking van Y: de familie $\{V_y : y \in Y\}$. Neem een eindige deeloverdekking, zeg $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_k}\}$.

Maak nu $U = \bigcap_{i=1}^k U_{y_i}$ en $V = \bigcup_{i=1}^k V_{y_i}$; dan zijn U en V disjunct, x is een element van U en $Y \subseteq V$.

We hebben dus niet alleen laten zien dat x een omgeving heeft die disjunct is van Y, we hebben zelfs disjuncte omgevingen voor x en Y gevonden. $\square$

Door het bewijs van deze stelling even na te lopen krijgen we vrijwel meteen de volgende stelling cadeau.

4.8. Stelling. *Elke compacte Hausdorff ruimte is regulier.*

En als we het bewijs nog beter bekijken dan zien we ook dat de volgende stelling waar is.

4.9. Stelling. *Elke compacte Hausdorff ruimte is normaal.*

Een andere stelling uit de Voortgezette Analyse zegt dat een continue bijectie van een compacte metrische ruimte naar een andere metrische ruimte automatisch een homeomorfisme is. Deze stelling geldt onverkort voor compacte Hausdorff ruimten. Het bewijs is ook hetzelfde.

4.10. Stelling. *Zij $f\colon X \to Y$ een continue bijectie, waarbij X compact is en Y Hausdorff. Dan is f een homeomorfisme.*

Bewijs. Om de continuïteit van f^{-1} te bewijzen moeten we aantonen dat $f[A]$ gesloten is in Y voor elke gesloten verzameling A in X.

Welnu: A is compact dus $f[A]$ is compact dus $f[A]$ is gesloten. $\square$

Deze stelling vertelt ons iets over de plaats van compacte Hausdorff topologieën tussen de andere topologieën. Immers, stel $\mathcal{T}$ en $\mathcal{S}$ zijn topologieën op dezelfde verzameling X. Neem aan dat $\mathcal{T}$ compact is, dat $\mathcal{S}$ Hausdorff is en dat $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Dan volgt uit bovenstaande stelling dat $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ omdat de identieke afbeelding een continue bijectie van $(X, \mathcal{T})$ naar $(X, \mathcal{S})$ is.

4.11. Opgave. Leid uit bovenstaande opmerking af dat compacte Hausdorff topologieën *minimaal Hausdorff* en *maximaal compact* zijn: elke topologie met echt minder open verzamelingen is niet meer Hausdorff en elke topologie met echt meer open verzamelingen is niet meer compact.

5. PRODUCTEN

Eindige producten

Bij het bewijs van een paar metrizeringsstellingen hebben we topologische producten nodig. We bekijken hoe we eindige en oneindige producten kunnen definiëren en we zullen zien dat aftelbare producten van metrizeerbare ruimten weer metrizeerbaar zijn.

5.1. Definitie. Laat X_1, X_2,..., X_n een eindig aantal verzamelingen zijn. Het *product* van die verzamelingen is de verzameling van alle (geordende) n-tallen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die voldoen aan $x_i \in X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

We noteren het product als $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ of $\prod_{i=1}^n X_i$.

5.2. Voorbeelden.

1. Volgens deze definitie is $\mathbb{R}^n$ inderdaad het product van n kopieën van $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ is dus de verzameling van punten in het vlak waarvan de tweede coördinaat rationaal is.

Voor de gewone topologie van $\mathbb{R}^n$ is de verzameling van open rechthoeken een basis. Dit idee gebruiken we om een topologie op andere producten te maken.

5.3. Definitie. Laat $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, ..., $(X_n, \mathcal{T}_n)$ een eindige familie topologische ruimten zijn.

Een *open blok* in $\prod_{i=1}^n X_i$ is een verzameling van de vorm $\prod_{i=1}^n U_i$ waar telkens U_i open is in X_i.

5.4. Lemma. *De familie van open blokken is een basis voor een topologie op $\prod_{i=1}^n X_i$.*

Bewijs. Ga zelf na dat de doorsnede van twee open blokken weer een open blok is en dat de open blokken het product overdekken. Pas vervolgens Stelling 2.9 toe. □

5.5. Definitie. Laat $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, ..., $(X_n, \mathcal{T}_n)$ een eindige familie topologische ruimten zijn.

De *producttopologie* op $\prod_{i=1}^n X_i$ is de topologie die de familie der open blokken als basis heeft.

De verzameling $\prod_{i=1}^n X_i$ met de producttopologie noemen we het *product* van de ruimten $(X_1, \mathcal{T}_1)$, ..., $(X_n, \mathcal{T}_n)$.

Bij de definitie van de producttopologie hebben we ons laten leiden door de situatie in $\mathbb{R}^n$. Er is nog een andere reden om de producttopologie te definiëren zoals we dat gedaan hebben: de projecties van het product naar de factoren zijn continu en de producttopologie is de 'zuinigste' topologie die dit klaarspeelt.

5.6. Definitie. Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$ een product van een n-tal verzamelingen en $i \leqslant n$. De afbeelding $\pi_i: X \to X_i$ gedefinieerd door $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ heet de *projectie op de i-de coordinaat of factor.*

5.7. Stelling. *Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$ een product van een n-tal topologische ruimten. Dan is elke projectie $\pi_i: X \to X_i$ continu. Elke andere topologie die de projecties continu maakt is groter dan de producttopologie.*

Bewijs. Dat elke π_i continu is is eenvoudig: als $U \subseteq X_i$ open is dan is $\pi_i^{-1}[U]$ een open blok (wat zijn de factoren?).

Omgekeerd, stel $\mathcal{T}$ is een topologie die de projecties continu maakt. Dan volgt meteen dat voor elke i en elke open verzameling U van X_i het open blok $\pi_i^{-1}[U]$ tot $\mathcal{T}$ behoort. Elke eindige doorsnede van dit soort open blokken behoort dan ook tot $\mathcal{T}$ (want $\mathcal{T}$ is een topologie); maar zo krijgen we nu net alle open blokken.

Conclusie: $\mathcal{T}$ bevat alle open blokken en dus ook willekeurige verenigingen van open blokken. Maar dit is precies wat we wilden aantonen. □

Met behulp hiervan kunnen we laten zien dat continuïteit van een afbeelding *naar* een product hetzelfde is als coördinaatsgewijze continuïteit.

5.8. Stelling. *Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$ een product van een n-tal topologische ruimten. Dan geldt: een afbeelding $f: Y \to X$ is continu dan en slechts dan als alle samenstellingen $\pi_i \circ f$ continu zijn.*

Bewijs. Als f continu is, dan is zeker elke $\pi_i \circ f$ continu. (Ga na!)

Omgekeerd, neem aan dat elke samenstelling $\pi_i \circ f$ continu is. Zij $y \in Y$, en zij $U = \prod_i U_i$ een basisomgeving van $f(y)$. Nu geldt voor $z \in Y$ dat $f(z) \in U$ dan en slechts dan als voor elke i de i-de coördinaat van $f(z)$ tot U_i behoort. Die i-de coördinaat is precies $\pi_i\bigl(f(z)\bigr)$.

We kunnen dus narekenen dat

$$f^{-1}[U] = \bigcap_{i=1}^{n} (\pi_i \circ f)^{-1}[U_i],$$

waarmee is aangetoond dat $f^{-1}[U]$ een omgeving van y is. □

In het algemeen zullen we in een situatie als deze de afbeelding $\pi_i \circ f$ noteren als f_i.

Omgekeerd kunnen we uit een stel afbeeldingen $f_i\colon Y \to X_i$ een afbeelding f van Y naar X maken: definieer maar $f(y) = \bigl(f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y)\bigr)$. De afbeelding f heet wel de *diagonaal* van de afbeeldingen f_1, f_2, …, f_n. We noteren de diagonaal als $f = \triangle_{i=1}^{n} f_i$ of $f = f_1 \triangle f_2 \triangle \cdots \triangle f_n$.

Bij Voortgezette Analyse is bewezen dat elk begrensd en gesloten blok in $\mathbb{R}^n$ compact is. Een zorgvuldige analyse van dat bewijs geeft de volgende stelling.

5.9. Stelling. *Het product van een eindig aantal compacte topologische ruimten is compact.*

Eén van de bewijzen dat $\mathbb{R}^2$ samenhangend is laat zich generaliseren.

5.10. Stelling. *Het product van eindig veel samenhangende ruimten is samenhangend.*

5.11. Opgave. Bewijs voor elk van de onderstaande eigenschappen dat het product de eigenschap heeft, zodra elke factor deze heeft.

T_0, T_1, T_2, regulier, volledig regulier en het hebben van een aftelbare basis.

5.12. Opgave. Het product van de Sorgenfrey lijn met zichzelf is niet normaal.
Aanwijzing: Bekijk op de 'nevendiagonaal' de verzamelingen $Q = \bigl\{(q, -q) : q \in \mathbb{Q}\bigr\}$ en $P = \bigl\{(p, -p) : p \in \mathbb{P}\bigr\}$. Laat zien dat Q en P gesloten zijn. Pas nu het argument voor het Niemytzki vlak uit Voorbeeld 3.27 aan.

5.13. Opgave. Het product van een eindig aantal metrizeerbare topologische ruimten is metrizeerbaar. *Aanwijzing*: Definieer, naar analogie met $\mathbb{R}^n$, een metriek op $\prod_{i=1}^{n} X_i$ door

$$d\bigl((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\bigr) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i),$$

waar telkens d_i een metriek op X_i is die de topologie genereert.

Oneindige producten

Om te beginnen moeten we afspreken wat het product van een willekeurige familie verzamelingen zou moeten zijn. Het antwoord ligt, na enig nadenken, eigenlijk voor de hand; als we eindig veel—zeg n—verzamelingen hebben dan bestaat het product uit geordende n-tallen punten waarbij telkens de i-de coördinaat uit de i-de verzameling komt. Zo'n n-tal is in feite een functie met domein $\{1, 2, \dots, n\}$ die voor elke i een punt in X_i kiest—een keuzefunctie.

5.14. Definitie. Laat $\{X_t\}_{t \in T}$ een familie verzamelingen zijn. Het *product* van die verzamelingen is gedefinieerd als de verzameling van alle keuzefuncties van die familie; we noteren het product als $\prod_{t \in T} X_t$.

Dus $x \in \prod_{t \in T} X_t$ dan en slechts dan als x een functie is met domein T zó dat $x(t) \in X_t$ voor alle t. Om de suggestie van coördinaten te versterken schrijven we x_t in plaats van $x(t)$ en $x = (x_t)_{t \in T}$.

Vervolgens nemen we aan dat elke X_t een topologische ruimte is, met topologie $\mathcal{T}_t$. De vraag is nu hoe we $\prod_{t\in T} X_t$ van een topologie zullen voorzien. We laten ons leiden door een natuurlijke eis, namelijk dat de projecties continu moeten zijn en dat dit zo zuinig mogelijk moet gebeuren. Vergelijk hiertoe Stelling 5.7.

5.15. Definitie. Zij $X = \prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie verzamelingen en neem $s \in T$. De afbeelding $\pi_s \colon X \to X_s$ gedefinieerd door $\pi_s\bigl((x_t)_{t\in T}\bigr) = x_s$ heet de *projectie op de s-de coördinaat of factor*.

Als we willen dat elke projectie continu is dan moet voor elke t en voor elke open verzameling U in X_t het volledig origineel $\pi_t^{-1}[U]$ open zijn. Voorts moeten eindige doorsneden van dit soort verzamelingen ook weer open zijn. Dit leidt ons ertoe een speciaal soort open blokken te beschouwen die we, ietwat slordig, eindige open blokken zullen noemen.

5.16. Definitie. Zij $X = \prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie topologische ruimten. Een *eindig open blok* in X is een verzameling van de vorm $\prod_{t\in T} U_t$, waarbij U_t een open deelverzameling van X_t is voor elke t èn waarbij voor ten hoogste eindig veel t geldt dat $U_t \neq X_t$.

Nu is het product zelf een eindig open blok en de doorsnede van twee eindige open blokken is weer een eindig open blok. De familie der eindige open blokken is dus een basis voor een topologie op het product. Dit wordt dan de producttopologie.

5.17. Definitie. Zij $X = \prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie topologische ruimten. De *producttopologie* op X is de topologie die de familie der eindige open blokken als basis heeft.

De verzameling X met de producttopologie noemen we het *product* van de familie ruimten $\bigl\{(X_t, \mathcal{T}_t) : t \in T\bigr\}$.

De geldigheid van de volgende stelling hebben we als het ware gewoon geforceerd.

5.18. Stelling. *Zij $X = \prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie topologische ruimten. Dan is elke projectie $\pi_t \colon X \to X_t$ continu. Elke andere topologie die ook de projecties continu maakt is groter dan de producttopologie.*

Het bewijs staat in feite hierboven en is geheel analoog aan dat van Stelling 5.7.

Stelling 5.8, in aangepaste vorm, geldt ook.

5.19. Stelling. *Zij $X = \prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie topologische ruimten. Dan geldt: een afbeelding $f \colon Y \to X$ is continu dan en slechts dan als alle samenstellingen $\pi_t \circ f$ continu zijn.*

Het bewijs levert geen nieuwe problemen op; we gebruiken immers *eindige* open blokken om de topologie te maken.

Tenslotte kunnen we uit een familie afbeeldingen $f_t \colon Y \to X_t$ weer een afbeelding f van Y naar X maken via $f(y) = \bigl(f_t(y)\bigr)_{t\in T}$. We noemen f weer de *diagonaal* van de afbeeldingen $\{f_t\}_{t\in T}$. De notatie blijft dezelfde: $f = \triangle_{t\in T} f_t$.

5.20. Opgave. Bewijs voor elk van de onderstaande eigenschappen dat het product de eigenschap heeft, zodra elke factor deze heeft.

T_0, T_1, T_2, regulier en volledig regulier.

5.21. Opgave. Bewijs: Een aftelbaar product van ruimten met een aftelbare basis heeft zelf ook een aftelbare basis.

5.22. Stelling. *Zij $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ een product van een aftelbare familie metrizeerbare ruimten. Dan is X zelf ook metrizeerbaar.*

Bewijs. We kunnen op elke ruimte X_n een metriek d_n kiezen die de topologie voortbrengt en die begrensd is door 1. We definiëren vervolgens een metriek op X door

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n).$$

Het is eenvoudig na te gaan dat d een metriek is. Het kost iets meer moeite na te gaan dat d de producttopologie voortbrengt.

Zij U open in de producttopologie en $x \in U$; we moeten een $\varepsilon > 0$ vinden zó dat $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Kies eerst een eindig open blok $\prod_n U_n$ met $x \in \prod_n U_n \subseteq U$ en kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $U_n = X_n$ als $n \geqslant N$. Vervolgens bepalen we voor elke $n < N$ een $\varepsilon_n > 0$ zó dat $B_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq U_n$. Als we nu $\varepsilon > 0$ zó kunnen bepalen dat $d(x,y) < \varepsilon$ impliceert dat $d_n(x_n, y_n) < \varepsilon_n$ voor elke $n < N$ dan zijn we klaar (ga na dat dan $B_\varepsilon(x) \subseteq \prod_n U_n$).

Welnu, voor elke n geldt $d_n(x_n, y_n) \leqslant 2^n d(x,y)$; kies dus $\varepsilon = \min\{2^{-n}\varepsilon_n : n < N\}$ Dan geldt: Als $d(x,y) < \varepsilon$ dan geldt $d_n(x_n, y_n) < 2^n \varepsilon \leqslant 2^n 2^{-n} \varepsilon_n = \varepsilon_n$.

Zij nu U een d-open verzameling en $x \in U$; we zoeken een eindig open blok $\prod_n U_n$ zó dat $x \in \prod_n U_n \subseteq U$. Kies eerst $\varepsilon > 0$ zó dat $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ en kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\sum_{n \geqslant N} 2^{-n} < \varepsilon/2$. Definieer

$$U_n = \begin{cases} B_{\varepsilon/2}(x_n) & \text{als } n < N \text{ en} \\ X_n & \text{als } n \geqslant N. \end{cases}$$

Als $y \in \prod_n U_n$ dan geldt

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n<N} 2^{-n} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n \geqslant N} 2^{-n} d_n(x_n, y_n) \\ &< \sum_{n<N} 2^{-n} \varepsilon/2 + \sum_{n \geqslant N} 2^{-n} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

We zien dat $\prod_n U_n \subseteq B_\varepsilon(x)$. □

5.23. Gevolg. *De producten* $[0,1]^\infty$ *en* $\mathbb{R}^\infty$ *zijn metrizeerbaar.*

5.24. Opgave. Bewijs dat een product van een familie samenhangende ruimten weer samenhangend is.

5.25. Opgave. Er is nog een voor de hand liggende manier om een product van een topologie te voorzien. Hier laten we alle open blokken toe, dus willekeurige producten van de vorm $\prod_{t \in T} U_t$ met elke U_t open in X_t. De zo verkregen topologie heet de *doostopologie* (in het engels: *boxtopology*).

a) Ga na dat de familie van alle open blokken inderdaad als basis voor een topologie kan dienen.

Deze topologie heeft niet zulke mooie eigenschappen als de producttopologie. Neem maar eens het product $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, waarbij $X_n = [0,1]$ voor elke n.

b) De diagonaal $\triangle_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Id}_n$ is niet continu; $\mathrm{Id}_n \colon [0,1] \to X_n$ is de identieke afbeelding.
Aanwijzing: De waardenverzameling heeft, als deelruimte van X, de discrete topologie.

c) De doostopologie op X is niet samenhangend en niet metrizeerbaar.

IV

PARACOMPACTHEID

Zoals uit de definitie en het gebruik van compactheid blijkt spelen overdekkingen in vele situaties een belangrijke rol. Nu zijn lang niet alle ruimten compact en het is dus lang niet altijd mogelijk uit elke open overdekking een eindige deeloverdekking te nemen. Wat vaak wel kan is een andere overdekking maken die uit kleinere verzamelingen bestaat; zo'n overdekking zullen we een verfijning noemen. Paracompacte ruimten definiëren we door te eisen dat elke open overdekking een speciaal soort open verfijning heeft.

6. DEFINITIE EN EENVOUDIGE EIGENSCHAPPEN

Voor we de definitie van paracompactheid geven moeten we eerst wat noties met betrekking tot overdekkingen of, algemener, families deelverzamelingen verzamelen.

Families deelverzamelingen

De notie die centraal staat bij de paracompactheid is die van de lokale eindigheid.

6.1. Definitie. Zij X een topologische ruimte en $\mathcal{A}$ een familie deelverzamelingen van X. We noemen $\mathcal{A}$ *lokaal eindig* als elk punt $x \in X$ een omgeving U heeft die maar eindig veel elementen van $\mathcal{A}$ snijdt.

6.2. Voorbeelden.

1. De familie intervallen van de vorm $[n, n+1]$ met $n \in \mathbb{Z}$ is lokaal eindig in $\mathbb{R}$: als $x \in \mathbb{R}$ dan snijdt $(x-1, x+1)$ ten hoogste drie van zulke intervallen.
2. De familie intervallen van de vorm $(2^{-(n+1)}, 2^{-n})$ met $n \in \mathbb{N}$ is niet lokaal eindig: elke omgeving van 0 snijdt oneindig veel van deze intervallen.

Eén van de zeer nuttige eigenschappen van lokaal eindige families is de volgende:

6.3. Lemma. *Als $\mathcal{A}$ een lokaal eindige familie verzamelingen in een topologische ruimte X is dan geldt* $\operatorname{cl}\bigcup\mathcal{A} = \bigcup\{\operatorname{cl} A : A \in \mathcal{A}\}$.

Bewijs. Aangezien het linkerlid het rechterlid omvat hoeven we alleen te bewijzen dat $\operatorname{cl}\bigcup\mathcal{A} \subseteq \bigcup\{\operatorname{cl} A : A \in \mathcal{A}\}$. Zij daartoe $x \in \operatorname{cl}\bigcup\mathcal{A}$ en kies eerst een omgeving U van x en een eindige deelfamilie $\mathcal{A}'$ van $\mathcal{A}$ zó dat $U \cap A = \varnothing$ als $A \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$.

Nu geldt $\bigcup\mathcal{A} = \bigcup\mathcal{A}' \cup \bigcup\mathcal{A}''$ en dus $\operatorname{cl}\bigcup\mathcal{A} = \operatorname{cl}\bigcup\mathcal{A}' \cup \operatorname{cl}\bigcup\mathcal{A}''$. Voorts weten we dat $U \cap \bigcup\mathcal{A}'' = \varnothing$ en dus $x \notin \operatorname{cl}\bigcup\mathcal{A}''$. We zien dat $x \in \operatorname{cl}\bigcup\mathcal{A}'$ maar $\mathcal{A}'$ is eindig en dus volgt $x \in \bigcup\{\operatorname{cl} A : A \in \mathcal{A}'\} \subseteq \bigcup\{\operatorname{cl} A : A \in \mathcal{A}\}$. □

Als we 'eindig' vervangen door 'ten hoogste één' dan krijgen we een sterkere eigenschap.

6.4. Definitie. Zij X een topologische ruimte en $\mathcal{A}$ een familie deelverzamelingen van X. We noemen $\mathcal{A}$ *discreet* als elk punt $x \in X$ een omgeving U heeft die ten hoogste één element van $\mathcal{A}$ snijdt.

De familie in Voorbeeld 6.2.1 is niet discreet; ze is wel in twee discrete families te verdelen: In de ene familie komen de intervallen met een even beginpunt in de andere familie komt de rest.

Tenslotte hebben we de volgende noties nodig:

6.5. Definitie. Een familie $\mathcal{A}$ deelverzamelingen van een topologische ruimte X heet *σ-lokaal eindig* (*σ-discreet*) als $\mathcal{A}$ de vereniging van aftelbaar veel lokaal eindige (discrete) families is.

Elke aftelbare familie is σ-discreet, dus ook de familie in Voorbeeld 6.2.2. Verder zijn er niet veel 'natuurlijke' voorbeelden van σ-lokaal eindige en σ-discrete families; we concentreren ons daarom maar op het gebruik ervan.

Definitie van paracompactheid

Paracompactheid wordt als volgt gedefinieerd.

6.6. Definitie. Een topologische ruimte is *paracompact* als elke open overdekking een lokaal eindige open verfijning heeft.

Om de definitie volledig te maken spreken we snel af wat een verfijning is.

6.7. Definitie. Laat $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ overdekkingen zijn van een verzameling X; we zeggen dat $\mathcal{U}$ een *verfijning* van $\mathcal{V}$ is als voor elke $U \in \mathcal{U}$ een $V \in \mathcal{V}$ bestaat zó dat $U \subseteq V$.

Zo is elke overdekking een verfijning van zichzelf en is een deeloverdekking ook een verfijning. Het is dus meteen duidelijk dat compacte ruimten paracompact zijn. Later zullen we bewijzen dat alle metrische ruimten paracompact zijn, nu beperken we ons even tot $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}$.

6.8. Voorbeeld. De reële rechte $\mathbb{R}$ (met de gewone toplogie) is paracompact. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van $\mathbb{R}$. De familie $\mathcal{V}$ van alle open intervallen van lengte $1/3$ of minder die deelverzameling van een element van $\mathcal{U}$ zijn is een open verfijning van $\mathcal{U}$ (ga na!).

Kies nu, voor elke $n \in \mathbb{Z}$, een eindige deelfamilie $\mathcal{V}_n$ van $\mathcal{V}$ die $[n, n+1]$ overdekt. Dan is $\bigcup_n \mathcal{V}_n$ een open verfijning van $\mathcal{U}$ die ook lokaal eindig is. Immers, elk interval van lengte $1/3$ kan de elementen van ten hoogste twee van de families $\mathcal{V}_n$ snijden.

6.9. Voorbeeld. De Sorgenfrey lijn is paracompact. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van $\mathbb{S}$. We kunnen $\mathcal{U}$ verfijnen door een overdekking $\mathcal{V}$ die bestaat uit intervallen van de vorm $[a, b)$.

We bewijzen eerst dat $\mathcal{V}$ een *aftelbare* deeloverdekking heeft. Beschouw namelijk de familie $\mathcal{W}$ die bestaat uit open intervallen W met rationale eindpunten waarvoor een $V \in \mathcal{V}$ bestaat zó dat $W \subseteq V$. De familie $\mathcal{W}$ is aftelbaar. Kies voor elke $W \in \mathcal{W}$ een element $V_W = [a_W, b_W)$ van $\mathcal{V}$ zó dat $W \subseteq V_W$.

We beweren dat $A = \mathbb{R} \setminus \bigcup\{V_W : W \in \mathcal{W}\}$ aftelbaar is. Zij namelijk $x \in A$ en kies $V_x = [a, b) \in \mathcal{V}$ zó dat $x \in [a, b)$. Merk nu op dat $(a, b) \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ en dus dat $x = a$ (als $y \in (a, b)$ dan is er een interval I met rationale eindpunten zó dat $y \in I \subseteq (a, b)$). De elementen van V die we zo bij elk punt van A kiezen zijn paarsgewijs disjunct en dus is A aftelbaar.

De familie $\mathcal{V}' = \{V_W : W \in \mathcal{W}\} \cup \{V_x : x \in A\}$ is dan een aftelbare deeloverdekking van $\mathcal{V}$.

Laat nu $\{V_n; n \in \mathbb{N}\}$ een aftelling van $\mathcal{V}'$ zijn. Voor elke n stellen we $O_n = V_n \setminus \bigcup_{i<n} V_i$. De familie $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ bestaat uit open verzamelingen, overdekt $\mathbb{S}$ en is paarsgewijs disjunct. Het is dus een *discrete* overdekking van $\mathbb{S}$ die $\mathcal{V}$ en dus $\mathcal{U}$ verfijnt.

6.10. Voorbeeld. Het Niemytzki vlak is niet paracompact. Dit volgt meteen uit Stelling 6.14 maar kan ook rechtstreeks afgeleid worden. Zij namelijk $O = \{(x, y) : y > 0\}$ en beschouw de open overdekking $\{O\} \cup \{B(x, 0, 1) : x \in \mathbb{R}\}$. Deze heeft geen lokaal eindige open verfijning. Ga dit zelf na (zie Voorbeeld 3.27 voor inspiratie).

Wat deelruimten betreft hebben we dezelfde situatie als bij compacte ruimten.

6.11. Stelling. *Een gesloten deelruimte van een paracompacte ruimte is paracompact.*

Bewijs. Zij A een gesloten deelruimte van de paracompacte ruimte X en zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van A. Kies voor elke $U \in \mathcal{U}$ een open verzameling U^+ in X zó dat $U = A \cap U^+$ en maak hiermee een open overdekking $\mathcal{O}$ van X door $X \setminus A$ aan de familie $\{U^+ : U \in \mathcal{U}\}$ toe te voegen. Als nu $\mathcal{V}$ een lokaal eindige openverfijning van $\mathcal{O}$ is dan is $\{V \cap A : V \in \mathcal{V}\}$ een lokaal eindige open *in* A verfijning van $\mathcal{U}$. $\square$

Over willekeurige deelruimten van paracompacte ruimten kunnen we niet zo veel zeggen. We kunnen bewijzen dat elke volledig reguliere ruimte als deelruimte van een compacte Hausdorff ruimte opgevat kan worden; het Niemytzki vlak is dus een niet paracompacte deelruimte van één of andere (para)compacte ruimte.

6.12. Opgave. Bewijs dat elke deelruimte van de Sorgenfrey lijn paracompact is. (Hier blijkt dus dat een paracompacte deelruimte van een Hausdorff ruimte niet noodzakelijk gesloten is.)

Scheidingseigenschappen

We hebben gezien dat compacte Hausdorff ruimten regulier en zelfs normaal zijn. Hetzelfde laten we nu zien voor paracompacte Hausdorff ruimten.

6.13. Stelling. *Elke paracompacte Hausdorff ruimte is regulier.*

Bewijs. Lat X een paracompacte Hausdorff ruimte zijn, F een gesloten deelverzameling en $x \in X \setminus F$. We zoeken disjuncte omgevingen voor x en F.

Kies hiertoe voor elke $y \in F$ een omgeving U_y van y zó dat $x \notin \operatorname{cl} U_y$ (zie Stelling 3.11). Vul de familie $\{U_y : y \in F\}$ aan met $X \setminus F$ tot een open overdekking van X. Neem een lokaal eindige open verfijning $\mathcal{V}$ van deze open overdekking en beschouw de deelcollectie $\mathcal{V}' = \{V \in \mathcal{V} : V \cap F \neq \varnothing\}$.

Ten eerste merken we op dat $F \subseteq O = \bigcup \mathcal{V}'$. Vervolgens merken we op dat $x \notin \operatorname{cl} V$ als $V \in \mathcal{V}'$: Omdat $V \cap F \neq \varnothing$ moet er een $y \in F$ zijn zó dat $V \subseteq U_y$; omdat $x \notin \operatorname{cl} U_y$ geldt zeker dat $x \notin \operatorname{cl} V$. Als we nu Lemma 6.3 toepassen op $\mathcal{V}'$ dan vinden we dat $\operatorname{cl} O = \bigcup \{\operatorname{cl} V : V \in \mathcal{V}'\}$ en dus dat $x \notin \operatorname{cl} O$. Dan is $X \setminus \operatorname{cl} O$ een omgeving van x die disjunct is van de omgeving O van F. $\square$

6.14. Stelling. *Elke paracompacte Hausdorff ruimte is normaal.*

Bewijs. Het bewijs is vrijwel identiek aan dat van Stelling 6.13. Als F en G gesloten en disjunct zijn kiezen we eerst voor elke $y \in F$ een omgeving U_y van y zó dat $G \cap \operatorname{cl} U_y = \varnothing$. Vervolgens nemen we een lokaal eindige open verfijning $\mathcal{V}$ van de overdekking die we krijgen door de familie $\{U_y : y \in F\}$ met $X \setminus F$ aan te vullen. De verzameling O die we weer maken is een omgeving van F en haar afsluiting is disjunct van G. $\square$

We kunnen nog een sterkere normaliteitseigenschap bewijzen.

6.15. Definitie. Een topologische ruimte heet *collectiegewijs normaal* als deze een T_1-ruimte is en als voor elke *discrete* collectie $\mathcal{F}$ gesloten verzamelingen een disjuncte familie $\{O_F : F \in \mathcal{F}\}$ open verzamelingen bestaat zó dat $F \subseteq O_F$ voor elke F.

Een collectie van twee disjuncte gesloten verzamelingen is discreet dus collectiegewijze normaliteit is sterker dan normaliteit. Een voorbeeld van een normale niet collectiegewijs normale ruimte is wat moeilijk te geven, we verwijzen hiervoor naar Engelking [1989, Voorbeeld 5.1.23]

Merk op dat het niet zinvol is te proberen willekeurige *disjuncte* collecties gesloten verzamelingen met open verzamelingen te scheiden: probeer dat maar eens met de familie $\big\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\big\}$.

6.16. Opgave. Bewijs dat in een collectiegewijs normale ruimte voor elke discrete familie gesloten verzamelingen $\mathcal{F}$ een *discrete* familie $\{O_F : F \in \mathcal{F}\}$ open verzamelingen bestaat zó dat $F \subseteq O_F$ voor elke $F \in \mathcal{F}$. *Aanwijzing*: Neem een open verzameling U met $\bigcup \mathcal{F} \subseteq U$ en $\operatorname{cl} U \subseteq \bigcup\{O_F : F \in \mathcal{F}\}$.

6.17. Stelling. *Elke paracompacte Hausdorff ruimte is collectiegewijs normaal.*

Bewijs. Zij $\mathcal{F}$ een discrete collectie gesloten verzamelingen in de paracompacte Hausdorff ruimte X en kies voor elke $x \in X$ een omgeving U_x die ten hoogste één element van $\mathcal{F}$ snijdt. Zij vervolgens $\mathcal{W}$ een lokaal eindige open verfijning van de open overdekking $\{U_x : x \in X\}$.

Definieer voor elke $F \in \mathcal{F}$ de omgeving O_F door

$$O_F = X \setminus \bigcup\{\operatorname{cl} W : W \in \mathcal{W} \text{ en } \operatorname{cl} W \cap F = \varnothing\}.$$

Bewijs nu zelf dat $O_F \cap O_G = \varnothing$ als $F \neq G$. □

7. KARAKTERIZERINGEN VAN PARACOMPACTHEID

We zullen nu enige karakteriseringen van paracompactheid geven; we hebben deze nodig bij onze metrizeringstellingen. Eén van deze karakterizeringen (met behulp van partities van de **1**) is van groot nut voor andere delen van de topologie.

Partities van de 1

Een partitie van de **1** is een familie functies waarvan de som de constante functie **1** is.

7.1. Definitie. Zij X een topologische ruimte. Een familie $\{f_s\}_{s\in S}$ continue functies van X naar $[0,1]$ heet een *partitie van de* **1** op X als $\sum_{s\in S} f_s(x) = 1$ voor elke $x \in X$.

7.2. Opmerking. We moeten goed afspreken wat $\sum_{s\in S} f_s(x)$ betekent. Omdat S niet noodzakelijk aftelbaar is kunnen we $\sum_{s\in S} f_s(x)$ niet als reeks interpreteren. We kunnen wel een beetje naar reeksen kijken: De som van een reeks is de limiet van de partiële sommen en als alle termen van een reeks positief zijn is de som ook gelijk aan het supremum van de partiële sommen. Daarom definiëren we

$$\sum_{s\in S} f_s(x) = \sup\left\{\sum_{s\in F} f_s(x) : F \subseteq S \text{ is eindig}\right\}.$$

We kunnen immers voor elke *eindige* deelverzameling van S de bijbehorende som wel uitrekenen.

7.3. Opgave. Bewijs: als $\{f_s\}_{s\in S}$ een partitie van de **1** is en $x \in X$ dan is $\{s \in S : f_s(x) > 0\}$ aftelbaar (en niet leeg).

Bij een partitie van de **1** hoort een open overdekking van de bijbehorende ruimte: Voor elke s is $O_s = f_s^{-1}\big[(0,1]\big]$ open en de familie $\{O_s\}_{s\in S}$ overdekt X.

Het volgende Lemma suggereert dat partities van de **1** en paracompactheid iets met elkaar te maken hebben.

7.4. Lemma. *Zij $\{f_s\}_{s\in S}$ een partitie van de* **1** *met bijbehorende open overdekking $\mathcal{O} = \{O_s\}_{s\in S}$. Dan heeft $\mathcal{O}$ een lokaal eindige open verfijning $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s\in S}$ met $V_s \subseteq O_s$ voor elke s.*

Bewijs. Definieer om te beginnen een functie $f\colon X \to [0,1]$ door $f(x) = \sup_{s\in S} f_s(x)$. We laten zien dat f continu is. Zij $x \in X$ en kies een $s \in S$ zó dat $f_s(x) > 0$. De verzameling $F = \{t \in S : f_t(x) > f_s(x)/2\}$ is eindig (waarom?) en de verzameling $V = \bigl\{y : \forall t \in F\,[f_t(y) > f_s(y)/2]\bigr\}$ is een omgeving van x. Voor elke $y \in V$ geldt nu $f(y) = \max_{t\in F} f_t(y)$ en deze laatste functie is continu op heel X; de functie f is dus continu in elk punt van V en dus zeker in x.

Definieer nu voor elke s de verzameling V_s door

$$V_s = \left\{x : f_s(x) > \frac{1}{2} f(x)\right\}.$$

Omdat f continu is is V_s open; V_s is duidelijk een deelverzameling van O_s en met een argument als in de vorige alinea volgt dat $\{V_s\}_{s\in S}$ lokaal eindig is. $\square$

Deze stelling is voor ons aanleiding een partitie van de $\mathbf{1}$ *lokaal eindig* te noemen als zijn bijbehorende open overdekking lokaal eindig is.

7.5. Definitie. We zeggen dat een partitie van de $\mathbf{1}$ een open overdekking $\mathcal{U}$ verfijnt als zijn bijbehorende open overdekking een verfijning van $\mathcal{U}$ is.

We krijgen nu onze eerste karakterizering van paracompacte ruimten.

7.6. Stelling. *Voor een Hausdorff ruimte X zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(i) *X is paracompact;*
(ii) *elke open overdekking van X wordt verfijnd door een lokaal eindige partitie van de $\mathbf{1}$ en*
(iii) *elke open overdekking van X wordt verfijnd door een partitie van de $\mathbf{1}$.*

Bewijs. We bewijzen eerst dat (ii) uit (i) volgt. Hiertoe hoeven we alleen te bewijzen dat elke lokaal eindige open overdekking door een partitie van de $\mathbf{1}$ verfijnd wordt. Zij dus $\mathcal{U}$ een lokaal eindige open overdekking van X; we laten eerst zien dat $\mathcal{U}$ 'ingekrompen' kan worden tot een gesloten overdekking $\{F_U : U \in \mathcal{U}\}$ met de eigenschap dat $F_U \subseteq U$ voor elke $U \in \mathcal{U}$.

Kies hiertoe voor elke x een $U_x \in \mathcal{U}$ en een omgeving O_x van x zó dat $\operatorname{cl} O_x \subseteq U_x$ (Stelling 6.13). Zij vervolgens $\mathcal{V}$ een lokaal eindige open verfijning van $\{O_x : x \in X\}$. Kies dan voor elke $V \in \mathcal{V}$ een $x_V \in X$ zó dat $V \subseteq O_{x_V}$; dan geldt ook $\operatorname{cl} V \subseteq U_{x_V}$. Definieer nu voor elke $U \in \mathcal{U}$ de verzameling F_U door

$$F_U = \bigcup\{\operatorname{cl} V : V \in \mathcal{V} \text{ en } U = U_{x_V}\}.$$

Duidelijk geldt $F_U \subseteq U$ en omdat $\mathcal{V}$ lokaal eindig is is elke F_U gesloten.

Omdat X normaal is (Stelling 6.14) kunnen we voor elke U een continue functie g_U van X naar $[0,1]$ kiezen zó dat $g_U(x) = 1$ voor elke $x \in F_U$ en $g_U(x) = 0$ voor elke $x \in X \setminus U$. Definieer $g\colon X \to [0,1]$ door $g(x) = \sum_U g_U(x)$; hier is er geen probleem met oneindige sommen omdat $\mathcal{U}$ lokaal eindig is: Per x zijn er maar eindig veel U met $g_U(x) \neq 0$. Om te bewijzen dat g continu is nemen we $x \in X$ en een omgeving O van x zó dat $\mathcal{U}' = \{U \in \mathcal{U} : U \cap O \neq \varnothing\}$ eindig is. Voor elke $y \in O$ geldt dan $g(y) = \sum_{U\in\mathcal{U}'} g_U(y)$ en deze laatste som is eindig en definieert dus een continue functie. We zien dat g continu is in x.

Omdat $\{F_U : U \in \mathcal{U}\}$ een overdekking van X is weten we zeker dat $g(x) \geqslant 1$ voor elke x. We kunnen dus zonder gevaar voor elke U een functie f_U definiëren door $f_U = g_U/g$. Dan is elke f_U continu, er geldt $\sum_U f_U = \mathbf{1}$ en $f_U^{-1}\bigl[(0,1]\bigr] \subseteq U$ voor elke U. Kortom, $\{f_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ is een lokaal eindige partitie van de $\mathbf{1}$ die $\mathcal{U}$ verfijnt.

Dat (iii) uit (ii) volgt is duidelijk en met behulp van Lemma 7.4 zien we in dat (i) uit (iii) volgt. $\square$

In het bewijs van Stelling 7.6 komt een belangrijk idee voor: Dat van een *precieze verfijning*. Een verfijning $\mathcal{V}$ van een overdekking $\mathcal{U}$ noemen we *precies* als we $\mathcal{V}$ kunnen indiceren als $\{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ zó dat $V_U \subseteq U$ voor elke U. Voor ons is het volgende lemma belangrijk.

7.7. Lemma. *Als een overdekking een lokaal eindige verfijning heeft dan heeft hij ook een precieze lokaal eindige verfijning.*

Bewijs. Stel dat $\mathcal{V}$ een lokaal eindige verfijning van $\mathcal{U}$ is en kies voor elke $V \in \mathcal{V}$ een element U_V van $\mathcal{U}$ zó dat $V \subseteq U_V$. Definieer dan $W_U = \bigcup\{V : U = U_V\}$. Dan is $\mathcal{W} = \{W_U : U \in \mathcal{U}\}$ een precieze verfijning van $\mathcal{U}$.

Om in te zien dat $\mathcal{W}$ lokaal eindig is nemen we $x \in X$ en een omgeving O van x zó dat $\mathcal{V}' = \{V \in \mathcal{V} : V \cap O \neq \varnothing\}$ eindig is. Dan snijdt O alleen de elementen W_{U_V} van $\mathcal{W}$ met $V \in \mathcal{V}'$ en dit zijn er maar eindig veel. □

Andere verfijningen

We zullen nu paracompactheid karakterizeren in termen van verfijningen die niet noodzakelijk open of lokaal eindig zijn.

7.8. Stelling. *Voor een reguliere ruimte X zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(i) *X is paracompact;*
(ii) *elke open overdekking van X heeft een σ-lokaal eindige open verfijning;*
(iii) *elke open overdekking heeft een lokaal eindige verfijning en*
(iv) *elke open overdekking heeft een lokaal eindige gesloten verfijning.*

Bewijs. De implicatie (i) $\Rightarrow$ (ii) is duidelijk.

Om (iii) uit (ii) te bewijzen nemen we een σ-lokaal eindige open overdekking van X, zeg $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$; door eventueel $\mathcal{U}_n$ telkens te vervangen door $\mathcal{U}_n \setminus \bigcup_{i<n} \mathcal{U}_i$ kunnen we er voor zorgen dat de families $\mathcal{U}_n$ disjunct zijn.

Zij nu $O_n = \bigcup \mathcal{U}_n$ en $A_n = O_n \setminus \bigcup_{i<n} O_i$. De familie $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ is een lokaal eindige overdekking van X. Dat $\mathcal{A}$ een overdekking is is duidelijk: $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_n O_n = X$. Dat $\mathcal{A}$ lokaal eindig is zien we als volgt in: Zij $x \in X$ en kies $n \in \mathbb{N}$ met $x \in O_n$; dan is O_n een omgeving van x die maar eindig veel elementen van $\mathcal{A}$ snijdt, namelijk de A_i met $i \leqslant n$.

Vervolgens maken we voor elke n de familie $\mathcal{C}_n = \{U \cap A_n : U \in \mathcal{U}_n\}$; deze familie is lokaal eindig omdat $\mathcal{U}_n$ lokaal eindig is. Tenslotte nemen we $\mathcal{C} = \bigcup_n \mathcal{C}_n$; deze familie is een lokaal eindige verfijning van $\mathcal{U}$.

(i) $\mathcal{C}$ is een overdekking: Zij $x \in X$ en zij n het unieke natuurlijke getal met $x \in A_n$; omdat $x \in O_n$ is er een $U \in \mathcal{U}$ zó dat $x \in U$. Dan $x \in U \cap A_n$ en deze laatste verzameling behoort tot $\mathcal{C}$.
(ii) $\mathcal{C}$ verfijnt $\mathcal{U}$: Dit volgt meteen uit de manier waarop $\mathcal{C}$ is gemaakt.
(iii) $\mathcal{C}$ is lokaal eindig: Zij $x \in X$ en neem n zó dat $x \in A_n$. Dan is O_n een omgeving van x en $O_n \cap C = \varnothing$ als $C \in \mathcal{C}_i$ met $i > n$. Verder heeft x voor elke $i \leqslant n$ een omgeving V_i die slechts eindig veel elementen van $\mathcal{C}_i$ snijdt. De omgeving $O_n \cap \bigcap_{i\leqslant n} V_i$ snijdt dan slechts eindig veel elementen van $\mathcal{C}$.

De implicatie (iii) $\Rightarrow$ (iv) volgt uit het feit dat X regulier is. Immers als $\mathcal{U}$ een open overdekking van X is dan kunnen we eerst een open overdekking $\mathcal{V}$ van X maken zó dat $\{\operatorname{cl} V : V \in \mathcal{V}\}$ een verfijning van $\mathcal{U}$ is (Zie het bewijs van Stelling 7.6). Zij nu $\mathcal{C}$ een lokaal eindige verfijning van $\mathcal{V}$; dan is $\{\operatorname{cl} C : C \in \mathcal{C}\}$ een lokaal eindige *gesloten* verfijning van $\mathcal{U}$.

Tenslotte bewijzen we (iv) $\Rightarrow$ (i). Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X en zij $\mathcal{F}$ een lokaal eindige gesloten verfijning van $\mathcal{U}$. Voor elke $x \in X$ is $V_x = X \setminus \bigcup\{F \in \mathcal{F} : x \notin F\}$ een omgeving van x (Lemma 6.3); merk op dat V_x maar eindig veel elementen van $\mathcal{F}$ snijdt. Zij $\mathcal{G}$ een lokaal eindige gesloten verfijning van $\{V_x : x \in X\}$.

Definieer nu voor $F \in \mathcal{F}$ een omgeving O_F door

$$O_F = X \setminus \bigcup\{G \in \mathcal{G} : F \cap G = \varnothing\}.$$

Kies vervolgens $U_F \in \mathcal{U}$ met $F \subseteq U_F$ en stel $W_F = O_F \cap U_F$. Omdat $F \subseteq W_F$ voor elke F en omdat $\bigcup \mathcal{F} = X$ is $\mathcal{W} = \{W_F : F \in \mathcal{F}\}$ een overdekking van X. Omdat $W_F \subseteq U_F$ voor elke F is $\mathcal{W}$ een verfijning van $\mathcal{U}$. Tenslotte bewijzen we dat $\mathcal{W}$ lokaal eindig is.

Zij $x \in X$; definieer $P_x = X \setminus \bigcup\{G \in \mathcal{G} : x \notin G\}$ net als V_x is ook P_x een omgeving van x. Verder geldt dat $P_x \subseteq \bigcup \mathcal{G}_x$, waar $\mathcal{G}_x = \{G \in \mathcal{G} : x \in G\}$. Nu is $\mathcal{G}_x$ eindig en elke $G \in \mathcal{G}$ snijdt maar eindig veel $F \in \mathcal{F}$. Bedenk nu dat

$$G \cap F \neq \varnothing \text{ dan en slechts dan als } G \cap O_F \neq \varnothing.$$

Hieruit volgt dat $\bigcup \mathcal{G}_x$ en dus P_x slechts eindig veel O_F snijdt en dus zeker maar eindig veel W_F. □

Met behulp van Stelling 7.8 kunnen we een paar extra resultaten bewijzen. Om te beginnen kunnen we van een grote klasse reguliere ruimten laten zien dat ze normaal zijn.

7.9. Definitie. Een ruimte X heet een *Lindelöf ruimte* als elke open overdekking een aftelbare deeloverdekking heeft.

7.10. Voorbeelden.

1. Elke ruimte met een aftelbare basis is Lindelöf: Zij $\mathcal{B}$ een aftelbare basis en zij $\mathcal{U}$ een open overdekking. Beschouw de deelcollectie $\mathcal{B}'$ van $\mathcal{B}$ die bestaat uit al die elementen B waarvoor een $U_B \in \mathcal{U}$ bestaat met $B \subseteq U_B$. Als $x \in X$ en $x \in U \in \mathcal{U}$ dan is er een $B \in \mathcal{B}$ met $x \in B \subseteq U$; deze B zit dan ook in $\mathcal{B}'$. We concluderen dat $X = \bigcup \mathcal{B}'$ en dat dus $\{U_B : B \in \mathcal{B}'\}$ een aftelbare deeloverdekking van $\mathcal{U}$ is.
2. De Sorgenfrey lijn is Lindelöf. Dit is bewezen in Voorbeeld 6.9.
3. Het Niemytzki vlak is niet Lindelöf. Dit volgt uit Stelling 7.11 maar kan ook rechtstreeks ingezien worden: De overdekking uit Voorbeeld 6.10 heeft geen aftelbare deeloverdekking.
4. Elke aftelbare ruimte is Lindelöf. De ruimte uit Voorbeeld 2.19 is aftelbaar en is dus een Lindelöf ruimte maar heeft geen aftelbare basis.

7.11. Stelling. *Elke reguliere Lindelöf ruimte is paracompact.*

Bewijs. Merk op dat een deeloverdekking een verfijning is en dat een aftelbare overdekking zeker σ-lokaal eindig is. □

7.12. Gevolg. *Elke reguliere Lindelöf ruimte is normaal.*

7.13. Opmerking. Het enige moment waarop in het bewijs van Stelling 7.8 de regulariteit van de ruimte gebruikt is is bij de implicatie (iii) ⇒ (iv). Dat de regulariteit hier echt nodig is blijkt als we de ruimte uit Voorbeeld 3.22.1 beschouwen. Dit is een Hausdorff Lindelöf ruimte die niet regulier is. Op grond van implicatie (ii) ⇒ (iii) weten we dat elke open overdekking van deze ruimte een lokaal eindige verfijning heeft maar omdat (iv) paracompactheid impliceert weten we dat er een open overdekking is zonder *gesloten* lokaal eindige verfijning. Probeer zelf zo'n overdekking te vinden.

De metrizeringsstelling van Urysohn

We besluiten dit hoofdstuk met de metrizeringsstelling van Urysohn. Deze zegt dat elke normale ruimte met een aftelbare basis metrizeerbaar is. Omdat elke reguliere ruimte met een aftelbare basis normaal is kunnen we de stelling dus verscherpen tot

7.14. Stelling. *Elke reguliere ruimte met een aftelbare basis is metrizeerbaar.*

Bewijs. Zij X een reguliere ruimte met een aftelbare basis $\mathcal{B}$. We construeren een continue functie $f\colon X \to [0,1]^\infty$ zó dat $f\colon X \to f[X]$ een homeomorfisme is. Omdat $f[X]$ metrizeerbaar is, als deelruimte van een metrizeerbare ruimte, is X dus ook metrizeerbaar.

We bekijken de collectie paren (A, B) elementen van $\mathcal{B}$ met de eigenschap dat $\operatorname{cl} A \subseteq B$. Deze collectie is aftelbaar; zij dus $\bigl\{(A_n, B_n) : n \in \mathbb{N}\bigr\}$ een aftelling. Omdat X normaal is kunnen we voor elke n een continue functie f_n van X naar $[0,1]$ kiezen zó dat $f_n(x) = 1$ als $x \in \operatorname{cl} A_n$ en $f_n(x) = 0$ als $x \in X \setminus B_n$. Zij nu $f = \triangle_n f_n$ de diagonaal van deze familie afbeeldingen.

Omdat voor elke n de compositie $\pi_n \circ f = f_n$ continu is is f ook continu. Vervolgens bewijzen we: Als $F \subseteq X$ gesloten is en $x \in X \setminus F$ dan is er een n zó dat $f_n(x) = 1$ en $f_n(y) = 0$ voor $y \in F$. Dit is eenvoudig: Kies $B \in \mathcal{B}$ met $x \in B \subseteq X \setminus F$ en kies nog een $A \in \mathcal{B}$ met $x \in A$ en $\operatorname{cl} A \subseteq B$. Dan is er een n zó dat $(A, B) = (A_n, B_n)$ en deze n is als gewenst.

Nu volgt dat f injectief is: Als $x \neq y$ pas dan het voorgaande toe op $\{y\}$ en x. Ook volgt dat f een homeomorfisme van X naar $f[X]$ is: Zij namelijk U open in X en $x \in U$; pas het voorgaande toe op $X \setminus U$ en x. Dan geldt $f(x) \in \pi_n^{-1}\bigl[(0,1]\bigr] \cap f[X] \subseteq f[U]$. Dit impliceert dat $f[U]$ open is in $f[X]$.

We concluderen dat f een homeomorfisme van X naar $f[X]$ is. $\square$

Een continue afbeelding $f\colon X \to Y$ met de eigenschap dat $f\colon X \to f[X]$ een homeomorfisme is wordt een *inbedding* genoemd. We zullen later nog een paar metrizeringsstellingen bewijzen door in feite te laten zien dat bepaalde ruimten in metrische ruimten kunnen worden ingebed.

V

METRIZERINGSSTELLINGEN

We zullen in dit deel een begin maken met hetgeen we vanaf het begin al willen, namelijk metrizeerbaarheid karakterizeren. We zullen drie klassieke stellingen bewijzen; die van Nagata en Smirnov, die van Bing en die van Alexandroff en Urysohn. Van de eerste twee stellingen kunnen we voorlopig alleen één richting bewijzen, de andere richting komt in het volgende deel als we iets over het Keuzeaxioma geleerd hebben.

8. DE METRIZERINGSSTELLING VAN NAGATA EN SMIRNOV

We beginnen meteen maar met de formulering van de stelling.

8.1. Stelling (Nagata en Smirnov). *Een topologische ruimte is metrizeerbaar dan en slechts dan als ze regulier is en een σ-lokaal eindige basis heeft.*

Deze stelling is duidelijk een generalisatie van de Metrizeringsstelling van Urysohn: Een aftelbare basis is σ-lokaal eindig. Het bewijs dat we hier zullen geven lijkt op dat van Stelling 7.14; we zoeken een metrische ruimte waar we onze ruimte in kunnen inbedden. Het bewijs dat elke metrizeerbare ruimte een σ-lokaal eindige basis heeft stellen we uit tot het volgende deel.

Hilbertruimten

Uit de Voortgezette Analyse kennen we de separabele Hilbertruimte ℓ_2: Dit is de verzameling van alle kwadratisch convergente reeksen $\left\{(x_n)_n : \sum x_n^2 < \infty\right\}$ met als metriek

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}.$$

We zullen iets algemenere Hilbertruimten bekijken. Hiertoe herinneren we ons dat we ℓ_2 konden beschouwen als $\mathcal{L}_2(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \tau)$, waarbij $2^{\mathbb{N}}$ de machtsverzameling van $\mathbb{N}$ is en τ de telmaat. We gebruiken dit idee om voor elke verzameling een ℓ_2 te definiëren.

8.2. Definitie. Zij A een verzameling. Met $\ell_2(A)$ noteren we ruimte $\mathcal{L}_2(A, 2^A, \tau)$ en we noemen $\ell_2(A)$ de Hilbertruimte bepaald door A.

De gewone ℓ_2 is dus $\ell_2(\mathbb{N})$; we houden de notatie ℓ_2 voor deze ruimte aan. We zullen nog eens rustig nagaan dat $\ell_2(A)$ een Hilbertruimte is, dat wil zeggen een inwendig-productruimte waarvan de norm volledig is.

8.3. Lemma. *Als $x \in \ell_2(A)$ dan is $\operatorname{supp}(x) = \{a \in A : x_a \neq 0\}$ aftelbaar.*

Bewijs. We beweren dat voor elke $\varepsilon > 0$ de verzameling $A_\varepsilon = \{a \in A : |x_a| \geqslant \varepsilon\}$ eindig is. Als dit vastgesteld is zijn we klaar want dan is $\operatorname{supp}(x)$ — als aftelbare vereniging van eindige verzamelingen — ook aftelbaar.

Welnu, zij $M = \int_A x^2\,d\tau$ en merk op dat $\int_{A_\varepsilon} x^2\,d\tau \leqslant M$. Verder geldt $\int_F x^2\,d\tau \geqslant |F|\,\varepsilon^2$ voor elke eindige deelverzameling F van A_ε; hier geven we met $|F|$ het aantal elementen van F aan. We zien dat $|F| \leqslant M/\varepsilon^2$ voor elke eindige deelverzameling F van A_ε; dan kan A_ε dus ook maar ten hoogste M/ε^2 elementen hebben. □

Omdat voor $x \in \ell_2$ geldt dat $\int_{\mathbb{N}} x^2\, d\tau = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2$ gebruiken we in het geval van willekeurige verzamelingen ook de somnotatie. Dus

$$\sum_{a\in A} x_a = \int_A x\, d\tau.$$

Nu kunnen we in $\ell_2(A)$ een inwendig product definiëren:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{a\in A} x_a y_a$$

en de norm van een element van $\ell_2(A)$ definiëren we als

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

We verifiëren dat $\ell_2(A)$ een vectorruimte is en een volledige inwendig-productruimte.

8.4. Lemma. *Als $x, y \in \ell_2(A)$ dan convergeert $\sum_{a\in A} x_a y_a$ absoluut en is $x + y$ een element van $\ell_2(A)$.*

Bewijs. Zij $B = \operatorname{supp}(x) \cup \operatorname{supp}(y)$, dan is B aftelbaar en $x \restriction B$ en $y \restriction B$ zijn elementen van $\ell_2(B)$. Maar $\ell_2(B)$ is in feite hetzelfde als ℓ_2 en voor ℓ_2 is dit lemma reeds bewezen. Nu gebruiken we dat $\sum_{a\in A} x_a y_a = \sum_{a\in B} x_a y_a$ en $\sum_{a\in A}(x_a + y_a)^2 = \sum_{a\in B}(x_a + y_a)^2$. □

8.5. Lemma. *De ruimte $\ell_2(A)$ is volledig.*

Bewijs. Het idee is hetzelfde: Als $(x_n)_n$ een Cauchy-rij is bekijk dan $B = \bigcup_n \operatorname{supp}(x_n)$; deze verzameling is aftelbaar en $\ell_2(B)$ is dus volledig. De rij $(x_n \restriction B)_n$ convergeert in $\ell_2(B)$, zeg naar z. Als we z met nullen aanvullen tot een element van $\ell_2(A)$ dan is dat element de limiet van de oorspronkelijke rij. □

Het bewijs van de stelling

We zullen nu de helft van Metrizeringsstelling van Nagata en Smirnov bewijzen. Zij dus X een reguliere ruimte met een σ-lokaal eindige basis $\mathcal{B}$. Schrijf $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$, waarbij iedere $\mathcal{B}_n$ een lokaal eindige familie is. Het bewijs verloopt in een paar stappen.

STAP 1. X is paracompact. Dit volgt uit Stelling 7.8. Immers, als $\mathcal{U}$ een open overdekking van X is dan is $\bigcup_n \mathcal{C}_n$ een σ-lokaal eindige open verfijning van $\mathcal{U}$, waar $\mathcal{C}_n = \bigl\{B \in \mathcal{B}_n : \exists U \in \mathcal{U}\,(B \subseteq U)\bigr\}$.

STAP 2. Voor elke niet lege open deelverzameling O van X bestaat een continue functie $f\colon X \to [0,1]$ met de eigenschap dat $O = \{x : f(x) > 0\}$. Omdat X normaal is is het voldoende te laten zien dat O een F_σ-verzameling is (zie Opgave 3.33).

Welnu voor $n \in \mathbb{N}$ nemen we $F_n = \bigcup\{\operatorname{cl} B : B \in \mathcal{B}_n, \operatorname{cl} B \subseteq O\}$; dan is F_n een deelverzameling van O en omdat $\mathcal{B}_n$ lokaal eindig is is F_n gelijk aan $\operatorname{cl}\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}_n, \operatorname{cl} B \subseteq O\}$ en dus gesloten.

Verder is X regulier en dus is er voor elke $x \in O$ een $n \in \mathbb{N}$ met een $B \in \mathcal{B}_n$ zó dat $x \in B$ en $\operatorname{cl} B \subseteq O$; dan geldt $x \in F_n$. Conclusie $O = \bigcup_n F_n$ is een F_σ-verzameling.

STAP 3. Kies voor elke $B \in \mathcal{B}$ een continue functie $f_B\colon X \to [0,1]$ zó dat $B = \{x : f_B(x) > 0\}$. Definieer voor elke n de functie g_n door

$$g_n(x) = \sum_{B\in\mathcal{B}_n} f_B^2(x).$$

Omdat $\mathcal{B}_n$ lokaal eindig is staat hier voor elke x een eindige som en is g_n continu.

Stap 4. We definiëren een afbeelding $f\colon X \to \ell_2(\mathcal{B})$ als volgt: $f(x) = y$ waarbij

$$y_B = \frac{1}{n}\frac{f_B(x)}{\sqrt{1+g_n(x)}} \text{ als } B \in \mathcal{B}_n.$$

In de eerste plaats, omdat $1 + g(n(x) \geqslant 1$ is elke coördinaat goed gedefinieerd. Vervolgens, voor een vaste n geldt

$$\sum_{B\in\mathcal{B}_n} y_B^2 = \frac{1}{n^2}\frac{g_n(x)}{1+g_n(x)} < \frac{1}{n^2}$$

(merk op dat deze som eindig is). Hieruit leiden we tenslotte af dat

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} y_B^2 < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

dus $y \in \ell_2(\mathcal{B})$.

Stap 5. De functie f is injectief. Kies maar $x \neq u$ in X met $y = f(x)$ en $v = f(u)$. Er is een $B \in \mathcal{B}$ zo dat $x \in B$ en $u \notin B$; dan is $f_B(x) > 0 = f_B(u)$ en dus $y_B \neq v_B$.

Stap 6. De functie f is continu. Zij $x \in X$, $y = f(x)$ en $\varepsilon > 0$; we zoeken een omgeving U van x zó dat $f[U] \subseteq B_\varepsilon(y)$.

Kies een $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\sum_{n>N}\frac{1}{n^2} < \varepsilon^2/2$. Omdat elke $\mathcal{B}_n$ lokaal eindig is is er één omgeving U van x die slechts eindig veel $B \in \mathcal{B}_n$ snijdt voor $n \leqslant N$. Op deze omgeving definieert

$$h(u) = \sum_{n\leqslant N}\sum_{B\in\mathcal{B}_n}\frac{1}{n^2}\left(\frac{f_B(x)}{\sqrt{1+g_n(x)}} - \frac{f_B(u)}{\sqrt{1+g_n(u)}}\right)^2$$

een continue functie van u; de som is namelijk eindig.

Omdat $h(x) = 0$ is er dus een omgeving O van x zó dat $h(u) < \varepsilon^2/2$ voor alle $u \in O$. Voor $u \in O$ — met $v = f(u)$ — geldt nu

$$\begin{aligned}
\|y - v\|_2^2 &= h(u) + \sum_{n>N}\sum_{B\in\mathcal{B}_n}\frac{1}{n^2}\left(\frac{f_B(x)}{\sqrt{1+g_n(x)}} - \frac{f_B(u)}{\sqrt{1+g_n(u)}}\right)^2 \\
&\leqslant h(u) + \sum_{n>N}\frac{1}{n^2} \\
&< \varepsilon^2
\end{aligned}$$

en dus $\|y - v\|_2 < \varepsilon$.

Stap 7. De functie f is een homeomorfisme van X op $f[X]$. We moeten dus bewijzen: als U open is in X dan is $f[U]$ open in $f[X]$.

Zij dus $x \in U$ met $y = f(x)$; we zoeken een $\varepsilon > 0$ zó dat $B_\varepsilon(y) \cap f[X] \subseteq f[U]$. Kies hiertoe een $B \in \mathcal{B}$ met $x \in B$ en $\operatorname{cl} B \subseteq U$. Neem n zó dat $B \in \mathcal{B}_n$.

Zij nu $u \in X \setminus U$ met $v = f(u)$. Dan geldt $y_B > 0$ en $v_B = 0$. We concluderen: Als $v \in f[X] \setminus f[U]$ dan geldt $\|y - v\|_2 \geqslant |y_B - v_B| = y_B$. Keren we dit om dan zien we dat we $\varepsilon = y_B$ kunnen nemen.

Hiermee is het bewijs voltooid dat een reguliere ruimte met een σ-lokaal eindige basis metrizeerbaar is; we hebben de ruimte in een geschikt gekozen Hilbertruimte in kunnen bedden.

9. DE METRIZERINGSSTELLINGEN VAN BING

In zijn artikel van [1951] bewees R. H. Bing twee metrizeringsstellingen. Eén van deze lijkt erg op die van Nagata en Smirnov; we behandelen deze eerst.

De eerste metrizeringsstelling

9.1. Stelling (Bing). *Een topologische ruimte is metrizeerbaar dan en slechts dan als ze regulier is en een σ-discrete basis heeft.*

Aan de ene kant is dit een verzwakking van de Stelling van Nagata en Smirnov — een σ-discrete basis is zeker σ-lokaal eindig — maar aan de andere kant een versterking: Er wordt geclaimd dat elke metrizeerbare ruimte een σ-discrete basis heeft. We bewaren het bewijs dat elke metrizeerbare ruimte een σ-discrete basis heeft weer tot later en we concentreren ons op het bewijs dat elke reguliere ruimte met een σ-discrete basis metrizeerbaar is. Natuurlijk volgt dit meteen uit de Stelling van Nagata en Smirnov maar we zullen een rechtstreeks bewijs geven.

Het bewijs verloopt weer in een aantal stappen. Zij X een reguliere ruimte met een σ-discrete basis $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$ (elke $\mathcal{B}_n$ is een discrete familie).

Stap 1. Voor elke open verzameling O is er een continue functie $f\colon X \to [0,1]$ zó dat $O = \{x : f(x) > 0\}$. Dit volgt net als in het bewijs van de Stelling van Nagata en Smirnov.

Stap 2. Kies voor elke $B \in \mathcal{B}$ een continue functie $f_B\colon X \to [0,1]$ zó dat $B = \{x : f_B(x) > 0\}$.

Stap 3. Definieer voor elke n een pseudometriek d_n* op X als volgt:

$$d_n(x,y) = \sum_{B \in \mathcal{B}_n} \bigl|f_B(x) - f_B(y)\bigr|$$

Merk op dat hier per x en y ten hoogste twee termen staan die ongelijk zijn aan 0; we weten dus dat $d_n(x,y) \leqslant 2$ voor alle x en y. Verder is makkelijk na te gaan dat d_n aan alle eisen voor een metriek voldoet, behalve dat $d_n(x,y) = 0$ voor $x, y \notin \bigcup \mathcal{B}_n$.

Stap 4. Definieer nu een metriek d op X door

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x,y).$$

Deze functie is in ieder geval een pseudometriek. Als $x \neq y$ dan zijn er een n en een $B \in \mathcal{B}_n$ zó dat $x \in B$ en $y \notin B$. Dan volgt dat

$$d(x,y) \geqslant 2^{-n} d_n(x,y) \geqslant 2^{-n} \bigl|f_B(x) - f_B(y)\bigr| = 2^{-n} f_B(x) > 0,$$

zodat d inderdaad een metriek is.

Stap 5. Elke d-open verzameling is open in de topologie van X. Zij U een d-open verzameling, zij $x \in U$ en zij $\varepsilon > 0$ zó dat $B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Kies eerst een $N \in \mathbb{N}$ zó dat $2 \sum_{n > N} 2^{-n} < \varepsilon/2$. De functie h gedefinieerd door

$$h(y) = \sum_{n \leqslant N} 2^{-n} d_n(x,y) = \sum_{n \leqslant N} 2^{-n} \sum_{B \in \mathcal{B}_n} \bigl|f_B(x) - f_B(y)\bigr|$$

---

* Een *pseudometriek* is een metriek waar de eis “als $d(x,y) = 0$ dan $x = y$” weggelaten is.

is continu en $h(x)=0$; er is dus een omgeving O van x zó dat $h(y)<\varepsilon/2$ voor elke $y\in O$. We zien: Als $y\in O$ dan geldt

$$d(x,y)\leqslant h(y)+2\sum_{n>N}2^{-n}<\varepsilon,$$

met andere woorden $y\in O\subseteq B_\varepsilon(x)\subseteq U$.

Stap 6. Elke open verzameling van X is ook d-open. Zij dus U open en $x\in U$; we zoeken een $\varepsilon>0$ zó dat $B_\varepsilon(x)\subseteq U$.

Kies een n en een $B\in\mathcal{B}_n$ zó dat $x\in B$ en $B\subseteq U$. Als nu $y\in X\setminus B$ dan geldt $\bigl|f_B(x)-f_B(y)\bigr|=f_B(x)>0$. Verder geldt dan

$$d(x,y)\geqslant 2^{-n}d_n(x,y)\geqslant 2^{-n}\bigl|f_B(x)-f_B(y)\bigr|=2^{-n}f_B(x).$$

Met andere woorden: Als $d(x,y)<2^{-n}f_B(x)$ dan $y\in B$. We kunnen dus $\varepsilon=2^{-n}f_B(x)$ nemen, dan $B_\varepsilon(x)\subseteq B\subseteq U$.

Het bewijs is in wezen natuurlijk niet veel anders dan het bewijs van de Stelling van Nagata en Smirnov; we hebben bijna dezelfde overwegingen gebruikt. Zo komen bijvoorbeeld de bewijzen van “f is continu” en van “elke d-open verzameling is open” op hetzelfde neer. We zullen nu laten zien dat we het bovenstaande bewijs ook kunnen gebruiken om de ruimte X in een metrische ruimte in te bedden. Hiertoe moeten we een nieuwe metrische ruimte invoeren.

9.2. Definitie. Zij A een verzameling en zij $E_A=\{\mathbf{0}\}\cup(0,1]\times A$. Definieer een metriek op E_A als volgt: $d\bigl(\mathbf{0},(x,a)\bigr)=x$ voor elke x en elke a en

$$d\bigl((x,a),(y,b)\bigr)=\begin{cases}x+y & \text{als } a\neq b\\ x-y & \text{als } a=b.\end{cases}$$

Verder definiëren we $d(x,x)=0$ voor elk punt x van E_A. De zo verkregen metrische ruimte noemen we de *egel* met A stekels (in het Engels: *hedgehog*).

We hebben voor elke $a\in A$ een kopie van het interval $[0,1]$ (een stekel) genomen en deze bij $\mathbf{0}$ aan elkaar geplakt. Als twee punten op dezelfde stekel liggen wordt hun afstand op die stekel gemeten, anders meten we de afstand via het punt $\mathbf{0}$.

9.3. Opgave. Bewijs dat d inderdaad een metriek op E_A definieert.

We zullen nu zien hoe het bovengegeven bewijs de ruimte X in feite in een product van egels inbed. We gebruiken de functies f_B om de inbedding te maken.

Voor elke n nemen we de egel $E_n=E_{\mathcal{B}_n}$ en we definiëren $f_n\colon X\to E_n$ door

$$f_n(x)=\begin{cases}\bigl(f_B(x),B\bigr) & \text{als } x\in B\in\mathcal{B}_n\\ \mathbf{0} & \text{als } x\notin\bigcup\mathcal{B}_n.\end{cases}$$

Het feit dat $\mathcal{B}_n$ een discrete familie is garandeert dat f_n goed gedefinieerd en continu is.

De diagonaal $f=\triangle_n f_n\colon X\to\prod_n E_n$ is dan de gewenste inbedding.

9.4. Opgave. Verifieer dat elke f_n inderdaad continu is en dat f een inbedding is.

De tweede metrizeringsstelling

Om deze stelling te kunnen formuleren moeten we een paar nieuwe noties invoeren. Om te beginnen een paar dingen die met overdekkingen te maken hebben.

9.5. Definitie. Zij $\mathcal{A}$ een overdekking van de verzameling X en $B \subseteq X$; dan noemen we $\mathrm{St}(B, \mathcal{A}) = \bigcup\{A \in \mathcal{A} : A \cap B \neq \varnothing\}$ de *ster* van B met betrekking tot $\mathcal{A}$.

Als $x \in X$ dan korten we $\mathrm{St}\bigl(\{x\}, \mathcal{A}\bigr)$ natuurlijk af met $\mathrm{St}(x, \mathcal{A})$.

We zullen later zien hoe we met behulp van sterren nieuwe karakterizeringen van paracompactheid kunnen geven. De tweede stelling van Bing gebruikt sterren om metrizeerbaarheid te karakterizeren. Hiertoe maken we de volgende definitie.

9.6. Definitie. Zij X een topologische ruimte. Een *ontwikkeling* voor X is een rij $(\mathcal{U}_n)_n$ van open overdekkingen van X zó dat voor elke $x \in X$ de familie $\bigl\{\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\bigr\}$ een lokale basis in x is. Een reguliere ruimte met een ontwikkeling noemen we een *Moore ruimte*.

9.7. Voorbeeld. Het natuurlijke voorbeeld van een ontwikkeling krijgen we als we in een metrische ruimte voor elke n de overdekking met bollen van straal 2^{-n} nemen. Ga zelf maar na dat $\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n) \subseteq B_{2^{-n+1}}(x)$ voor elke x.

De tweede stelling van Bing luidt nu:

9.8. Stelling (Bing). *Een ruimte X is metrizeerbaar dan en slechts dan als zij een collectiegewijs normale Moore ruimte is.*

Van deze stelling kunnen we voorlopig ook maar één richting bewijzen, namelijk dat een metrizeerbare ruimte collectiegewijs normaal en Moore is. Dat laatste hebben we net in Voorbeeld 9.7 gedaan. De collectiegewijze normaliteit bewijzen we nu.

9.9. Lemma. *Elke metrische ruimte is collectiegewijs normaal.*

Bewijs. Zij $\mathcal{F}$ een discrete collectie gesloten verzamelingen in de metrische ruimte X. Voor $F \in \mathcal{F}$ noteren we $\bigcup\bigl(\mathcal{F} \setminus \{F\}\bigr)$ met F'. Definieer nu $O_F = \bigl\{x \in X : d(x, F) < d(x, F')\bigr\}$.

Laat F en G verschillende elementen van $\mathcal{F}$ zijn. Dan zijn O_F en O_G disjunct: Als $x \in O_F$ dan geldt $d(x, G') \leqslant d(x, F) < d(x, F') \leqslant d(x, G)$, dus zeker $x \notin O_G$. $\square$

10. DE METRIZERINGSSTELLING VAN ALEXANDROFF EN URYSOHN

De laatste metrizeringsstelling die we behandelen is die van Alexandroff en Urysohn. Deze is van een ander karakter dan de voorgaande stellingen. We gebruiken geen paracompactheid en normaliteit om continue functies te maken; we maken de metriek in feite met de hand. We gebruiken hierbij een speciaal soort ontwikkeling.

10.1. Definitie. Een ontwikkeling $(\mathcal{U}_n)_n$ heet *regulier* als voor elke n en voor elk tweetal elementen U en V van $\mathcal{U}_{n+1}$ met $U \cap V \neq \varnothing$ een element W van $\mathcal{U}_n$ bestaat zó dat $U \cup V \subseteq W$. We noemen in dat geval $\mathcal{U}_{n+1}$ een reguliere verfijning van $\mathcal{U}_n$.

Intuïtief gesproken zijn in een reguliere ontwikkeling de elementen van $\mathcal{U}_{n+1}$ ongeveer half zo groot als die van $\mathcal{U}_n$.

De ontwikkeling die we in Voorbeeld 9.7 hebben bekeken is regulier. Dit geeft ons de helft van de volgende stelling.

10.2. Stelling (Alexandroff-Urysohn). *Een ruimte is metrizeerbaar dan en slechts dan als zij een T_0-ruimte is met een reguliere ontwikkeling.*

Bewijs. Zij X een T_0-ruimte met een reguliere ontwikkeling $(\mathcal{U}_n)_n$.

We mogen aannemen dat de ontwikkeling iets beter dan regulier is, namelijk: Voor elke n geldt als $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{U}_{n+1}$ en de doorsneden $U_1 \cap U_2$ en $U_2 \cap U_3$ zijn niet leeg dan is er een $U \in \mathcal{U}_n$ zó dat $U_1 \cup U_2 \cup U_3 \subseteq U$. Zo'n ontwikkeling kunnen we maken door van de oorspronkelijke ontwikkeling de even termen te nemen: Als U_1, U_2 en U_3 uit $\mathcal{U}_{n+2}$ komen en aan de voorwaarden voldoen vinden we eerst $V_1, V_2 \in \mathcal{U}_{n+1}$ met $U_1 \cup U_2 \subseteq V_1$ en $U_2 \cup U_3 \subseteq V_2$ en vervolgens een $U \in \mathcal{U}_n$ met $V_1 \cup V_2 \subseteq U$.

Vervolgens merken we op dat er voor elk tweetal verschillende punten x en y een grootste natuurlijk getal n is waarvoor $y \in \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n)$. Immers, de ruimte X is een T_0-ruimte en dus geldt, bijvoorbeeld, $y \notin \mathrm{cl}\{x\}$. Kies dan een m zó dat $\mathrm{St}(y, \mathcal{U}_m) \cap \{x\} = \varnothing$. Voorts geldt voor elke n dat $\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n)$. Door deze twee opmerkingen te combineren vinden we dat er een n is zó dat $y \notin \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_i)$ voor $i > n$ en $y \in \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_i)$ voor $i \leqslant n$. Dit is het gezochte natuurlijke getal; we noteren dit met $n(x, y)$.

We definiëren nu

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 2^{-n(x,y)} & \text{als } x \neq y \text{ en} \\ 0 & \text{als } x = y. \end{cases}$$

Aan de waarde van $\rho(x, y)$ kunnen we dus zien hoe dicht x en y bij elkaar liggen in termen van de ontwikkeling $(\mathcal{U}_n)_n$. We gebruiken ρ om een metriek d te definiëren:

$$d(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} \rho(x_{i-1}, x_i) : \ x_0, \ldots, x_k \in X \text{ en } x_0 = x \text{ en } x_k = y \right\}.$$

We bekijken dus alle mogelijke eindige paden van x naar y en sommeren telkens de ρ-afstanden tussen opvolgende punten; het infimum van de zo verkregen getallen is de 'echte' afstand tussen x en y.

We bewijzen eerst twee ongelijkheden voor ρ en d:

$$\frac{1}{2}\rho(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant \rho(x, y). \tag{$*$}$$

De ongelijkheid $d(x, y) \leqslant \rho(x, y)$ is duidelijk: Het pad met $x_0 = x$ en $x_1 = y$ doet ook mee.

De andere ongelijkheid is iets subtieler. We bewijzen: Voor elk $k+1$-tal punten x_0, x_1, $\ldots$, x_k geldt

$$\rho(x_0, x_k) \leqslant 2 \sum_{i=1}^{k} \rho(x_{i-1}, x_i).$$

Voor $k = 1$ is er niets te bewijzen en omdat $\rho(x, y) \leqslant 1$ voor alle x en y kunnen we aannemen dat $a = \sum_{i=1}^{k} \rho(x_{i-1}, x_i)$ niet groter dan $1/2$ is en dat $k > 1$.

Omdat $k > 1$ kunnen we concluderen dat $\rho(x_0, x_1) \leqslant a/2$ of $\rho(x_{k-1}, x_k) \leqslant a/2$ (a is de som van tenminste twee termen), we nemen aan dat $\rho(x_0, x_1) \leqslant a/2$. Kies de maximale j waarvoor $\sum_{i \leqslant j} \rho(x_{i-1}, x_i) \leqslant a/2$ en merk op dat $j < k$. Omdat blijkbaar $\sum_{i \leqslant j+1} \rho(x_{i-1}, x_i) > a/2$ moet wel gelden dat $\sum_{i \geqslant j+2} \rho(x_{i-1}, x_i) \leqslant a/2$. We concluderen dat

$$\begin{aligned} \rho(x_0, x_j) &\leqslant a && \text{(inductieveronderstelling)} \\ \rho(x_j, x_{j+1}) &\leqslant a && \text{(dit is een term in de som)} \\ \rho(x_{j+1}, x_k) &\leqslant a && \text{(inductieveronderstelling)} \end{aligned}$$

Kies nu het kleinste natuurlijke getal l met $2^{-l} \leqslant a$; dan geldt ook $\rho(x_0, x_j) \leqslant 2^{-l}$, $\rho(x_j, x_{j+1}) \leqslant 2^{-l}$ en $\rho(x_{j+1}, x_k) \leqslant 2^{-l}$ en dus zijn er U_1, U_2 en U_3 in $\mathcal{U}_l$ zó dat $x_0, x_j \in U_1$, $x_j, x_{j+1} \in U_2$

en $x_{j+1}, x_k \in U_3$. Kies nu een $V \in \mathcal{U}_{l-1}$ met $U_1 \cup U_2 \cup U_3 \subseteq V$; dan geldt $x_0, x_k \in V$ en dus $n(x_0, x_k) \leqslant l - 1$. Dit betekent dat $\rho(x_0, x_k) \leqslant 2^{-l+1} \leqslant 2a$, hetgeen te bewijzen was.

We kunnen nu bewijzen dat d een metriek is en dat d de topologie van X voortbrengt. Dat $d(x,y) \geqslant 0$ is duidelijk; uit $(*)$ volgt dat $d(x,y) = 0$ dan en slechts dan als $\rho(x,y) = 0$ dan en slechts dan als $x = y$. De symmetrie van d volgt uit de definitie en de driehoeksongelijkheid $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ volgt door paden van x naar z via y te beschouwen.

Dat d de topologie voortbrengt volgt ook door $(*)$ te gebruiken. Immers, als $y \in \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{n+1})$ dan geldt $\rho(x,y) \leqslant 2^{-n-1}$ en dus $d(x,y) \leqslant 2^{-n-1} < 2^{-n}$; we zien dat $\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq B_{2^{-n}}(x)$ voor elke x en elke n. Hieruit volgt dat elke d-open verzameling open is.

Omgekeerd, als $d(x,y) < 2^{-n}$ dan geldt $\rho(x,y) < 2^{-n+1}$ en dus $\rho(x,y) \leqslant 2^{-n}$, zodat $y \in \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n)$; we concluderen dat $B_{2^{-n}}(x) \subseteq \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n)$ voor elke x en elke n. Elke open verzameling is dus ook open ten opzichte van d. $\square$

10.3. Opmerking. Het bovengegeven bewijs geeft eigenlijk iets meer. Neem aan dat $(\mathcal{U}_n)_n$ een rij overdekkingen is zó dat telkens $\mathcal{U}_{n+1}$ een reguliere verfijning van $\mathcal{U}_n$ is; dan bestaat een pseudometriek d zó dat voor elke x en elke n het volgende geldt

$$\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{2n+2}) \subseteq B_{2^{-n}}(x) \subseteq \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{2n}).$$

Dit feit zullen we later nog een paar keer gebruiken.

VI

VERDERE BEWIJZEN

We bewijzen hier de delen van de metrizeringsstellingen van Nagata-Smirnov-Bing die we in het vorige deel nog niet hebben gegeven. Wat we in feite nodig hebben zijn de volgende drie stellingen: 1) elke metrische ruimte is paracompact (voor de Nagata-Smirnov stelling), 2) elke open overdekking van een metrische ruimte heeft een σ-discrete open verfijning (voor de eerste stelling van Bing) en 3) elke collectiegewijs normale Moore ruimte is paracompact (voor de tweede stelling van Bing). We zullen deze stellingen bewijzen nadat we enige opmerkingen hebben gemaakt over het Keuzeaxioma en daarmee verwante uitspraken. Met behulp van het Keuzeaxioma zullen we ook laten zien dat paracompactheid equivalent is met een overdekkingseigenschap die wat dichter bij metrizeerbaarheid ligt.

11. HET KEUZEAXIOMA

Het *Keuzeaxioma* is de volgende uitspraak.

11.1. Het Keuzeaxioma. Als $\{X_t : t \in T\}$ een niet-lege familie van niet-lege verzamelingen is dan is het product $\prod_{t\in T} X_t$ niet leeg.

Dit lijkt op het intrappen van een open deur maar is het echt niet. Het punt is dat er geen *manier* gegeven wordt om ook maar *een* individueel punt in $\prod_{t\in T} X_t$ te maken.

11.2. Opmerking. Het Keuzeaxioma is geen stelling, we zullen niet proberen hem te bewijzen en sinds de zestiger jaren weten we dat we het ook niet kunnen. Evenmin kunnen we bewijzen dat het Keuzeaxioma fout is.

Om deze zinnen een beetje toe te lichten het volgende. Tot het begin van deze eeuw werd 'verzameling' gedefinieerd als 'een stel dingen bij elkaar' en er werd, ondanks deze nietszeggende definitie, belangrijk werk mee gedaan. Op een gegeven moment bleek dat deze onbeperkte definitie tot paradoxen leidde: 'de verzameling van alle verzamelingen is geen verzameling'.

Toen werd het tijd na te denken wat men wel en niet met verzamelingen doen. Het resultaat van dit denkwerk was een stel leefregels (axioma's) waar je je bij het werken met verzamelingen aan moet houden.

Zo mag je, gegeven twee verzamelingen x en y een nieuwe verzameling maken die alleen x en y als elementen heeft: $\{x, y\}$.

Een ander axioma zegt dat bij elke verzameling x een verzameling z bestaat zó dat $z = \bigcup x$.

Uit deze twee kunnen we afleiden dat $x \cup y$ bestaat voor elk tweetal verzamelingen x en y: er geldt immers $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$.

Als je je aan deze (overigens vrij natuurlijke) regels houdt zal je paradoxen als 'de verzameling van alle verzamelingen' niet meer tegenkomen; die collectie is te groot om door de axioma's beschreven te worden.

Het Keuzeaxioma neemt tussen de axioma's een bijzondere plaats in omdat het, in tegenstelling tot de andere, duidelijk niet-constructief is. Net als bij het Parallellenpostulaat van Euclides in de meetkunde is in de verzamelingenleer heel hard geprobeerd het Keuzeaxioma uit de andere axioma's af te leiden of te laten zien dat het niet waar was; zoals boven opgemerkt zijn beide onmogelijk. Toevoeging van het Keuzeaxioma tot de rest van de lijst leidt niet tot tegenspraken net zo min als de toevoeging van zijn ontkenning.

De meerderheid van de wiskundigen gebruikt zonder problemen het Keuzeaxioma en wij doen dat verder ook.

Voor wie meer wil weten: pak een boek over verzamelingenleer uit de Bibliotheek. Bijvoorbeeld het boek [1980] van Kunen of [1979] van Levy.

We formuleren nog twee andere beweringen die met het Keuzeaxioma equivalent zijn. Hiertoe moeten we nog een paar extra noties definiëren.

11.3. Definitie. Zij X een verzameling. Een *partiële ordening* op X is een relatie op X, suggestief geschreven als $\preccurlyeq$, met de volgende drie eigenschappen.

(i) Voor alle $x \in X$ geldt $x \preccurlyeq x$.
(ii) Voor alle x en y in X geldt: als $x \preccurlyeq y$ en $y \preccurlyeq x$ dan $x = y$.
(iii) Voor alle x, y en z in X geldt: als $x \preccurlyeq y$ en $y \preccurlyeq z$ dan $x \preccurlyeq z$.

Deze eigenschappen brengen de eigenschappen van $\leqslant$ op $\mathbb{R}$ en $\subseteq$ op families verzamelingen onder één noemer. Beide relaties voldoen aan de drie eigenschappen.

De ordening $\leqslant$ heeft nog een eigenschap die $\subseteq$ niet heeft:

11.4. Definitie. Een *lineaire ordening* is een partiële ordening met de volgende extra eigenschap: Als $x, y \in X$ dan geldt $x \preccurlyeq y$ of $y \preccurlyeq x$.

Het beste wat we kunnen krijgen is een lineaire ordening als op $\mathbb{N}$.

11.5. Definitie. Een *welordening* is een partiële ordening ten opzichte van welke elke niet-lege deelverzameling een kleinste element heeft. (Een welgeordende verzameling is dus automatisch lineair geordend.)

11.6. Voorbeelden.

1. Elke familie verzamelingen is door $\subseteq$ partieel geordend.
2. De verzameling $\mathbb{R}$ is door $\leqslant$ lineair geordend.
3. De verzameling $\mathbb{N}$ is door $\leqslant$ welgeordend.
4. Definieer $\preccurlyeq$ op $\mathbb{R}^2$ door $(x, y) \preccurlyeq (u, v)$ dan en slechts dan als $x \leqslant u$ en $y \geqslant v$; dan is $\preccurlyeq$ een partiële ordening die niet lineair is.
5. Definieer $\preccurlyeq$ op $\mathbb{R}^2$ door $(x, y) \preccurlyeq (u, v)$ dan en slechts dan als $x < u$, of $x = u$ en $y \leqslant v$; dan is $\preccurlyeq$ een lineaire ordening op $\mathbb{R}^2$. Dit is de *lexicografische ordening*.
6. De verzameling $\mathbb{N}^2$ is door de lexicografische ordening welgeordend.

We krijgen de volgende uitspraken.

11.7. De Welordeningsstelling. Elke verzameling kan welgeordend worden.

11.8. Het Lemma van Zorn. Als X een partieel geordende verzameling is waarin elke lineair geordende deelverzameling een bovengrens heeft dan heeft X een *maximaal element*, dat wil zeggen een element x zó dat er géén $y \neq x$ is met $x \preccurlyeq y$.

Net als het Keuzeaxioma zijn de Welordeningsstelling en het Lemma van Zorn niet constructief; er wordt niet gezegd hoe de welordening te maken of hoe het maximale element te vinden. Er wordt alleen gezegd dat ze er zijn.

Over de woorden 'stelling' en 'lemma': deze worden gebruikt omdat de beweringen uit het Keuzeaxioma afgeleid zijn. Men heeft bewezen (met gebruik van alleen de andere axioma's van de verzamelingenleer) dat het Keuzeaxioma, de Welordeningsstelling en het Lemma van Zorn equivalent zijn. Als de geschiedenis anders was gelopen hadden we nu misschien het Welordeningsaxioma en de Keuzestelling gehad.

We noemen nog een paar gevolgen van het Keuzeaxioma:

(i) Elke vectorruimte heeft een basis.

(ii) In een ring met 1 is elk ideaal bevat in een maximaal ideaal.

(iii) De stelling van Hahn-Banach: als V een vectorruimte is, C een convexe deelverzameling van V en W een deelruimte van V met $W \cap C = \varnothing$ dan bestaat een deelruimte U van V van codimensie 1 zó dat $W \subseteq U$ en $U \cap C = \varnothing$ (codimensie 1 betekent dat er een vector x in $V \setminus U$ is zó dat V opgespannen wordt door $U \cup \{x\}$).

Voor bewijzen van de equivalentie van het Keuzeaxioma, de Welordeningsstelling en het Lemma van Zorn verwijzen we naar bovengenoemde boeken.

12. DE BEWIJZEN

We zullen nu stuk voor stuk de bewijzen van onze stellingen afmaken. Het volgende lemma is de sleutel tot bijna alles wat we willen bewijzen.

12.1. Lemma. *In een ontwikkelbare ruimte heeft elke open overdekking een σ-discrete gesloten verfijning.*

Bewijs. Zij X een ruimte met een ontwikkeling $(\mathcal{U}_n)_n$ en zij $\mathcal{O}$ een open overdekking van X. Laat $\prec$ een welordening van $\mathcal{O}$ zijn. Definieer voor elke $O \in \mathcal{O}$ en elke $n \in \mathbb{N}$ de verzameling $F(O,n)$ door: $x \in F(O,n)$ dan en slechts dan als $x \in O \setminus \bigcup\{V \in \mathcal{O} : V \prec O\}$ (O is het eerste element van $\mathcal{O}$ waar x in zit) en $\mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n) \subseteq O$.

We kunnen het complement van $F(O,n)$ schrijven als

$$\mathrm{St}(X \setminus O,\mathcal{U}_n) \cup \bigcup\{V \in \mathcal{O} : V \prec O\}$$

en dit is een open verzameling. Verder geldt natuurlijk $F(O,n) \subseteq O$. Tenslotte, als $x \in X$ en als O het eerste element van $\mathcal{O}$ is waar x in zit dan is er een n zó dat $\mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n) \subseteq O$. Conclusie: $\bigl\{F(O,n) : O \in \mathcal{O}, n \in \mathbb{N}\bigr\}$ is een gesloten verfijning van $\mathcal{O}$.

Rest nog te bewijzen dat voor elke n de familie $\bigl\{F(O,n) : O \in \mathcal{O}\bigr\}$ discreet is. Zij $x \in X$ en zij O het eerste element van $\mathcal{O}$ waar x in zit. Dan geldt zeker dat $O \cap F(V,n) = \varnothing$ voor $V \succ O$. Voorts geldt dat $\mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n) \cap F(V,n) = \varnothing$ voor $V \prec O$. Immers, als $y \in F(V,n)$ met $V \prec O$ dan geldt $\mathrm{St}(y,\mathcal{U}_n) \subseteq V$ en dus $x \notin \mathrm{St}(y,\mathcal{U}_n)$ en dus ook $y \notin \mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n)$. Dus $O \cap \mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n)$ is een omgeving van x die ten hoogste één element van de familie $\bigl\{F(O,n) : O \in \mathcal{O}\bigr\}$ snijdt. □

We kunnen nu snel een paar gevolgen afleiden.

12.2. Gevolg. *In een collectiegewijs normale Moore ruimte heeft elke open overdekking een σ-discrete open verfijning.*

Bewijs. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking en $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$ een σ-discrete gesloten verfijning, waarbij iedere $\mathcal{F}_n$ een discrete familie is. Gebruik dan Opgave 6.16 om voor elke n een *discrete* collectie $\{O_F : F \in \mathcal{F}_n\}$ van open verzamelingen te vinden zó dat $F \subseteq O_F$ voor elke F.

Kies vervolgens voor elke $F \in \mathcal{F}$ een element U_F van $\mathcal{U}$ met $F \subseteq U_F$. Dan is $\{O_F \cap U_F : F \in \mathcal{F}\}$ de gewenste σ-discrete open verfijning van $\mathcal{U}$. □

We kunnen nu de bewijzen van de stellingen van Nagata-Smirnov en Bing afmaken.

Bewijs van Stelling 9.8. Zij X een collectiegewijs normale Moore ruimte en zij $(\mathcal{U}_n)_n$ een ontwikkeling voor X. Neem voor elke n een σ-discrete open verfijning $\mathcal{O}_n$ van $\mathcal{U}_n$.

Dan is $\bigcup_n \mathcal{O}_n$ een σ-discrete basis voor X. Immers zij $x \in X$ en zij V een omgeving van x. Er is een n zó dat $\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n) \subseteq V$, verder is er dan een $O \in \mathcal{O}_n$ met $x \in O$. Omdat $\mathcal{O}_n$ een verfijning van $\mathcal{U}_n$ is geldt dus zeker $O \subseteq \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n)$. We concluderen dat $x \in O \subseteq V$. $\square$

Dit maakt ook het bewijs van Stellingen 9.1 en 8.1 af. Immers een metrische ruimte is een collectiegewijs normale Moore ruimte een heeft dus een σ-discrete (en dus σ-lokaal eindige) basis.

12.3. Gevolg. *Elke metrische ruimte is paracompact.*

Bewijs. Dit volgt natuurlijk nu uit de voorgaande resultaten. We kunnen dit echter ook rechtstreeks bewijzen. We laten zien dat elke open overdekking van een metrische ruimte een verfijning heeft die tegelijk lokaal eindig en σ-discreet is.

Zij dus (X, d) een metrische ruimte en $\mathcal{U}$ een open overdekking van X. Zij $\prec$ een welordening van $\mathcal{U}$. We definiëren met inductie naar n voor elke element U van $\mathcal{U}$ verzamelingen $A_{U,n}$ en $V_{U,n}$ als volgt: $x \in A_{U,n}$ dan en slechts dan als

(i) U is het eerste element van $\mathcal{U}$ waar x in zit;
(ii) als $i < n$ dan $x \notin \bigcup_{i<n} \bigcup_{U \in \mathcal{U}} V_{U,i}$ en
(iii) $B_{3 \cdot 2^{-n}}(x) \subseteq U$.

Vervolgens stellen we $V_{U,n} = B_{2^{-n}}(A_{U,n})$.

Het moge duidelijk zijn dat elke $V_{U,n}$ open is en dat $V_{U,n} \subseteq U$ voor elke U en elke n. Zij verder $x \in X$ en zij U_x het eerste element van $\mathcal{U}$ waar x in zit. Neem een natuurlijk getal n zó dat $B_{3 \cdot 2^{-n}}(x) \subseteq U_x$. Nu geldt natuurlijk dat $x \in A_{U_x,n}$ of $x \in \bigcup_{i<n} \bigcup_{U \in \mathcal{U}} V_{U,i}$; in beide gevallen vinden we een U en een m zó dat $x \in V_{U,m}$.

We zien dat $\{V_{U,n} : U \in \mathcal{U}, n \in \mathbb{N}\}$ een open verfijning van $\mathcal{U}$ is.

Vervolgens tonen we aan dat voor elke n de familie $\{V_{U,n} : U \in \mathcal{U}\}$ discreet is. Laat $U_1 \prec U_2$ en neem $x_i \in V_{U_i,n}$ $(i = 1, 2)$; kies vervolgens voor elke i een punt $c_i \in A_{U_i,n}$ zó dat $x_i \in B_{2^{-n}}(c_i)$. Omdat $B_{3 \cdot 2^{-n}}(c_1) \subseteq U_1$ en $c_2 \notin U_1$; volgt dat $d(c_1, c_2) > 3 \cdot 2^{-n}$. De driehoeksongelijkheid geeft nu

$$d(x_1, x_2) \geqslant d(c_1, c_2) - d(c_1, x_1) - d(c_2, x_2) > 2^{-n}.$$

We zien dat de $V_{U,n}$ onderling op een afstand van meer dan 2^{-n} liggen. Dit impliceert dat elke bol met straal 2^{-n-1} ten hoogste één $V_{U,n}$ kan snijden.

Tenslotte laten we zien dat de totale collectie $\{V_{U,n} : U \in \mathcal{U}, n \in \mathbb{N}\}$ lokaal eindig is. Zij $x \in X$ en kies U en n zó dat $x \in V_{U,n}$. Neem vervolgens een $k \in \mathbb{N}$ met $k > n$ $B_{3 \cdot 2^{-k}}(x) \subseteq V_{U,n}$. We beweren nu: Als $l \geqslant k$ en $W \in \mathcal{U}$ dan $B_{2^{-k}}(x) \cap V_{W,l} = \varnothing$. Immers zij $c \in A_{W,l}$. Dan geldt $c \notin V_{U,n}$ en dus $d(x, c) > 3 \cdot 2^{-k}$. Omdat $l \geqslant k$ volgt dan dat $B_{2^{-k}}(x) \cap B_{2^{-l}}(c) = \varnothing$. Samen met het argument in de vorige alinea zien we dat $B_{2^{-k}}(x)$ voor elke $i < k$ ten hoogste één verzameling van de vorm $V_{U,i}$ snijdt en verder niets. $\square$

13. NIEUWE KARAKTERIZERINGEN VAN PARACOMPACTHEID

Met behulp van de welordeningsstelling kunnen we nog een paar karakterizeringen van paracompactheid bewijzen. Deze karakterizeringen werken met totaal andere verfijningen dan we tot nu toe bekeken hebben.

Sterverfijningen

We hebben de *ster* van een verzameling A ten opzichte van een overdekking $\mathcal{U}$ gedefinieerd als

$$\mathrm{St}(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \varnothing\}$$

en $\mathrm{St}\bigl(\{x\},\mathcal{U}\bigr)$ afgekort met $\mathrm{St}(x,\mathcal{U})$. Met behulp hiervan definiëren we nog twee soorten verfijningen.

13.1. Definitie. Laat $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ overdekkingen zijn van een verzameling X. We noemen $\mathcal{V}$ een *barycentrische verfijning* van $\mathcal{U}$ als de familie $\bigl\{\mathrm{St}(x,\mathcal{V}) : x \in X\bigr\}$ een verfijning van $\mathcal{U}$ is en een *sterverfijning* van $\mathcal{U}$ als de familie $\bigl\{\mathrm{St}(V,\mathcal{V}) : V \in \mathcal{V}\bigr\}$ een verfijning van $\mathcal{U}$ is.

Deze noties verschillen niet zo veel.

13.2. Lemma. *Als $\mathcal{V}$ een barycentrische verfijning van $\mathcal{U}$ is en $\mathcal{W}$ een barycentrische verfijning van $\mathcal{V}$ dan is $\mathcal{W}$ een sterverfijning van $\mathcal{U}$.*

Bewijs. Zij $W \in \mathcal{W}$ en kies $x \in W$ dan geldt $\mathrm{St}(W,\mathcal{W}) \subseteq \mathrm{St}(x,\mathcal{V})$ (reken maar na). □

We definiëren nu een nieuwe klasse ruimten.

13.3. Definitie. Een topologische ruimte heet *volnormaal* als elke open overdekking een open sterverfijning heeft.

Op grond van Lemma 13.2 is een ruimte volnormaal dan en slechts dan als elke open overdekking een open barycentrische verfijning heeft. Dat volnormaliteit iets met normaliteit te maken heeft blijkt onder meer uit de volgende stelling.

13.4. Stelling. *Elke volnormale ruimte is collectiegewijs normaal.*

Bewijs. Zij $\mathcal{F}$ een discrete collectie gesloten verzamelingen en zij $\mathcal{V}$ een open overdekking van de ruimte zó dat voor elke $V \in \mathcal{V}$ de ster $\mathrm{St}(x,\mathcal{V})$ ten hoogste één element van $\mathcal{F}$ snijdt.

We beweren dat $\mathrm{St}(F,\mathcal{V}) \cap \mathrm{St}(G,\mathcal{V}) = \varnothing$ als $F \neq G$. Immers als $x \in \mathrm{St}(F,\mathcal{V}) \cap \mathrm{St}(G,\mathcal{V})$ dan snijdt $\mathrm{St}(x,\mathcal{V})$ zowel F als G. □

13.5. Opgave. Bewijs: een ruimte is een T_4-ruimte dan en slechts dan als elke *eindige* open overdekking een (eindige) open sterverfijning heeft. *Aanwijzing*: Zie het bewijs van (i) ⇒ (ii) Stelling 13.6.

Paracompactheid is gelijk aan volnormaliteit

We bewijzen nu de stelling die in de titel van deze paragraaf aangekondigd wordt.

13.6. Stelling. *Voor een topologische ruimte X zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(i) *X is paracompact en Hausdorff;*
(ii) *X is volnormaal en T_1 en*
(iii) *X is regulier en elke open overdekking van X heeft een σ-discrete open verfijning.*

Bewijs. De implicatie (iii) ⇒ (i) volgt direct uit Stelling 7.8.

We bewijzen (i) ⇒ (ii): Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X en $\mathcal{F}$ een lokaal eindige gesloten verfijning van $\mathcal{U}$. Kies voor elke $F \in \mathcal{F}$ een $U_F \in \mathcal{U}$ met $F \subseteq U_F$. Definieer nu voor $x \in X$

$$O_x = \bigcap\{U_F : x \in F\} \setminus \bigcup\{F \in \mathcal{F} : x \notin F\}.$$

Merk op dat O_x open is. We bewijzen dat $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$ een barycentrische verfijning van $\mathcal{U}$ is.

Zij $x \in X$ en kies $F \in \mathcal{F}$ met $x \in F$. Stel $x \in O_y$; dan geldt $y \in F$ en dus $O_y \subseteq U_F$. We zien dat $\mathrm{St}(x, \mathcal{O}) \subseteq U_F$.

Tenslotte bewijzen we (ii) $\Rightarrow$ (iii). Omdat X volnormaal en T_1 is is X collectiegewijs normaal en dus zeker regulier.

Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X en kies een rij $(\mathcal{U}_n)_n$ open overdekkingen van X zó dat telkens $\mathcal{U}_{n+1}$ een sterverfijning van $\mathcal{U}_n$ is en $\mathcal{U}_1$ een sterverfijning van $\mathcal{U}$.

Als in het bewijs van Stelling 10.2 kunnen we een pseudometriek d maken met de eigenschap dat

$$\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq B_{2^{-n}}(x) \subseteq \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_n) \tag{$\dagger$}$$

voor elke x en elke n (zie ook Opmerking 10.3). Het punt is dat een sterverfijning de iets sterkere eigenschap die we in het bewijs gebruikt hebben: Als $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{U}_{n+1}$ voldoen aan $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ en $U_2 \cap U_3 \neq \varnothing$ dan geldt $U_1 \cup U_2 \cup U_3 \subseteq \mathrm{St}(U_2, \mathcal{U}_{n+1})$ en deze laatste verzameling is bevat in een element van $\mathcal{U}_n$.

Uit ($\dagger$) kunnen we afleiden dat elke d-open verzameling open in X is. Verder is $\mathcal{O} = \big\{B_{\frac{1}{2}}(x) : x \in X\big\}$ een open verfijning van $\mathcal{U}$. Het bewijs van Gevolg 12.3 levert dan een d-open verfijning van $\mathcal{O}$ en dus van $\mathcal{U}$ die zowel lokaal eindig als σ-discreet is — ten opzichte van de d-topologie en dus ook ten opzichte van de gegeven topologie van X. $\square$

VII

ENKELE VOORBEELDEN

We maken in dit deel nog een aantal voorbeelden van ruimten die laten zien dat sommige in dit dictaat bewezen implicaties niet omkeerbaar zijn.

14. DE TYCHONOFF PLANK

De Tychonoff plank is een volledig reguliere ruimte die niet normaal is. Anders dan bij het Niemytzki vlak is het heel eenvoudig een compacte ruimte aan te geven waar de Tychonoff Plank een deelruimte van is.

Een overaftelbare welgeordende verzameling

We beginnen met een welordening $\prec$ van $\mathbb{R}$. We kunnen wel aannemen dat er een maximum is ten opzichte van deze ordening; als dat er niet is veranderen we de ordening een beetje door het minimum bovenaan te zetten.

De verzameling van punten $a \in \mathbb{R}$ waarvoor de voorgangersverzameling $V(a) = \{y : y \prec a\}$ overaftelbaar is is dan niet leeg; zeker is ook de verzameling punten a waarvoor $V(a)$ oneindig is niet leeg. Zij a_0 het eerste element waarvoor $V(a)$ oneindig is en a_1 het eerste punt waarvoor $V(a)$ overaftelbaar is.

Nu heeft elk element x van $\mathbb{R}$ (behalve het maximum) ten opzichte van $\prec$ een directe opvolger x^+: Het minimum van $\{y : y \succ x\}$.

14.1. Lemma. *Als $x \in V(a_0)$ ($x \in V(a_1)$) dan ook $x^+ \in V(a_0)$ ($x^+ \in V(a_1)$).*

Bewijs. Als $V(x)$ eindig of aftelbaar is dan is $V(x^+) = V(x) \cup \{x\}$ het natuurlijk ook. $\square$

We noemen een element van de vorm x^+ een *opvolger*. De elementen a_0 en a_1 zijn volgens het lemma dus geen opvolgers; elementen die geen opvolgers zijn zullen we *limieten* noemen. Limieten laten zich eenvoudig karakterizeren:

14.2. Lemma. *Een punt x is een limiet dan en slechts dan als $x = \min \mathbb{R}$ of $x = \sup V(x)$.*

Bewijs. Als x een limiet is dan is dat omdat $V(x) = \varnothing$ (dus $x = \min \mathbb{R}$) of omdat $y^+ \prec x$ voor elke $y \in V(x)$. Nu is x een bovengrens voor $V(x)$ en wel de kleinste: We hebben net gezien dat $y^+ \prec x$ als $y \prec x$ dus geen element dat kleiner is dan x is een bovengrens voor $V(x)$.

Omgekeerd, als $x = \min \mathbb{R}$ dan $V(x) = \varnothing$ dus x is zeker geen opvolger. Als $V(x) \neq \varnothing$ en $x = y^+$ voor een y dan geldt $y = \sup V(x)$ en dit is in tegenspraak met het feit dat $x = \sup V(x)$. $\square$

We kunnen a_1 nooit met aftelbare verzamelingen benaderen:

14.3. Stelling. *Als A een aftelbare deelverzameling van $V(a_1)$ is dan geldt $\sup A \prec a_1$.*

Bewijs. Zij $x = \sup A$, we bewijzen dat $V(x)$ aftelbaar is. Er geldt immers dat $V(x) = \bigcup_{y \in A} V(y)$: Als $z \prec x$ dan is er een $y \in A$ met $z \prec y$ en omgekeerd als $y \in A$ dan geldt $V(y) \subseteq V(x)$. $\square$

Een topologie op $\mathbb{R}$

We definiëren met behulp van de welordening $\prec$ een nieuwe topologie op $\mathbb{R}$. Laten we voor het gemak aannemen dat $0 = \min \mathbb{R}$. We nemen als basis voor de topologie de familie van alle intervallen van de vorm $(x, y]$ *ten opzichte van* $\prec$; dus $(x, y] = \{z : x \prec z \preccurlyeq y\}$. Omdat hiermee het punt 0 niet overdekt wordt nemen we ook nog $\{0\}$ in de basis op.

14.4. Lemma. *Elk interval* $(x, y]$ *is open en gesloten.*

Bewijs. Het interval is open omdat het tot de basis behoort. Het complement is open: Als $z \succ y$ dan is $(y, z]$ een omgeving van z die het interval niet snijdt en als $z \preccurlyeq x$ dan is $[0, z]$ een omgeving die het interval niet snijdt. □

14.5. Lemma. *Een punt is geïsoleerd dan en slechts dan als het een opvolger is of gelijk aan* 0.

Bewijs. Dat 0 geïsoleerd is is duidelijk en verder geldt $\{x^+\} = (x, x^+]$ dus elke opvolger is ook geïsoleerd.

Omgekeerd als x geïsoleerd is en ongelijk aan 0 dan is er een interval $(a, b]$ met $x \in (a, b] \subseteq \{x\}$. Dan volgt meteen dat $x = b = a^+$. □

14.6. Stelling. *Met deze topologie is* $\mathbb{R}$ *een normale ruimte. Elke deelruimte van de vorm* $V(a)$ *is normaal.*

Bewijs. De ruimte is Hausdorff: Als $x \prec y$ dan is $(x, y]$ een open en gesloten omgeving van y waar x niet in zit; het complement is dus een omgeving van x.

Als F en G disjuncte gesloten verzamelingen zijn van $\mathbb{R}$ of $V(a)$ dan kunnen we, net als in het bewijs dat de Sorgenfrey lijn normaal is, voor elk punt $x \in F$ een $y_x \prec x$ kiezen zó dat $G \cap (y_x, x] = \varnothing$; voor de punten van G maken we een dergelijke keuze. Dan zijn $U = \bigcup_{x \in F}(y_x, x]$ en $V = \bigcup_{x \in G}(y_x, x]$ disjuncte omgevingen van F respectievelijk G. □

Voor elke $x \in \mathbb{R}$ definiëren we ook nog $W(x) = V(x) \cup \{x\} = \{y : y \preccurlyeq x\}$.

14.7. Lemma. *Voor elke* x *is* $W(x)$ *compact.*

Bewijs. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van $W(x)$. We maken een rij punten $x_0, x_1, x_2, \ldots$ in $W(x)$ en elementen U_0, U_1, U_2,... van $\mathcal{U}$ als volgt.

We beginnen met $x_0 = x$ en als x_n gevonden is en $x_n \succ 0$ dan kiezen we $x_{n+1} \prec x_n$ en $U_n \in \mathcal{U}$ zó dat $(x_{n+1}, x_n] \subseteq U_n$.

Omdat $W(x)$ welgeordend is heeft de verzameling $\{x_n\}_n$ een minimum, zeg x_n; maar dat betekent dat $x_n = 0$ en dat de constructie op moment n gestopt is. Kies dan nog $U_{n+1} \in \mathcal{U}$ waar 0 in zit; dan is $\{U_i\}_{i \leqslant n+1}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{U}$. □

De ruimte $V(a_1)$

Van de ruimte $V(a_1)$ weten we nu dat deze normaal is. We laten zien dat ze ook collectiegewijs normaal is maar niet paracompact.

14.8. Lemma. *In* $V(a_1)$ *heeft elke rij een convergente deelrij.*

Bewijs. Zij $(x_n)_n$ een rij in $V(a_1)$. Er is een element x van $V(a_1)$ met de eigenschap dat $x_n \preccurlyeq x$ voor alle n, namelijk $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Zij a het kleinste element van $V(a_1)$ met de eigenschap dat $x_n \preccurlyeq a$ voor oneindig veel n; nummer deze n-en als $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ met $n_k < n_l$ als $k < l$. Als nu $b \prec a$ dan is $\{n : x_n \prec b\}$ eindig dus is er een K zó dat $x_k \in (b, a]$ voor $k \geqslant K$. We zien dat de deelrij $(x_{n_k})_k$ naar a convergeert. □

14.9. Stelling. *De ruimte* $V(a_1)$ *is collectiegewijs normaal maar niet paracompact.*

Bewijs. Dat $V(a_1)$ collectiegewijs normaal is heeft een flauwe reden: Lemma 14.8 impliceert dat elke discrete familie gesloten verzamelingen eindig is. Dan is gewone normaliteit al voldoende om een disjuncte familie omgevingen te kunnen maken.

Lemma 14.8 impliceert ook dat in $V(a_1)$ elke lokaal eindige familie eindig is. Immers, neem aan dat $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ lokaal eindig is en kies $x_n \in F_n$ voor elke n. Omdat $\mathcal{F}$ lokaal eindig is kunnen we wel aannemen dat $x_n \neq x_m$ als $n \neq m$; de limiet van een convergente deelrij spreekt de lokale eindigheid van $\mathcal{F}$ tegen.

Nu volgt dat de open overdekking $\bigl\{[0, x] : x \in V(a_1)\bigr\}$ geen lokaal eindige (open, gesloten) verfijning heeft: Zo'n verfijning zou eindig zijn en uit begrensde verzamelingen bestaan; hij kan dan geen overdekking zijn. $\square$

De ruimte $V(a_1)$ heeft nog een merkwaardige eigenschap.

14.10. Stelling. *Als $f : V(a_1) \to \mathbb{R}$ een continue functie is, dan is er een x zó dat $f(y) = f(x)$ voor alle $y \succcurlyeq x$.*

Bewijs. Neem aan dat er niet zo'n x is en kies dan bij elke x een $y_x \succ x$ met $f(y_x) \neq f(x)$ en een natuurlijk getal n_x zó dat $\bigl|f(y_x) - f(x)\bigr| \geqslant 2^{-n_x}$.

Omdat $V(a_1)$ overaftelbaar is moet er een n zijn zó dat de verzameling $A = \{x : n_x = n\}$ ook overaftelbaar is. Maak nu een rij punten als volgt: $x_0 = \min A$ en als x_k gevonden is neem dan $x_{k+1} = \min\{x \in A : x \succ y_{x_k}\}$. Zij tenslotte $a = \sup_k x_k$; dan convergeert de rij $(x_k)_k$ naar a dus $f(x_k) \longrightarrow f(a)$. De rij $(y_{x_k})_k$ convergeert ook naar a en dus ook $f(y_{x_k}) \longrightarrow f(a)$. Dit kan niet omdat $\bigl|f(y_{x_k}) - f(x_k)\bigr| \geqslant 2^{-n}$ voor alle k. $\square$

14.11. Opgave. Toon aan dat $W(a_0)$ en de deelruimte $\{0\} \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ van $\mathbb{R}$ (met de gewone topologie) homeomorf zijn.

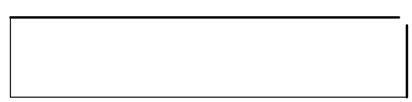
De Tychonoff plank

We kunnen nu een eenvoudig voorbeeld maken van een compacte ruimte met een niet normale deelruimte. Dit voorbeeld werd in [1930] door Tychonoff bedacht.

We beginnen met het product $W(a_1) \times W(a_0)$. Uit Stelling 5.9 volgt dat deze ruimte compact is. Daar $W(a_1)$ en $W(a_0)$ Hausdorff zijn is het product ook Hausdorff. Vervolgens nemen we

$$T = W(a_1) \times W(a_0) \setminus \bigl\{(a_1, a_0)\bigr\}.$$

Als deelruimte van een compacte Hausdorff ruimte is T volledig regulier. Zie Figuur 3



Figuur 3. De Tychonoff plank

We bewijzen dat de bovenkant $B = V(a_1) \times \{a_0\}$ en de rechterzijkant $R = \{a_1\} \times V(a_0)$ disjuncte gesloten verzamelingen in T zijn die geen disjuncte open omgevingen hebben.

Dat de verzamelingen gesloten zijn in T is duidelijk. Laat nu O en U open verzamelingen zijn om respectievelijk B en R. Kies voor elke $x \prec a_0$ een $y_x \prec a_1$ zó dat $(y_x, a_1] \times \{x\} \subseteq U$. Kies vervolgens $z \prec a_1$ met $y_x \prec z$ voor alle x. De verticale lijn $\{z\} \times V(a_0)$ is dus een deelverzameling van U. Het punt (z, a_0) zit in de afsluiting van deze lijn en dus in afsluiting van U; omdat O een omgeving van (z, a_0) is volgt dus $O \cap U \neq \varnothing$.

15. DE MICHAEL LIJN

De Michael lijn is een normale ruimte wiens product met de ruimte der irrationale getallen niet normaal is.

We maken de Michael lijn door de gewone topologie op $\mathbb{R}$ te vergroten:

15.1. Voorbeeld. Zij $\mathcal{B} = \{U \subseteq \mathbb{R} : U$ is open in $\mathbb{R}$ of $U \subseteq \mathbb{P}\}$. Dan is $\mathcal{B}$ een basis voor een topologie op $\mathbb{R}$; we noteren de zo verkregen topologische ruimte met M en we noemen deze de *Michael lijn*.

We zullen zien dat het product $M \times \mathbb{P}$ niet normaal is; hier is $\mathbb{P}$ de ruimte der irrationale getallen (met deelruimtetopologie van $\mathbb{R}$). We beginnen met aan te tonen dat M paracompact is.

15.2. Lemma. *De Michael lijn is paracompact.*

Bewijs. Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van M. Kies, voor elke punt $q \in \mathbb{Q}$ een $U_q \in \mathcal{U}$ en een open interval I_q met *irrationale* eindpunten zó dat $q \in I_q \subseteq U_q$. Merk op dat I_q open-en-gesloten is in M.

Nu is $\mathbb{Q}$ aftelbaar; we nemen een aftelling $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Voor elke n stellen we $O_n = I_{q_n} \setminus \bigcup_{i<n} I_{q_i}$. De familie

$$\{O_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \bigl\{\{x\} : x \in \mathbb{P} \setminus \bigcup_n O_n\bigr\}$$

is een disjuncte open overdekking van M die $\mathcal{U}$ verfijnt. Het is dus een discrete open verfijning van $\mathcal{U}$. $\square$

We laten nu zien dat $M \times \mathbb{P}$ niet normaal is; we gebruiken hierbij weer de Stelling van Baire.

15.3. Stelling. *Het product $M \times \mathbb{P}$ is niet normaal.*

Bewijs. We nemen de volgende twee gesloten verzamelingen in $M \times \mathbb{P}$: $F = \bigl\{(x,x) : x \in \mathbb{P}\bigr\}$ en $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{P}$. Dat F gesloten is volgt uit het feit dat F gesloten is in $\mathbb{R} \times \mathbb{P}$ en dus ook in $M \times \mathbb{P}$; de verzameling G is gesloten omdat $\mathbb{Q}$ gesloten is in M.

Neem aan dat O een omgeving van F is en neem voor elke $x \in \mathbb{P}$ een natuurlijk getal n_x zó dat $\{x\} \times I(x,n) \subseteq O$; hier is $I(x,n)$ het interval $(x - 2^{-n}, x + 2^{-n})$.

Stellen we $A_n = \{x \in \mathbb{P} : n_x = n\}$ voor elke n dan is er volgens de stelling van Baire een m waarvoor $\operatorname{cl} A_m$ een interval bevat (afsluiting ten opzichte van de gewone topologie). Neem dus een $q \in \mathbb{Q} \cap \operatorname{cl} A_m$. We beweren dat voor elk irrationaal getal $x \in (q-\varepsilon, q+\varepsilon)$ het punt (q,x) in de afsluiting van O zit.

Zij namelijk $U = (q-\varepsilon, q+\varepsilon) \times (x-\delta, x+\delta)$ een open rechthoek om (q,x). Kies $y \in A_m$ zó dat $|y-q| < \varepsilon$ en $y + 2^{-m} > x - \delta$; dan volgt dat $U \cap O \supseteq U \cap \bigl(\{y\} \times I(y,m)\bigr) \neq \varnothing$. $\square$

Een variatie

Als we in plaats van de irrationale getallen een andere deelverzameling van $\mathbb{R}$ gebruiken kunnen we het voorbeeld nog wat sterker maken. Hiertoe moeten we wat voorbereidingen treffen.

15.4. Stelling. *Als F een overaftelbare gesloten verzameling van $\mathbb{R}$ is dan bestaat er een injectieve afbeelding van de Cantorverzameling naar F.*

Bewijs. We kunnen wel aannemen dat $F \subseteq [0,1]$. Immers, er moet een $n \in \mathbb{Z}$ zijn zó dat $F \cap [n, n+1]$ overaftelbaar is; door dit interval op te schuiven komen we binnen $[0,1]$.

We bewijzen eerst: Als $F \cap [a,b]$ overaftelbaar is en $\varepsilon > 0$ dan zijn er disjuncte gesloten intervallen I_0 en I_1 van lengte kleiner dan ε in $[a,b]$ zó dat $F \cap I_0$ en $F \cap I_1$ beide overaftelbaar zijn. Zij hiertoe

$$c = \sup\{x \in [a,b] : F \cap [a,x] \text{ is aftelbaar}\}$$

en

$$d = \inf\{x \in [a,b] : F \cap [x,b] \text{ is aftelbaar}\}.$$

Dan zijn $[a,c] \cap F$ en $[d,b] \cap F$ beide aftelbaar en dus moet wel gelden $c < d$. Kies dan $p, q \in (c,d)$ met $p < q$, $p < c + \varepsilon$ en $q > d - \varepsilon$ en stel $I_0 = [c,p]$ en $I_1 = [q,d]$.

Nu kunnen we een afbeelding van de Cantorverzameling naar F maken. We doen dit indirekt; in plaats van de afbeelding punt voor punt te maken spreken we af welke intervallen op welke intervallen worden afgebeeld. Voor elk eindig rijtje $s = \langle i_0, i_1, \dots, i_n \rangle$ van nullen en enen bepalen we twee intervallen I_s en J_s als volgt.

Als $s = \varnothing$ (het lege rijtje) dan $I_s = J_s = [0,1]$. Als I_s gegeven is dan is $I_{\langle s,0\rangle}$ het linker derde stuk van I_s en $I_{\langle s,1\rangle}$ het rechter derde stuk. Van J_s nemen we aan dat zijn doorsnede met F overaftelbaar is en dat zijn lengte kleiner dan of gelijk is aan $2^{-|s|}$; we kiezen dan disjuncte deelintervallen $J_{\langle s,0\rangle}$ en $J_{\langle s,1\rangle}$ van J_s die elk een overaftelbare doorsnede met F hebben en ten hoogste half zo lang zijn als J_s.

Als nu x een punt van de Cantorverzameling is dan bepaalt het een oneindig rijtje nullen en enen: Het rijtje $\hat{x}$ bepaald door de intervallen I_s waar x in zit. Stellen we $s_n = \langle \hat{x}_0, \dots \hat{x}_n \rangle$ voor elke n dan volgt dat $J_{s_m} \subseteq J_{s_n}$ als $m > n$. De dalende rij intervallen $(J_{s_n})_n$ heeft een niet-lege doorsnede; omdat de lengten naar 0 gaan bestaat de doorsnede uit één punt $f(x)$ en dat punt zit in F omdat elke J_{s_n} de verzameling F snijdt.

Tenslotte, als $x \neq y$ dan verschillen $\hat{x}$ en $\hat{y}$ op, zeg, de n-de plaats. De intervallen die bij $\langle \hat{x}_0, \dots \hat{x}_n \rangle$ en $\langle \hat{y}_0, \dots \hat{y}_n \rangle$ horen zijn disjunkt. Hieruit volgt dat $f(x) \neq f(y)$. □

15.5. Opgave. Bewijs dat de in het bewijs gedefinieerde afbeelding continu is.

We gebruiken deze stelling om een speciale deelverzameling van $\mathbb{R}$ te construeren. Hiertoe kiezen we een welordening $\prec$ van $2^{\mathbb{N}}$ met de eigenschap dat voor elke $A \in 2^{\mathbb{N}}$ de voorgangersverzameling $V(A)$ echt kleiner is dan $2^{\mathbb{N}}$. Hiermee bedoelen we: Als $A \in 2^{\mathbb{N}}$ dan is er geen bijectie van $V(A)$ op $2^{\mathbb{N}}$.

Zo'n welordening is eenvoudig te maken: Kies één of andere welordening en kijk of deze voldoet. Zo ja, dan zijn we klaar. Zo nee, kies dan het eerste element A van $2^{\mathbb{N}}$ waarvoor een bijectie tussen $V(A)$ en $2^{\mathbb{N}}$ bestaat en gebruik deze bijectie om een nieuwe welordening van $2^{\mathbb{N}}$ te maken.

Voorts nemen we een surjectieve afbeelding F van $2^{\mathbb{N}}$ naar de familie $\mathcal{F}$ van overaftelbare gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Deze kunnen we als volgt construeren: Maak een bijectie I tussen $\mathbb{N}$ en de familie van alle open intervallen met rationale eindpunten. Definieer dan

$$F(A) = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in A} I_n & \text{als deze verzameling overaftelbaar is} \\ [0,1] & \text{anders.} \end{cases}$$

Dat dit een surjectie is volgt uit het feit dat tussen elk tweetal reële getallen een rationaal getal ligt.

Nu kunnen we de gewenste deelverzameling van $\mathbb{R}$ construeren.

15.6. Stelling. *Er bestaat een deelverzameling $\mathbb{B}$ van $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat zowel $\mathbb{B}$ als $\mathbb{R}\setminus\mathbb{B}$ elke overaftelbare gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}$ snijdt. (Met andere woorden als G gesloten is in $\mathbb{R}$ en $G \subseteq \mathbb{B}$ of $\mathbb{B} \cap G = \varnothing$ dan is G aftelbaar.)*

Bewijs. We kiezen 'met volledige inductie langs $2^{\mathbb{N}}$' voor elke $A \in 2^{\mathbb{N}}$ punten x_A en y_A in $F(A)$, als volgt. Als x_B en y_B gevonden voor zijn $B \prec A$ kiezen we verschillende punten x_A en y_A in $F(A) \setminus \{x_B, y_B : B \prec A\}$.

Dit is mogelijk omdat er aan de ene kant wel een injectieve afbeelding van $2^{\mathbb{N}}$ naar $F(A)$ bestaat maar geen bijectieve afbeelding van $V(A)$ naar $F(A)$.

Dan is $\mathbb{B} = \{x_A : A \in 2^{\mathbb{N}}\}$ de gevraagde verzameling. □

Een verzameling met de eigenschap uit de stelling wordt wel een *Bernstein verzameling* genoemd.

15.7. Opgave. Bewijs dat $\mathbb{B}$ niet Lebesgue meetbaar is. *Aanwijzing*: Laat zien dat $[0,1] \cap \mathbb{B}$ en $[0,1] \setminus \mathbb{B}$ beide uitwendige maat 0 hebben.

We maken nu een variatie op de Michael lijn; deze noemen we $M_{\mathbb{B}}$. In plaats van de punten van $\mathbb{P}$ maken we nu alle punten van $\mathbb{B}$ geïsoleerd.

15.8. Lemma. *De ruimte $M_{\mathbb{B}}$ is regulier en Lindelöf.*

Bewijs. Regulariteit is duidelijk: Alle open intervallen met eindpunten in $\mathbb{B}$ zijn ook gesloten en ook is elke $\{x\}$ met $x \in \mathbb{B}$ open-en-gesloten.

Zij verder $\mathcal{U}$ een open overdekking van $M_{\mathbb{B}}$. Voor elke punt $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{B}$ kunnen we een interval I_x met rationale eindpunten en een U_x uit $\mathcal{U}$ kiezen zó dat $x \in I_x \subseteq U_x$. Op deze manier vinden we een aftelbare deelfamilie $\mathcal{U}'$ van $\mathcal{U}$ die $\mathbb{R} \setminus \mathbb{B}$ overdekt.

Het complement C van $\bigcup_x I_x$ is een deelverzameling van $\mathbb{B}$ die gesloten is in $\mathbb{R}$ en dus aftelbaar. Er is dus een tweede aftelbare deelfamilie $\mathcal{U}''$ van $\mathcal{U}$ die C overdekt. De familie $\mathcal{U}' \cup \mathcal{U}''$ is de gezochte aftelbare deeloverdekking van $\mathcal{U}$. □

Tenslotte krijgen we, analoog aan Stelling 15.3.

15.9. Stelling. *Het product $M_{\mathbb{B}} \times \mathbb{B}$ is niet normaal.*

Bewijs. Het bewijs verloopt analoog aan dat van Stelling 15.3. We nemen $F = \bigl\{(x,x) : x \in \mathbb{B}\bigr\}$ en $G = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{B} \times \mathbb{B}$.

Laat O een omgeving van F zijn. We kiezen weer voor elke $x \in \mathbb{B}$ een natuurlijk getal n_x zó dat $(x - 2^{-n_x}, x + 2^{-n_x}) \times \{x\} \subseteq O$. Verder stellen we weer $A_n = \{x : n_x = n\}$. Omdat $\bigcup_n A_n = \mathbb{B}$ is er een m zó dat A_m overaftelbaar is. Dan volgt meteen dat $\operatorname{cl} A_m \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{B})$ niet leeg is; via een punt in deze doorsnede kunnen we dan weer laten zien dat $G \cap \operatorname{cl} O \neq \varnothing$. □

16. BING'S VOORBEELD G

We maken nog een voorbeeld van een normale ruimte die niet collectiegewijs normaal is. Dit voorbeeld werd gemaakt door Bing in [1951]; het is inmiddels zo bekend dat de aanduiding "Bing's Voorbeeld G" voor velen voldoende is.

Het Δ-systeem lemma

Bij de behandeling van het voorbeeld hebben we een combinatorisch lemma nodig dat bekend staat als het Δ-systeem lemma.

Hiertoe definiëren we eerst wat een Δ-systeem (of quasi-disjuncte familie) is.

16.1. Definitie. Een familie $\mathcal{A}$ van verzamelingen heet een Δ-systeem (of een quasi-disjuncte familie) als er één vaste verzameling A bestaat zó dat $A_1 \cap A_2 = A$ voor elk tweetal verschillende elementen A_1 en A_2 van $\mathcal{A}$.

Een paarsgewijs disjuncte familie is zeker quasi-disjunct; de familie $\bigl\{\{1,n\} : n \in \mathbb{N}\bigr\}$ is quasi-disjunct maar niet disjunct.

Het Δ-systeem lemma luidt nu

16.2. Stelling. *Als $\mathcal{A}$ een overaftelbare familie eindige verzamelingen is dan heeft $\mathcal{A}$ een overaftelbare deelfamilie $\mathcal{A}'$ die een Δ-systeem vormt.*

Bewijs. Om te beginnen verdelen we $\mathcal{A}$ in aftelbaar veel deelfamilies: Voor elke n stellen we $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : A \text{ heeft } n \text{ elementen}\}$. Er is dan een n waarvoor $\mathcal{A}_n$ overaftelbaar is; we bewijzen dat $\mathcal{A}_n$ een overaftelbare deelfamilie heeft die quasi-disjunct is.

We bewijzen dus met volledige inductie: Als $\mathcal{A}$ een overaftelbare familie van verzamelingen met n elementen is dan heeft $\mathcal{A}$ een overaftelbare quasi-disjuncte deelfamilie.

Voor $n = 1$ is het duidelijk; als elk element van $\mathcal{A}$ maar 1 element heeft dan is $\mathcal{A}$ paarsgewijs disjunct.

We maken de stap van n naar $n+1$. Zij $\mathcal{A}$ een overaftelbare familie van verzamelingen met elk $n+1$ elementen. We onderscheiden twee gevallen.

Geval 1: Er is een punt x zó dat $\mathcal{A}_x = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ overaftelbaar is. In dit geval passen we de inductiehypothese toe op de familie $\mathcal{B} = \{A \setminus \{x\} : A \in \mathcal{A}_x\}$ en vinden $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ en een vaste verzameling B zó dat $B_1 \cap B_2 = B$ voor elk tweetal verschillende elementen B_1 en B_2 van $\mathcal{B}$. Neem dan $\mathcal{A}' = \{A : A \setminus \{x\} \in \mathcal{B}'\}$ dan geldt $A_1 \cap A_2 = B \cup \{x\}$ voor elk tweetal verschillende elementen van $\mathcal{A}'$.

Geval 2: Er is niet zo'n punt. In dit geval maken we een overaftelbare disjuncte deelfamilie van $\mathcal{A}$. We gebruiken de verzameling $V(a_1)$ als indexverzameling. Kies $A_0 \in \mathcal{A}$ willekeurig. Als $x \in V(a_1)$ en als $A_y \in \mathcal{A}$ gevonden is voor elke $y \prec x$ dan is $\bigcup_{y \prec x} A_y$ aftelbaar en bij onderstelling zijn er maar aftelbaar veel elementen van $\mathcal{A}$ die deze vereniging snijden. We kunnen dus $A_x \in \mathcal{A}$ nemen met $A_x \cap \bigcup_{y \prec x} A_y = \varnothing$. De familie $\{A_x : x \prec a_1\}$ is overaftelbaar en paarsgewijs disjunct. $\square$

Het voorbeeld

Het Voorbeeld G wordt op analoge wijze gemaakt als de Michael lijn; we maken alle punten van een bepaalde deelruimte geïsoleerd. We beginnen met het topologische product $P = \{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{R})}$; dus net zoveel kopieën van $\{0,1\}$ als er deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. Hierbinnen maken we een speciale deelverzameling.

16.3. Definitie. Voor $x \in \mathbb{R}$ is $\boldsymbol{x} \in P$ het punt bepaald door

$$\boldsymbol{x}(A) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in A \\ 0 & \text{als } x \notin A. \end{cases}$$

In feite is $\boldsymbol{x}$ de karakteristieke functie van de familie $\{A : x \in A\}$. We noteren de verzameling $\{\boldsymbol{x} : x \in \mathbb{R}\}$ met R.

We maken een nieuwe topologie op P door elk punt van $P \setminus R$ geïsoleerd te maken. De zo verkregen ruimte noemen we $\mathbb{G}$.

16.4. Lemma. *De ruimte $\mathbb{G}$ is normaal.*

Bewijs. Laat F en G disjuncte gesloten verzamelingen in $\mathbb{G}$ zijn. Bekijk eerst $F \cap R$ en $G \cap R$; deze verzamelingen kunnen we met open omgevingen scheiden. Zij namelijk $A = \{x \in \mathbb{R} : \boldsymbol{x} \in F\}$ en neem $U = \pi_A^{-1}(1)$ en $V = \pi_A^{-1}(0)$. Dan zijn U en V disjunct en open en $F \cap R \subseteq U$ en $G \cap R \subseteq V$.

Verder zijn $G \cap U$ en $F \cap V$ open omdat ze uit geïsoleerde punten bestaan en gesloten omdat U en V ook gesloten zijn. We concluderen dat $(U \setminus G) \cup F$ en $(V \setminus F) \cup G$ disjuncte omgevingen van F en G zijn. $\square$

Om te bewijzen dat $\mathbb{G}$ niet collectiegewijs normaal is hebben we een discrete familie gesloten verzamelingen nodig. Deze ligt eigenlijk voor de hand: $\mathcal{F} = \bigl\{\{\boldsymbol{x}\} : x \in \mathbb{R}\bigr\}$.

Als $p \notin R$ dan is $\{p\}$ een omgeving die geen element van $\mathcal{F}$ snijdt en voor $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\{\boldsymbol{x}\} = R \cap \pi_{\{x\}}^{-1}(1),$$

waarmee $\boldsymbol{x}$ een omgeving heeft die slechts één element, namelijk $\{\boldsymbol{x}\}$, van $\mathcal{F}$ snijdt.

Neem nu aan dat $\{O_x : x \in \mathbb{R}\}$ een familie open verzamelingen is met $\boldsymbol{x} \in O_x$ voor elke x. We kunnen aannemen dat elke O_x bepaalt wordt door een eindige verzameling F_x, dat wil zeggen $O_x = \bigl\{p \in \mathbb{G} : \forall A \in F_x\, p(A) = \boldsymbol{x}(A)\bigr\}$.

We kunnen het Δ-systeem lemma op de familie $\{F_x : x \in \mathbb{R}\}$ toepassen. We vinden een eindige verzameling F en een overaftelbare verzameling A zó dat $F_x \cap F_y = F$ als $x, y \in A$ verschillend zijn.

Elke $x \in A$ bepaalt een functie f_x van F naar $\{0,1\}$, namelijk de beperking van $\boldsymbol{x}$ tot F. Er zijn maar eindig veel functie van F naar $\{0,1\}$; er zijn dus een overaftelbare deelverzameling A' van A en één functie $f\colon F \to \{0,1\}$ zó dat $\boldsymbol{x} \restriction F = f$ voor elke $x \in A'$.

Neem nu verschillende x en y uit A' en definieer het punt p door

$$p(B) = \begin{cases} \boldsymbol{x}(B) & \text{als } B \in F_x, \\ \boldsymbol{y}(B) & \text{als } B \in F_y \text{ en} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Dan geldt $p \in O_x \cap O_y$.

16.5. Opgave. Bewijs dat zelfs $\bigcap_{x \in A'} O_x \neq \varnothing$.

17. NOG EEN NIET NORMAAL PRODUCT

We besluiten met een opmerking over overaftelbare producten. Zoals we gezien hebben zijn aftelbare producten van metrizeerbare ruimten weer metrizeerbaar. In het bijzonder zijn dus ruimten als $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $[0,1]^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ metrizeerbaar.

De vraag is wat er bij overaftelbare producten gebeurt. In ieder geval is geen enkel (niet-triviaal) overaftelbaar product metrizeerbaar.

17.1. Stelling. *Als $X = \prod_{s \in S} X_s$ een overaftelbaar product van T_0-ruimten is die elk tenminste twee punten hebben dan is er in X een punt zonder aftelbare lokale basis.*

Bewijs. Kies voor elke s een punt $x_s \in X_s$ en een omgeving O_s van x_s die niet gelijk is aan X_s. Neem nu het punt $\boldsymbol{x} = (x_s)_s$ in X.

Laat $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare familie omgevingen van $\boldsymbol{x}$ zijn. Kies voor elke n een eindig open blok V_n met $\boldsymbol{x} \in V_n \subseteq U_n$; dit open blok wordt onder meer bepaald door een eindige deelverzameling F_n van S. Daar S overaftelbaar is is er een $s \in S \setminus \bigcup_n F_n$.

Dan is er geen n zó dat $V_n \subseteq \pi_s^{-1}[O_s]$; kies maar een punt $y \in X_s \setminus O_s$ en maak $\boldsymbol{y}$ uit $\boldsymbol{x}$ door x_s te veranderen in y. Dan geldt $\boldsymbol{y} \in \bigcap_n V_n$ maar $\boldsymbol{y} \notin \pi_s^{-1}[O_s]$. $\square$

Aangezien in elke metrische ruimte elk punt een aftelbare lokale basis heeft blijkt hieruit dat overaftelbare producten in de regel niet metrizeerbaar zijn. We kunnen ons afvragen hoe 'mooi' overaftelbare producten nog kunnen zijn. Het antwoord werd in [1948] door Stone gegeven.

17.2. Stelling. *Als S overaftelbaar is dan is $\mathbb{N}^S$ niet normaal ($\mathbb{N}$ met de gewone (discrete) topologie).*

Bewijs. We moeten twee disjuncte gesloten verzamelingen in $\mathbb{N}^S$ vinden die geen disjuncte open omgevingen hebben.

We definiëren voor elke n de verzameling $\Sigma(n)$ als de verzameling van die punten x van $\mathbb{N}^S$ waarvoor de verzameling $S_{x,n} = \{s \in S : x_s \neq n\}$ aftelbaar is. Nu is $\Sigma(n)$ verre van gesloten; $\Sigma(n)$ is zelfs een dichte deelverzameling van $\mathbb{N}^S$. We kunnen echter een gesloten deelverzameling F_n van $\Sigma(n)$ aangeven: F_n bestaat uit die punten $x \in \Sigma(n)$ met de eigenschap dat voor $s \neq t$ in $S_{x,n}$ geldt $x_s \neq x_t$, met andere woorden: x is injectief op de verzameling $S_{x,n}$.

Om in te zien dat F_n gesloten is nemen we x buiten F_n. Dan zijn er blijkbaar $s \neq t$ in $S_{x,n}$ met $x_s = x_t$. De open verzameling $\pi_s^{-1}(x_s) \cap \pi_t^{-1}(x_t)$ is dan een omgeving van x die disjunct is van F_n.

We zullen laten zien dat F_0 en F_1 geen disjuncte omgevingen hebben. Hiertoe moeten we even een korte notatie voor basisomgevingen in het product $\mathbb{N}^S$ afspreken.

Als $x \in \mathbb{N}^S$ en $E \subseteq S$ eindig is dan is de verzameling

$$\bigl\{y \in \mathbb{N}^S : \forall s \in E\, y(s) = x(s)\bigr\}$$

open; het is namelijk het eindige open blok bepaald door de verzameling E en de open verzamelingen $\bigl\{x(s)\bigr\}$ ($s \in E$). We korten deze verzameling af met $[x \restriction E]$.

Zij nu U_0 een open omgeving van F_0. We definiëren met inductie een rij punten $\langle x_k \rangle_k$ in F_0, een rij punten $\langle y_k \rangle_k$ in U_0 en een rij $\langle E_k \rangle_k$ eindige deelverzamelingen van S; hierbij kiezen we iedere keer een nummering $\{s_0, s_1, \ldots, s_{n_k}\}$ van E_k zó dat altijd geldt $E_{k+1} \setminus E_k = \{s_{n_k+1}, \ldots, s_{n_{k+1}}\}$ (E_k is een beginstuk van E_{k+1}).

Het punt x_0 is bepaald door $x_0(s) = 0$ voor elke s. We kiezen E_0 zó dat $[x_0 \restriction E_0] \subseteq U_0$, vervolgens definiëren we y_0 door

$$y_0(s) = \begin{cases} x_0(s) & \text{als } s \in E_0 \\ 1 & \text{als } s \notin E_0. \end{cases}$$

Als we x_k, E_k en y_k gevonden hebben dan maken we eerst x_{k+1}: $x_{k+1}(s_i) = i$ voor $i \leqslant n_k$ en $x_{k+1}(s) = 0$ als $s \notin E_k$. Vervolgens kiezen we $E_{k+1} \supseteq E_k$ zó dat $[x_{k+1} \restriction E_{k+1}] \subseteq U_0$ en definiëren we y_{k+1} als boven

$$y_{k+1}(s) = \begin{cases} x_{k+1}(s) & \text{als } s \in E_{k+1} \\ 1 & \text{als } s \notin E_{k+1}. \end{cases}$$

Merk op dat $y_k \in [x_k \restriction E_k] \subseteq U_0$ voor elke k.

Zij nu $S' = \{s_i : i \in \mathbb{N}\} = \bigcup_k E_k$; deze verzameling is aftelbaar. Definieer een punt $y \in F_1$ door $y(s_i) = i$ voor $i \in \mathbb{N}$ en $y(s) = 1$ voor $s \in S \setminus S'$. Dan is y een element van F_1. We beweren dat de rij $\langle y_k \rangle_k$ naar y convergeert; dan volgt meteen dat $y \in F_1 \cap \operatorname{cl} U_0$.

Welnu zij $E \subseteq S$ eindig en bekijk het eindige open blok $[y \restriction E]$. Kies een k zó dat $E \cap S' \subseteq E_k$. dan geldt voor $l > k$ en $i \leqslant n_k$ dat $y_l(s_i) = i = y(s_i)$, dus zeker geldt dan $y_l(s) = y(s)$ voor $s \in E \cap S'$. Voor $s \in E \setminus S'$ geldt $y(s) = 2 = y_l(s)$ voor *alle* l. We zien dat $y_l \in [y \restriction E]$ als $l > k$. □

We zien dat maar zeer weinig overaftelbare producten normaal kunnen zijn; zodra overaftelbaar veel factoren een oneindige gesloten en discrete deelruimte hebben is het product niet normaal. Er is veel onderzoek gedaan naar normaliteit van producten. Een stelling die laat zien dat er grenzen zijn is de volgende (voor een bewijs verwijzen we naar Noble [1971] en Engelking [1989]).

17.3. Stelling. *Als X een ruimte is waarvan* elke *macht normaal is dan is X compact (en Hausdorff).*

Het idee van het bewijs is als volgt. Als X niet compact is dan is er een familie gesloten verzamelingen $\mathcal{F}$ met de eindige doorsnede eigenschap die een lege doorsnede heeft (Stelling 4.3). Gebruik deze familie om een gesloten verzameling $\boldsymbol{F}$ in $X^{\mathcal{F}}$ te maken: $\boldsymbol{F} = \prod \mathcal{F}$. Deze gesloten verzameling is disjunct van de diagonaal Δ; deze bestaat uit de punten waarvan alle coördinaten gelijk zijn. Deze twee gesloten verzamelingen hebben dan geen disjuncte omgevingen.

Om deze laatste bewering te kunnen bewijzen moet eerst aangetoond worden dat $\mathcal{F}$ overaftelbaar is en dit verloopt via Stelling 17.2: X kan blijkbaar geen oneindige gesloten en discrete deelverzamelingen bevatten en in zo'n ruimte heeft een *aftelbare* familie gesloten verzamelingen met de eindige doorsnede eigenschap altijd een niet lege doorsnede.

Met een methode analoog aan die in het bewijs van Stelling 17.2 kan men dan bij elke omgeving U van Δ een punt in $\boldsymbol{F} \cap \operatorname{cl} U$ vinden.

Literatuur

ALEXANDROFF, P. S. and P. URYSOHN.

[1923] Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D). *C. R. Acad. Paris*, **177**, 1274–1276.

BERNSTEIN, F.

[1908] Zur Theorie der trigonometrischen Reihe. *Berichte der Königlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig Mathematik-Physik Klasse*, **60**, 325–338.

BING, R. H.

[1951] Metrization of topological spaces. *Canadian Journal of Mathematics*, **3**, 175–186.

[1953] A connected countable Hausdorff space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **4**, 474.

DIEUDONNÉ, J.

[1944] Une généralisation des espaces compacts. *J. de Math. Pures et Appl.*, **23**, 65–76.

VAN DOUWEN, E. K.

[1972] A regular space on which every continuous real-valued function is constant. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **20**, 143–145.

ENGELKING, R.

[1989] *General Topology. Revised and completed edition.* Sigma Series in Pure Mathematics 6. Heldermann Verlag, Berlin.

HAUSDORFF, F.

[1914] *Grundzüge der Mengenlehre.* Chelsea Publishing Company, New York. Reprint from 1978 of original edition published in Leipzig.

KELLEY, J. L.

[1974] *General Topology.* Graduate Texts in Mathematics 27. Springer-Verlag, Berlin etc. Original edition: University Series in Higher Mathematics, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1955.

KUNEN, K.

[1980] *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Studies in Logic and the foundations of mathematics 102. North-Holland, Amsterdam.

LEVY, A.

[1979] *Basic Set Theory.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin etc.

MICHAEL, E.

[1953] A note on paracompact spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **4**, 831–838.

[1957] Another note on paracompact spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **8**, 822–828.

[1959] Yet another note on paracompact spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **10**, 309–314.

[1963] The product of a normal space and a metric space need not be normal. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **69**, 375–376.

NAGATA, J.-I.

[1950] On a necessary and sufficient condition of metrizability. *J. Inst. Polyt. Osaka Univ.*, **1**, 93–100.

NOBLE, N.

[1971] Products with cloed projections II. *Transactions of the American Mathematical Society*, **160**, 169–183.

SMIRNOV, Y. M.

[1962] On metrization of topological spaces. *American Mathematical Society Translations. Series 1*, **8**, 63–77. Russian original: О метризации топологических пространств *Успехи Мат. Наук* **6** (1951) 100–111.

SORGENFREY, R. H.

[1947] On the topological product of paracompact spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **53**, 631–632.

STONE, A. H.

[1948] Paracompactness and product spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **54**, 977–982.

TYCHONOFF, A.

[1925] Über einen Metrizationssatz von P. Urysohn. *Mathematische Annalen*, **95**, 139–142.

[1930] Über die topologische Erweiterung von Raümen. *Mathematische Annalen*, **102**, 544–561.

URYSOHN, P.

[1924] Über die Metrisation der kompakten topologischen Räume. *Mathematische Annalen*, **92**, 275–293.

[1925] Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen. *Mathematische Annalen*, **94**, 262–295.

ZERMELO, E.

[1904] Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen*, **56**, 514–516.

ZORN, M.

[1935] A remark on a method in transfinite algebra. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **41**, 667–670.

Index