wi4041

Functieruimten

dr. K.P. Hart

Cursus 2003/2004

Inhoud

I

TOPOLOGISCHE RUIMTEN

We beginnen met de eigenschappen van metrische ruimten te inventariseren die eigenlijk alleen van de open verzamelingen afhangen; de *topologische eigenschappen.* Daarna definiëren we wat topologische ruimten zijn en bekijken we een paar voorbeelden.

1. TOPOLOGISCHE EIGENSCHAPPEN

Om te beginnen halen we op welke eigenschappen de familie der open verzamelingen van een metrische ruimten heeft. We herhalen nog even de definitie.

1.1. Definitie. Een deelverzameling U van een metrische ruimte X heet *open* als voor ieder punt p van U een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $B_\varepsilon(p) \subseteq U$.

De familie van alle open verzamelingen in X, *de topologie van* X, noteren we met $\mathcal{T}$. De volgende stelling is bij Voortgezette Analyse aan bod geweest.

1.2. Stelling. *De familie $\mathcal{T}$ voldoet aan de volgende drie eigenschappen.*

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,

(ii) *als* $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ *dan* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ *en*

(iii) *als* $\{U_i\}_i \subseteq \mathcal{T}$ *dan* $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$.

1.3. Opgave. Bewijs deze stelling.

We zullen nu een lijst maken van alle *topologische* eigenschappen en noties die we bij Voortgezette Analyse gezien hebben.

omgeving. Een *omgeving* van een punt p is een open verzameling die p bevat.

inwendig punt. Een punt p is een *inwendig punt* van een verzameling A als er een omgeving U van p is met $U \subseteq A$.

inwendige. Het *inwendige* van een verzameling A is de verzameling van al haar inwendige punten. Notatie $\operatorname{int} A$.

uitwendig punt. Een punt is een *uitwendig punt* van een verzameling A als het een inwendig punt van het complement van A is.

uitwendige. Het *uitwendige* van een verzameling is de verzameling van al haar uitwendige punten. Notatie $\operatorname{ext} A$

randpunt. Een punt is een *randpunt* als het noch een inwendig- noch een uitwendig punt van die verzameling is.

rand. De *rand* van een verzameling A is de verzameling van al haar randpunten. Notatie ∂A.

gesloten verzameling. Een verzameling is *gesloten* als ze het complement van een open verzameling is.

afsluiting. De *afsluiting* van een verzameling is de vereniging van die verzameling en haar rand. Notatie $\operatorname{cl} A$.

adherent punt. Een punt is een *adherent punt* van een verzameling als elke omgeving van dat punt de verzameling snijdt.

verdichtingspunt. Een punt p is een *verdichtingspunt* van een verzameling als elke omgeving van p punten van de verzameling bevat die ongelijk zijn aan p.

dichte deelverzameling. Een deelverzameling A van een ruimte X heet *dicht* als $\operatorname{cl} A = X$.

G_δ-verzameling. Een verzameling is een G_δ-verzameling als zij geschreven kan worden als doorsnede van een aftelbare collectie open verzamelingen.

F_σ-verzameling. Een verzameling is een F_σ-verzameling als zij geschreven kan worden als vereniging van een aftelbare collectie gesloten verzamelingen.

1.4. Opgave. Ga na dat de collectie $\mathcal{F}$ van gesloten verzamelingen in een metrische ruimte de volgende eigenschappen heeft.

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{F}$,
(ii) als $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ dan $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ en
(iii) als $\{F_i\}_i \subseteq \mathcal{F}$ dan $\bigcap_i F_i \in \mathcal{F}$.

1.5. Opgave. Definieer voor een deelverzameling A van een metrische ruimte

$$A^\circ = \bigcup\{U : U \text{ is open en } U \subseteq A\}$$

en

$$\bar{A} = \bigcap\{F : F \text{ is gesloten en } A \subseteq F\}$$

Bewijs dat $A^\circ = \operatorname{int} A$ en $\bar{A} = \operatorname{cl} A$.

1.6. Opgave. In deze opgave is X een metrische ruimte en $A \subseteq X$. Bewijs de volgende formules/uitspraken:

(i) $\operatorname{cl} A = X \setminus \operatorname{ext} A$,
(ii) $\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(X \setminus A)$,
(iii) $\partial A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$,
(iv) $x \in \operatorname{cl} A$ dan en slechts dan als x een adherent punt is van A en
(v) A is dicht in X dan en slechts dan als $U \cap A \neq \varnothing$ voor elke niet-lege open deelverzameling van X.

Continuïteit is ook met behulp van alléén open verzamelingen te beschrijven; de eerste stelling staat in het dictaat Voortgezette Analyse:

1.7. Stelling. *Een afbeelding $f\colon X \to Y$ is continu dan en slechts dan als voor elke open deelverzameling U van Y het volledig origineel $f^{-1}[U]$ open is in X.*

De volgende stelling staat niet expliciet in het dictaat Voortgezette Analyse maar zit al impliciet in de definitie opgesloten:

1.8. Stelling. *Laat $f\colon X \to Y$ een afbeelding tussen metrische ruimten zijn. Dan geldt: f is continu in $p \in X$ dan en slechts dan als voor elke omgeving U van $f(p)$ een omgeving V van p bestaat zó dat $f[V] \subseteq U$ (ofwel $V \subseteq f^{-1}[U]$).*

1.9. Opgave. Bewijs voorgaande stelling.

Het begrip homeomorfisme is ook topologisch; het is immers afgeleid van het begrip continuïteit. Een *homeomorfisme* tussen twee metrische ruimten is een continue bijectie waarvan de inverse afbeelding ook continu is.

De volgende eigenschappen die metrische ruimten kunnen hebben zijn ook topologisch:

splitsbaarheid. Een ruimte X heet *splitsbaar* als er twee niet-lege gesloten deelverzamelingen F en G van X bestaan zó dat $F \cap G = \varnothing$ en $X = F \cup G$.

samenhang. Een ruimte heet *samenhangend* als ze niet splitsbaar is.

compactheid. Een ruimte heet *compact* als elke open overdekking een eindige deeloverdekking heeft.

De Stelling van Stone-Weierstraß is ook een topologische stelling; in het bewijs speelt de metriek op de ruimte X geen rol, alleen de compactheid. Natuurlijk speelt de metriek op de ruimte $C(X)$ van continue functies van X naar $\mathbb{R}$ wel een rol omdat de stelling nu eenmaal zegt dat voor elke compacte ruimte X de bijbehorende metrische ruimte $C(X)$ een bepaalde eigenschap heeft.

Als laatste noemen we convergentie van rijen: een rij $\langle x_n \rangle_n$ convergeert naar een punt x dan en slechts dan als voor elke omgeving U van x een N bestaat zó dat $x_n \in U$ voor elke $n \geqslant N$.

De volgende eigenschappen zijn echte metrische eigenschappen; de metriek is niet uit de definitie weg te halen:

begrensdheid. Een metrische ruimte (X, d) heet *begrensd* als er een getal M bestaat zó dat $d(x, y) \leqslant M$ voor elke $x, y \in X$.

totale begrensdheid. Een metrische ruimte (X, d) heet *totaal begrensd* als voor elke $\varepsilon > 0$ de open overdekking $\{B_\varepsilon(x) : x \in X\}$ een eindige deeloverdekking heeft.

volledigheid. Een metrische ruimte (X, d) heet *volledig* als elke Cauchy-rij in X convergent is.

isometrie. Een *isometrie* tussen twee metrische ruimten is een bijectie die de afstand bewaart.

1.10. Opgave. Ga na dat bovenstaande eigenschappen niet topologisch zijn door telkens paren homeomorfe ruimten aan te geven waarvan één ruimte de eigenschap wel heeft en de ander niet.

2. TOPOLOGISCHE RUIMTEN

We gaan nu ‘vergeten’ dat we open verzamelingen met behulp van metrieken gemaakt hebben. We zullen structuren bekijken waar alléén een familie ‘open’ verzamelingen voorhanden is. Allereerst geven we de definitie van een topologie.

2.1. Definitie. Zij X een verzameling. Een *topologie* op X is een collectie $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen van X met de volgende drie eigenschappen (regelrecht uit Stelling 1.2 geciteerd):

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,
(ii) als $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ dan $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ en
(iii) als $\{U_i\}_i \subseteq \mathcal{T}$ dan $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}$.

2.2. Definitie. Een *topologische ruimte* is een paar $(X, \mathcal{T})$ waar X een verzameling is en $\mathcal{T}$ een topologie op X.

Voordat we een paar voorbeelden van topologische ruimten gaan bekijken merken we op dat alle *topologische* noties die we hierboven besproken hebben zich onmiddelijk naar de situatie van topologische ruimten laten vertalen; we weten dus meteen wanneer we een afbeelding tussen topologische ruimten continu (in een punt) zullen noemen of hoe we de afsluiting van een deelverzameling definiëren of wanneer een deelverzameling dicht ligt in een topologische ruimte.

2.3. Voorbeelden.

1. Op elke verzameling X is $\mathcal{T}_i = \{\varnothing, X\}$ een topologie; de zogeheten *indiscrete topologie*. Dit is de minimale topologie die op X gemaakt kan worden; ga na dat een indiscrete ruimte altijd samenhangend en compact is en dat elke niet-lege deelverzameling dicht ligt. Voorts is elke afbeelding naar X continu.
2. Het andere uiterste is de *discrete topologie*: dit is de collectie 2^X van *alle* deelverzamelingen van X. Deze topologie kennen we al; hij is met behulp van de discrete metriek gedefinieerd. Als X meer dan één punt bevat is de discrete topologie niet samenhangend; $(X, 2^X)$ is compact dan en slechts dan als X eindig is. Elke afbeelding met X als domein is continu.
3. Laat X nu een oneindige verzameling zijn. Definieer

$$\mathcal{T}_{ce} = \{\varnothing\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ is eindig}\}.$$

   Het is niet moeilijk in te zien dat $\mathcal{T}_{ce}$ een topologie is; de zogeheten *co-eindige topologie*. Een verzameling is dus gesloten dan en slechts dan als zij eindig is of gelijk aan X. Een co-eindige ruimte is altijd samenhangend en compact (ga na).
4. Een klassiek voorbeeld is het volgende: definieer een topologie $\mathcal{T}_s$ op $\mathbb{R}$ door: $U \in \mathcal{T}_s$ dan en slechts dan als voor elke $x \in U$ een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $[x, x+\varepsilon) \subseteq U$.* Ga na dat $\mathcal{T}_s$ inderdaad een topologie is. We zullen de topologische ruimte $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ met $\mathbb{S}$ aanduiden. Deze ruimte staat bekend als de *Sorgenfrey lijn*, de topologie $\mathcal{T}_s$ wordt ook wel de *speldentopologie* genoemd omdat hij bepaald wordt door spelden, dat wil zeggen: intervallen van de vorm $[a, b)$ (zie ook Voortgezette Analyse).

2.4. Afspraak. Als we een metrische ruimte tegenkomen zullen we deze altijd van zijn bijbehorende *metrische topologie* voorzien denken, tenzij uitdrukkelijk anders vermeld. In het bijzonder denken we ons $\mathbb{R}$ altijd voorzien van de gewone topologie.

2.5. Opgave. Laat X oneindig zijn en voorzien van de co-eindige topologie. Bewijs dat elke continue afbeelding $f\colon X \to \mathbb{R}$ constant is.

2.6. Opgave. Ga na of de ruimte $\mathbb{S}$ samenhangend is of compact. Toon aan dat de 'Entier' functie gedefinieerd door $x \mapsto [x]$, waar $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$ continu is van $\mathbb{S}$ naar $\mathbb{R}$. Bepaal, in $\mathbb{S}$, het inwendige van $[0,1]$ en de afsluiting van $(0,1)$.

Basis voor een topologie

In het dictaat Voortgezette Analyse is ook gedefinieerd wat een basis voor de open verzamelingen is. We herhalen deze definitie maar nu in de context van topologische ruimten.

2.7. Definitie. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Een *basis* voor de ruimte (of voor de topologie) is een deelcollectie $\mathcal{B}$ van $\mathcal{T}$ met de eigenschap dat voor elke $U \in \mathcal{T}$ een deelfamilie $\mathcal{B}'$ van $\mathcal{B}$ bestaat zó dat $U = \bigcup \mathcal{B}'$.

2.8. Voorbeelden.

1. In een metrische ruimte is de familie van alle open bollen een basis voor de topologie.
2. In de Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is de familie van alle half-open intervallen een basis.

We kunnen aan een collectie deelverzamelingen zien of hij een basis voor een topologie kan zijn; dit is de inhoud van de volgende stelling

---

* In deze topologie zijn de getallen alléén van boven te benaderen; denk aan het passen van schoenen: een beetje te groot mag, te klein is nooit goed.

2.9. Stelling. *Neem aan dat $\mathcal{B}$ een basis voor de topologie $\mathcal{T}$ op de verzameling X is. Dan voldoet $\mathcal{B}$ aan de volgende twee eigenschappen.*

(i) *Als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ en $x \in B_1 \cap B_2$ dan is er een $B \in \mathcal{B}$ zó dat $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$ en*
(ii) *$X = \bigcup \mathcal{B}$.*

Omgekeerd, als een familie $\mathcal{B}$ aan deze eigenschappen voldoet dan is er een topologie waar $\mathcal{B}$ een basis voor is.

Bewijs. De tweede eigenschap is duidelijk: ook X is open. De eerste eigenschap volgt uit het feit dat de doorsnede van twee open verzamelingen weer open is: als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ dan bestaat een collectie $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ met $B_1 \cap B_2 = \bigcup \mathcal{B}'$. Kies dan, als $x \in B_1 \cap B_2$ een $B \in \mathcal{B}'$ met $x \in B$.

Als $\mathcal{B}$ aan de basiseigenschappen voldoet dan nemen we voor $\mathcal{T}$ de collectie van alle mogelijke verenigingen van deelfamilies van $\mathcal{B}$. Het is niet moeilijk na te gaan dat $\mathcal{T}$ een topologie op X is. Om te zien dat $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ merken we op dat $B = \bigcup\{B\}$ voor elke $B \in \mathcal{B}$. We hebben voorts $\mathcal{T}$ zo gemaakt dat $\mathcal{B}$ automatisch een basis voor $\mathcal{T}$ is. □

2.10. Voorbeeld. Ga na dat de familie $\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ en } a < b\}$ aan de basiseigenschappen voldoet.

Een speciale plaats in de topologie wordt ingenomen door de ruimten met een aftelbare basis. In navolging van Hausdorff [1914] zegt men dat die ruimten aan het *tweede aftelbaarheidsaxioma** voldoen. Zo heeft $\mathbb{R}$ een aftelbare basis, de familie van alle open intervallen met rationale eindpunten.

2.11. Opgave. Bewijs dat $\mathbb{S}$ niet aan het tweede aftelbaarheids axioma voldoet.

Lokale bases

Een tweede manier om topologieën te maken is via lokale bases.

2.12. Definitie. Laat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte zijn en $x \in X$. Een *lokale basis in x* is een collectie $\mathcal{B}_x$ omgevingen van x met de eigenschap dat voor elke omgeving U van x er een $B \in \mathcal{B}_x$ is met $B \subseteq U$.

We noemen een lokale basis ook wel een *basis voor de omgevingen* of een *omgevingenbasis*.

2.13. Voorbeelden.

1. Het standaardvoorbeeld van een omgevingenbasis is natuurlijk de familie bollen rond een punt in een metrische ruimte. Als $x \in X$, waar (X,d) een metrische ruimte is dan zijn $\{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ en $\{B_{2^{-n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ lokale bases in x.
2. Als $x \in \mathbb{S}$ dan is $\{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ een omgevingenbasis voor x.

We kunnen ook topologieën maken door voor ieder punt x in een verzameling X een familie $\mathcal{B}_x$ te kiezen en deze als lokale bases te gebruiken. Hiertoe moeten we eerst uitzoeken welke eigenschappen zo'n 'toekenning van lokale bases' moet hebben.

2.14. Stelling. *Neem aan dat in de ruimte $(X, \mathcal{T})$ voor iedere $x \in X$ een lokale basis $\mathcal{B}_x$ gekozen is. Dan gelden de volgende eigenschappen.*

(i) *Voor elke x is $\mathcal{B}_x$ niet leeg en $x \in B$ voor elke $B \in \mathcal{B}_x$.*
(ii) *Als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ dan is er een $B \in \mathcal{B}_x$ zó dat $B \subseteq B_1 \cap B_2$.*
(iii) *Als $y \in B \in \mathcal{B}_x$ dan is er een $D \in \mathcal{B}_y$ zó dat $D \subseteq B$.*

---

* In het Engels: *The second axiom of countability.* Ruimten die aan het tweede aftelbaarheids axioma voldoen worden *second countable spaces* genoemd.

In eigenschap (iii) ligt opgesloten dat elk element van $\mathcal{B}_x$ open is; hij is omgeving van al zijn punten.

Neem nu aan dat we voor elk punt x in een verzameling X een collectie deelverzamelingen hebben gekozen zó dat aan (i), (ii) en (iii) van Stelling 2.14 is voldaan. Definieer $\mathcal{T}$ door: $U \in \mathcal{T}$ dan en slechts dan als voor elke $x \in U$ een $B \in \mathcal{B}_x$ bestaat zó dat $B \subseteq U$.

We gaan na dat $\mathcal{T}$ inderdaad een topologie is en dat voor elke x de familie $\mathcal{B}_x$ een lokale basis (voor $\mathcal{T}$) in x is.

Dat $\varnothing \in \mathcal{T}$ is duidelijk (waarom?) en om in te zien dat $X \in \mathcal{T}$ gebruiken we Eigenschap (i). Eigenschap (ii) zorgt er voor dat de doorsnede van twee elementen van $\mathcal{T}$ ook weer tot $\mathcal{T}$ behoort. Dat verenigingen van deelcollecties van $\mathcal{T}$ tot $\mathcal{T}$ behoren is ook niet moeilijk in te zien.

Eigenschap (iii) impliceert dat voor elke x elk element van $\mathcal{B}_x$ tot $\mathcal{T}$ behoort en daarmee volgt uit de definitie van $\mathcal{T}$ dat $\mathcal{B}_x$ inderdaad een omgevingenbasis voor x is.

Ook hier kan men een aftelbaarheids axioma formuleren. Een ruimte voldoet aan het *eerste aftelbaarheidsaxioma** als elk punt in de ruimte een aftelbare omgevingen basis heeft.

2.15. Voorbeelden.

1. Elke metrische ruimte voldoet aan het eerste aftelbaarheids axioma: Voor elke x is $\{B_{2^{-n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare lokale basis.
2. De Sorgenfrey lijn voldoet ook aan het eerste aftelbaarheids axioma.

2.16. Opgave. Als X aan het eerste aftelbaarheids axioma voldoet dan geldt voor elke punt x en elke deelverzameling A van X: $x \in \operatorname{cl} A$ dan en slechts dan als er een rij in A is die naar x convergeert.

2.17. Voorbeeld. We nemen $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$, het bovenhalfvlak. We wijzen voor elk punt in X een lokale basis aan. Voor elk punt (x,y) in X stellen we $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{B(x,y,n) : n \in \mathbb{N}\}$, waar de verzamelingen $B(x,y,n)$ als volgt gedefinieerd zijn.

Voor een punt (x,y) met $y > 0$ en voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we

$$B(x,y,n) = \{(s,t) \in X : \|(s,t) - (x,y)\| < 2^{-n}\},$$

de gewone open cirkelschijf om (x,y) met straal 2^{-n}.

Voor een punt $(x,0)$ en voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we

$$B(x,0,n) = \{(x,0)\} \cup \{(s,t) \in X : \|(s,t) - (x,2^{-n})\| < 2^{-n}\},$$

de verzameling die bestaat uit het punt $(x,0)$ en de open cirkelschijf met straal 2^{-n} die in $(x,0)$ de x-as raakt, zie Figuur 1.

Figuur 1. Basisomgevingen in het Niemytzki vlak

* In het Engels: *The first axiom of countability.* Ruimten die aan het eerste aftelbaarheids axioma voldoen worden *first countable spaces* genoemd.

Deze topologische ruimte staat bekend als het *Niemytzki vlak*.

2.18. Opgave. Toon aan dat de toekenning in het Niemytzki vlak inderdaad aan de eigenschappen uit Stelling 2.14 voldoet.

Bewijs vervolgens dat het Niemytzki vlak samenhangend is en dat *elke* deelverzameling van de x-as gesloten is.

2.19. Voorbeeld. We nemen de volgende deelverzameling van $\mathbb{R}^2$:

$$X = \big\{(0,0)\big\} \cup \big\{(2^{-n},0) : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{(2^{-n},2^{-m}) : n,m \in \mathbb{N}\big\}.$$

We kennen elk punt een lokale basis toe: de punten ongelijk aan $(0,0)$ krijgen hun gewone omgevingen. Voor het punt $(0,0)$ doen we iets speciaals: voor elke $n \in \mathbb{N}$ en elke functie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiëren we

$$\begin{aligned} B(f,n) = \big\{(0,0)\big\} &\cup \big\{(2^{-m},0) : m \in \mathbb{N}, m \geqslant n\big\} \\ &\cup \big\{(2^{-m},2^{-l}) : m \in \mathbb{N}, m \geqslant n, l \geqslant f(m)\big\}. \end{aligned}$$

We zetten $\mathcal{B}_{(0,0)} = \big\{B(f,n)\big\}_{f,n}$.

2.20. Opgave. Toon aan dat in Voorbeeld 2.19 inderdaad een goede toekenning van lokale bases is gedaan. Bewijs dat $(0,0)$ in de afsluiting van $A = \big\{(2^{-n},2^{-m}) : n,m \in \mathbb{N}\big\}$ zit maar dat geen enkele rij in A naar $(0,0)$ convergeert. Deze ruimte voldoet dus niet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

II

NIEUWE TOPOLOGISCHE EIGENSCHAPPEN

We zullen in dit deel een aantal nieuwe topologische eigenschappen introduceren. Deze eigenschappen vertellen iets over de mogelijkheid punten te onderscheiden; deze worden dan ook *scheidingsaxioma's* genoemd.

Afspraak. We zullen vanaf nu veelal over 'de topologische ruimte X' spreken en de topologie $\mathcal{T}$ niet altijd expliciet noemen.

3. SCHEIDINGSAXIOMA'S

Als we met de indiscrete topologie werken kunnen we geen onderscheid maken tussen verschillende punten: er is maar één niet-lege open verzameling en dus hebben alle punten dezelfde familie omgevingen. We zullen eerst een paar eigenschappen formuleren die een steeds groter onderscheid tussen punten mogelijk maken.

Punten van punten scheiden

De eenvoudigste *scheidingseigenschap* is de volgende:

3.1. Definitie. Een topologische ruimte X heet een T_0*-ruimte* als de collecties omgevingen per punt verschillen. Met andere woorden: als $x \neq y$ dan is er een omgeving van x waar y niet in zit of omgekeerd.

3.2. Voorbeelden.
1. De eenvoudigste T_0-ruimte is $X = \{0,1\}$ met als open verzamelingen $\varnothing$, $\{0\}$ en X.
2. Een ander voorbeeld krijgen we door $\mathbb{R}$ te nemen en als basis de collectie $\bigl\{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\bigr\}$.

We zien dat T_0-ruimten al een redelijke hoeveelheid open verzamelingen moeten hebben. De volgende stelling impliceert dat er tenminste zoveel open verzamelingen moet zijn als punten in de ruimte.

3.3. Stelling. *Een ruimte X is een T_0-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x, y \in X$ geldt: als $x \neq y$ dan $\operatorname{cl}\{x\} \neq \operatorname{cl}\{y\}$.*

Bewijs. Als X een T_0-ruimte is en $x \neq y$ dan is er bijvoorbeeld een omgeving van y waar x niet in zit; we zien dat $y \notin \operatorname{cl}\{x\}$.

Omgekeerd laat $x, y \in X$ en stel dat $x \in \operatorname{cl}\{y\}$. Dan volgt meteen dat $\operatorname{cl}\{x\} \subseteq \operatorname{cl}\{y\}$. Als ook nog $y \in \operatorname{cl}\{x\}$ dan volgt $\operatorname{cl}\{y\} \subseteq \operatorname{cl}\{x\}$ en dus $\operatorname{cl}\{x\} = \operatorname{cl}\{y\}$ en daarmee, volgens onze veronderstelling, $x = y$. We zien: als $x \neq y$ dan $x \notin \operatorname{cl}\{y\}$ of $y \notin \operatorname{cl}\{x\}$; in beide gevallen is er een omgeving die het ene punt wel heeft en het andere punt niet. □

3.4. Opgave. Bepaal $\operatorname{cl}\{x\}$ voor de punten van de ruimten in de voorbeelden uit 3.2.

Een nog betere manier om punten uit elkaar te houden is door in Definitie 3.1 het woord 'of' te vervangen door 'en'.

3.5. Definitie. Een topologische ruimte X heet een T_1*-ruimte* als voor elk tweetal verschillende punten x en y in X omgevingen U van x en V van y bestaan met $x \notin V$ en $y \notin U$.

Een handige karakterizering van T_1-ruimten is de volgende.

3.6. Stelling. *Een ruimte X is een T_1-ruimte dan en slechts dan als $\{x\}$ gesloten is voor elke $x \in X$.*

Bewijs. Bewijs zelf de implicatie van links naar rechts.

De implicatie van rechts naar links volgt door, bij gegeven x en y, respectievelijk $U = X \setminus \{y\}$ en $V = X \setminus \{x\}$ te nemen. □

De volgende stelling volgt meteen uit de definities of uit de karakterizeringen.

3.7. Stelling. *Elke T_1-ruimte is een T_0-ruimte.*

3.8. Voorbeelden.

1. Elke co-eindige topologie is T_1; de co-eindige topologie is in feite de kleinste T_1-topologie die op een verzameling te maken is.
2. Een eindige T_1-ruimte is discreet (ga na).
3. Elke metrische ruimte is een T_1-ruimte: als $x \neq y$ neem $U = B_r(x)$ en $V = B_r(y)$, waar $r = d(x, y)$.

3.9. Opgave. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Bewijs: de ruimte $(X, \mathcal{T})$ is T_1 dan en slechts dan als $\mathcal{T}_{ce} \subseteq \mathcal{T}$.

Een nog betere puntenscheiding krijgen we als volgt.

3.10. Definitie. Een topologische ruimte X heet een T_2- of *Hausdorff ruimte* als elk tweetal verschillende punten in X disjuncte omgevingen heeft; dus als $x \neq y$ dan zijn er een omgeving U van x en een omgeving V van y zó dat $U \cap V = \varnothing$.

Het moge duidelijk zijn dat elke T_2-ruimte een T_1-ruimte is. Het onderscheid wordt nog iets duidelijker door de volgende karakterizeringen.

3.11. Stelling. *Zij X een topologische ruimte.*

(i) *X is een T_1-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ geldt $\{x\} = \bigcap\{U : U$ is een omgeving van $x\}$.*

(ii) *X is een T_2-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ geldt $\{x\} = \bigcap\{\operatorname{cl} U : U$ is een omgeving van $x\}$.*

3.12. Voorbeelden.

1. Elke metrische ruimte is Hausdorff: als $x \neq y$ dan $B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing$ waar $r = d(x, y)/2$.
2. De Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is Hausdorff: als $x < y$ dan zijn $(-\infty, y)$ en $[y, \infty)$ disjunkte omgevingen van x en y.
3. Ga na dat het Niemytzki vlak en de ruimte uit Voorbeeld 2.19 ook Hausdorff zijn.

Uit de Voortgezette Analyse kennen we volgende stelling voor metrische ruimten.

3.13. Stelling. *Laat f en g continue afbeeldingen zijn van een topologische ruimte X naar een Hausdorff ruimte Y. Dan is de verzameling $A = \big\{x \in X : f(x) = g(x)\big\}$ gesloten in X.*

Bewijs. Doe dit zelf; het is makkelijker te bewijzen dat $X \setminus A$ open is. □

3.14. Opgave. Maak een continue afbeelding f van $\mathbb{R}$ met de gewone topologie naar $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{ce})$ zó dat $\{x : f(x) = x\} = \mathbb{Q}$.

3.15. Opgave. Bewijs dat in een Hausdorff ruimte elk rijtje ten hoogste één limiet heeft. Laat ook zien dat in $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{ce})$ de rij $\langle n \rangle_n$ naar elk punt van $\mathbb{N}$ convergeert.

Punten en gesloten verzamelingen scheiden

We maken onze lijst van scheidingseigenschappen nog iets langer. Om te beginnen scheiden we punten van gesloten verzamelingen.

3.16. Definitie. Een ruimte X heet een T_3-*ruimte* als voor elke gesloten verzameling F in X en elk punt $x \in X \setminus F$ disjunkte open verzamelingen U en V bestaan met $x \in U$ en $F \subseteq V$.

Met behulp van complementen krijgen we de volgende karakterizering van de T_3-eigenschap.

3.17. Stelling. *Een ruimte X is een T_3-ruimte dan en slechts dan als voor elke $x \in X$ en elke omgeving U van x er een omgeving V van x is zó dat $\operatorname{cl} V \subseteq U$.*

3.18. Voorbeelden.
1. Elke metrische ruimte heeft de T_3-eigenschap: als U een omgeving van x is en $B_r(x) \subseteq U$ dan $\operatorname{cl} B_{r/2}(x) \subseteq U$.
2. De Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is een T_3-ruimte: als U een omgeving van x is en $[x, x+\varepsilon) \subseteq U$ neem dan $V = [x, x+\varepsilon)$ want $\operatorname{cl} V = V$.

3.19. Opgaven.
1. Toon aan dat het Niemytzki vlak een T_3-ruimte is. *Aanwijzing*: Toon aan dat voor elke punt (x, y) en elke n de inclusie $\operatorname{cl} B(x, y, n+1) \subseteq B(x, y, n)$ geldt.
2. Toon aan dat de ruimte uit Voorbeeld 2.19 een T_3-ruimte is.
   Aanwijzing: Elke basisomgeving is open-en-gesloten.

We kunnen de T_3-eigenschap wat interessanter maken door er de T_0-eigenschap bij op te tellen:

3.20. Definitie. Een topologische ruimte X heet *regulier* als ze een T_0- en een T_3-ruimte is.

De reden is dat we dan een versterking van de Hausdorff eigenschap krijgen.

3.21. Stelling. *Elke reguliere ruimte is een Hausdorff ruimte.*

Bewijs. Stel $x \neq y$ in de reguliere ruimte X. Neem aan dat bijvoorbeeld $x \notin \operatorname{cl}\{y\}$; gebruik nu de T_3-eigenschap. □

3.22. Voorbeelden.
1. Zij $X = [0, 1]$ het eenheidsinterval. Geef elk punt $x > 0$ zijn gewone omgevingen. Voor het punt 0 en elke $n \in \mathbb{N}$ zetten we $B(0, n) = [0, 2^{-n}) \setminus \{2^{-m} : m \in \mathbb{N}\}$. Dit levert een legitiem systeem van omgevingenbases. De zo verkregen ruimte is Hausdorff (ga na). Omdat $\operatorname{cl} B(0, n) = [0, 2^{-n}]$ voor elke n is de ruimte niet regulier (ga na).
2. Neem $X = \mathbb{R}$ en stel

$$\mathcal{T} = \{U \setminus C : U \text{ is open in de gewone topologie en } C \text{ is aftelbaar}\}.$$

Ga na dat $\mathcal{T}$ een Hausdorff topologie is die niet regulier is.

De volgende scheidingseigenschap is de sterkste die we voorlopig zullen beschouwen. De definitie zal niet als een verrassing komen.

3.23. Definitie. Een ruimte X heet een T_4-*ruimte* als voor elk tweetal disjunkte gesloten verzamelingen F en G in X disjunkte open verzamelingen U en V bestaan met $F \subseteq U$ en $G \subseteq V$.

3.24. Voorbeelden.

1. Elke metrische ruimte heeft de T_4-eigenschap: laat F en G disjuncte en gesloten verzamelingen in de metrische ruimte X zijn. Kies voor elke $x \in F$ een getal $r(x) > 0$ zó dat $B_{3r(x)}(x) \cap G = \varnothing$ en kies analoog $r(x) > 0$ voor elke $x \in G$. Stel nu $U = \bigcup\{B_{r(x)}(x) : x \in F\}$ en $V = \bigcup\{B_{r(x)}(x) : x \in G\}$. Ga na dat $U \cap V = \varnothing$ (zelfs $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \varnothing$).
2. De ruimten uit Voorbeeld 3.2 zijn T_4-ruimten omdat daar geen disjunkte gesloten verzamelingen zijn.
3. De Sorgenfrey lijn $\mathbb{S}$ is een T_4-ruimte: Als F en G gesloten en disjunkt zijn kies dan voor $x \in F$ ($x \in G$) een $\varepsilon_x > 0$ zó dat $[x, x + \varepsilon_x) \cap G = \varnothing$ (of $[x, x + \varepsilon_x) \cap F = \varnothing$). Ga na dat $U = \bigcup\{[x, x + \varepsilon_x) : x \in F\}$ en $V = \bigcup\{[x, x + \varepsilon_x) : x \in G\}$ disjunkt zijn.

Zoals uit bovenstaande voorbeelden blijkt is de combinatie van T_4 en T_0 niet zo interessant. De combinatie van T_4 en T_1 is dat wel.

3.25. Definitie. Een topologische ruimte X heet *normaal* als ze een T_1- en een T_4-ruimte is.

Omdat in een T_1-ruimte punten gesloten verzamelingen opleveren is de volgende stelling meteen duidelijk.

3.26. Stelling. *Elke normale ruimte is regulier.*

Niet elke reguliere ruimte is normaal.

3.27. Voorbeeld. Het Niemytzki vlak is niet normaal. Om dit in te zien nemen we de volgende disjunkte gesloten verzamelingen: $F = \{(x, 0) : x \in \mathbb{Q}\}$ en $G = \{(x, 0) : x \in \mathbb{P}\}$ (we gebruiken $\mathbb{P}$ voor de verzameling der irrationale getallen). Laat $U \supseteq F$ en $V \supseteq G$ open verzamelingen zijn; we moeten aantonen dat $U \cap V \neq \varnothing$. Dit zal ons enige zweetdruppels kosten.

We beginnen met $\mathbb{P}$ op te delen in aftelbaar veel stukken: voor elke n stellen we

$$G_n = \{x \in \mathbb{P} : B(x, 0, n) \subseteq V\}.$$

We beweren nu: als $x \in \operatorname{cl} G_n$ (ten opzichte van de gewone topologie van $\mathbb{R}$) dan $(x, 0) \in \operatorname{cl} V$ (in het Niemytzki vlak).

Stel maar dat $\langle x_i \rangle_i$ een rij in G_n is met limiet x. We bewijzen dat $B(x, 0, n) \setminus \{(x, 0)\}$ overdekt wordt door de familie $\{B(x_i, 0, n) : i \in \mathbb{N}\}$. Laat $(p, q) \in B(x, 0, n) \setminus \{(x, 0)\}$ en zij $\varepsilon = 2^{-n} - \|(x, 2^{-n}) - (p, q)\|$. Voor elke i met $|x_i - x| < \varepsilon$ geldt $\|(x_i, 2^{-n}) - (p, q)\| < 2^{-n}$ (driehoeksongelijkheid) en dus $(p, q) \in B(x_i, 0, n)$. We zien dat $B(x, 0, n) \setminus \{(x, 0)\} \subseteq V$ en dus dat $(x, 0) \in \operatorname{cl} V$.

Rest nog te bewijzen dat $\operatorname{cl} G_n \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ voor een $n \in \mathbb{N}$: neem dan q in de doorsnede en kies $m \geqslant n$ met $B(q, 0, m) \subseteq U$.

Neem eens aan dat $\operatorname{cl} G_n \cap \mathbb{Q} = \varnothing$ voor alle n. We gebruiken de Neststelling van Cantor om tot een tegenspraak te komen.

Neem een aftelling $\langle q_n \rangle_n$ van de rationale getallen. Kies een gesloten interval I_1 om 0 zó dat $I_1 \cap G_1 = \varnothing$ (dit kan omdat $0 \notin \operatorname{cl} G_1$). Kies vervolgens een deelinterval J_1 van I_1 met $q_1 \notin J_1$. We gaan verder met inductie: als J_n gevonden is kiezen we eerst een rationaal getal q in het inwendige van J_n. Vervolgens kiezen we, omdat $q \notin \operatorname{cl} G_{n+1}$, een gesloten interval I_{n+1} om q disjunkt van G_{n+1}. Tenslotte verkleinen we I_{n+1} tot een interval J_{n+1} met $q_{n+1} \notin J_{n+1}$.

Volgens de Neststelling is er een punt x in $\bigcap_n I_n$. Omdat we alle rationale getallen vermeden hebben zit x niet in $\mathbb{Q}$. Omdat $\mathbb{P} = \bigcup_n G_n$ en omdat we elke G_n hebben vermeden zit x ook niet in $\mathbb{P}$. Dit is een duidelijke tegenspraak.

3.28. Opgave. In Voorbeeld 3.27 is verkapt de Stelling van Baire gebruikt. Deze Stelling zegt: *als $\langle F_n \rangle_n$ een rij nergens dichte deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ is dan is het complement van $\bigcup_n F_n$ een dichte deelverzameling van $\mathbb{R}$.*

Een verzameling A heet *nergens dicht* als $\operatorname{int}\operatorname{cl} A = \varnothing$.

a) Bewijs de Stelling van Baire. *Aanwijzing*: Loop het bewijs in Voorbeeld 3.27 nauwkeurig na.
b) Bewijs met behulp van de Stelling van Baire dat $\mathbb{Q}$ geen G_δ-verzameling van $\mathbb{R}$ is.
c) Bewijs met behulp van de Stelling van Baire dat het Niemytzki vlak niet normaal is.

Normale ruimten

Normale ruimten hebben een paar eigenschappen die reguliere ruimten niet hebben; de belangrijkste, voor ons, is dat normale ruimten een groot aantal continue functies naar $\mathbb{R}$ hebben.

Voor we de stelling die al die continue functies levert formuleren en bewijzen moeten we de T_4-eigenschap een beetje herformuleren.

Allereerst een formulering in termen van gesloten en open verzamelingen.

3.29. Lemma. *Een ruimte X is een T_4-ruimte dan en slechts dan als voor elke gesloten verzameling F en elke open verzameling U met $F \subseteq U$ een open verzameling V bestaat met $F \subseteq V \subseteq \operatorname{cl} V \subseteq U$.*

Bewijs. Gegeven F en U bekijk de disjunkte gesloten verzamelingen F en $X \setminus U$. Als $O_1 \supseteq F$ en $O_2 \supseteq X \setminus U$ open en disjunkt zijn dan geldt $\operatorname{cl} O_1 \subseteq U$.

Omgekeerd, als F en G disjunkt en gesloten zijn kies dan $U \supseteq F$ met $\operatorname{cl} U \subseteq X \setminus G$ en neem $V = X \setminus \operatorname{cl} U$. □

We kunnen de T_4-eigenschap ook iets versterken.

3.30. Lemma. *Als X een T_4-ruimte is en F en G gesloten en disjunkt in X dan bestaan open verzamelingen $U \supseteq F$ en $V \supseteq G$ zó dat $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \varnothing$.*

Bewijs. Kies disjunkte open verzamelingen $O_1 \supseteq F$ en $O_2 \supseteq G$. Kies dan $U \supseteq F$ met $\operatorname{cl} U \subseteq O_1$ en neem $V = O_2$. □

De volgende stelling staat bekend als het Lemma van Urysohn.

3.31. Stelling. *Een ruimte X is een T_4-ruimte dan en slechts dan als voor elk tweetal gesloten en disjunkte verzamelingen F en G een continue functie $f\colon X \to [0,1]$ bestaat met $f \restriction F \equiv 0$ en $f \restriction G \equiv 1$.*

Bewijs. Van rechts naar links is niet moeilijk: gegeven de continue functie f kunnen we $U = f^{-1}\bigl[[0, \frac{1}{2})\bigr]$ en $V = f^{-1}\bigl[(\frac{1}{2}, 1]\bigr]$ nemen.

Van links naar rechts zal wat meer moeite kosten. Laten we eens kijken wat we nodig hebben. Als $f\colon X \to [0,1]$ een functie is zoals gevraagd dan kunnen we voor elke $r \in (0,1)$ de open verzameling $U_r = f^{-1}\bigl[[0, r)\bigr]$ nemen. De zo verkregen familie open verzamelingen bepaalt de functie geheel: er geldt namelijk, voor elke x en elke r,

$$f(x) < r \text{ dan en slechts dan als } x \in U_r,$$

en dus

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in U_r\}, & \text{als } x \in \bigcup_r U_r \text{ en} \\ 1, & \text{als } x \notin \bigcup_r U_r. \end{cases} \tag{$*$}$$

De familie $\{U_r : 0 < r < 1\}$ heeft nog een andere eigenschap namelijk:

$$\text{als } s < r \text{ dan } \operatorname{cl} U_s \subseteq U_r. \tag{$**$}$$

We zien: een continue functie van X naar $\mathbb{R}$ bepaalt een familie open verzamelingen met eigenschap $(**)$ en die familie bepaalt de functie volgens formule $(*)$.

Hierdoor geïnspireerd zullen we proberen een familie open verzamelingen $\{U_r : 0 < r < 1\}$ te maken die aan $(**)$ voldoet en dan via formule $(*)$ een functie definiëren en *aantonen dat die functie continu is*.

We beginnen met de U_r te maken voor elke $r \in \mathbb{Q}$. We nemen hiertoe aftelling $\langle q_n \rangle_n$ van $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ met $q_0 = 0$ en $q_1 = 1$. Om te beginnen kiezen we twee open verzamelingen U_0 en U_1 zó dat

$$F \subseteq U_0 \subseteq \operatorname{cl} U_0 \subseteq U_1 \subseteq X \setminus G.$$

Vervolgens kiezen we een open verzameling U_{q_2} zó dat

$$\operatorname{cl} U_0 \subseteq U_{q_2} \subseteq \operatorname{cl} U_{q_2} \subseteq U_1.$$

Laat nu U_{q_i} gevonden zijn voor alle $i < n$ (waar $n \geqslant 3$) zó dat

$$\text{als } i, j < n \text{ en } q_i < q_j \text{ dan } \operatorname{cl} U_{q_i} \subseteq U_{q_j}. \tag{$\dagger$}$$

We zoeken een U_{q_n} zó dat $(\dagger)$ ook geldt voor $i, j \leqslant n$. We kijken waar q_n ligt ten opzichte van de q_i met $i < n$; kies $i_0, i_1 < n$ zó dat $q_{i_0} < q_n < q_{i_1}$ en zó dat geen enkele q_i met $i < n$ in het interval (q_{i_0}, q_{i_1}) ligt. We kunnen nu een open verzameling U_{q_n} kiezen met

$$\operatorname{cl} U_{q_{i_0}} \subseteq U_{q_n} \subseteq \operatorname{cl} U_{q_n} \subseteq U_{q_{i_1}}.$$

Aan het eind van deze constructie hebben we een familie $\bigl\{U_q : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\bigr\}$ van open verzamelingen met eigenschap $(**)$. Definieer nu $U_r = \bigcup_{q \leqslant r} U_q$ voor $r \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Voor de grotere collectie geldt eigenschap $(**)$ ook: als $r < s$ dan kiezen we eerst p en q in $\mathbb{Q}$ met $r < p < q < s$. Dan volgt makkelijk dat $\operatorname{cl} U_r \subseteq \operatorname{cl} U_p \subseteq U_q \subseteq U_s$.

Definieer nu $f\colon X \to [0,1]$ via formule $(*)$. We beweren dat f continu is. Neem $x \in X$ en een interval (r, s) om $f(x)$. Kies p en q met $r < p < f(x) < q < s$ en neem $U = U_q \setminus \operatorname{cl} U_p$; U is open en omdat $p < f(x) < q$ geldt $x \in U$. Verder geldt dat $f[U] \subseteq (r, s)$: als $y \in U$ dan $p \leqslant f(y) \leqslant q$.

Tenslotte: als $x \in F$ dan $x \in U_r$ voor alle r, dus $f(x) = 0$ en als $x \in G$ dan $x \notin \bigcup_r U_r$ dus $f(x) = 1$. □

3.32. Opgave. Voor metrische ruimten is het heel makkelijk een functie als in Stelling 3.31 te vinden; ga na dat

$$f(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)}$$

voldoet.

Met behulp van het Lemma van Urysohn kunnen we ook een fraaie beschrijving van gesloten G_δ-verzamelingen (en dus ook van open F_σ-verzamelingen) geven.

3.33. Opgave. Zij X een normale ruimte. Een gesloten verzameling F in X is een G_δ-verzameling dan en slechts dan als een continue functie $f\colon X \to \mathbb{R}$ bestaat met $F = \{x : f(x) = 0\}$. *Aanwijzing*: Van rechts naar links is makkelijk. Van links naar rechts: stel $F = \bigcap_n O_n$ en kies voor elke n een continue $f_n\colon X \to [0,1]$ met $f_n \restriction F \equiv 0$ en $f_n \restriction (X \setminus O_n) \equiv 1$. Beschouw nu $f = \sum_n 2^{-n} f_n$.

Volledig reguliere ruimten

We besluiten dit hoofdstuk met een eigenschap die tussen normaliteit en regulariteit in zit.

3.34. Definitie. Een topologische ruimte X heet een $T_{3\frac{1}{2}}$*-ruimte* als voor elke gesloten deelverzameling F van X en elk punt $x \in X \setminus F$ een continue functie $f\colon X \to [0,1]$ bestaat met $f(x) = 0$ en $f \restriction F \equiv 1$.

Een ruimte die zowel T_0 als $T_{3\frac{1}{2}}$ is noemen we *volledig regulier* of een *Tychonoff ruimte*.

3.35. Opgave. Bewijs dat elke normale ruimte volledig regulier is en dat elke volledig reguliere ruimte regulier is.

3.36. Opgave. Bewijs dat elke deelruimte van een volledig reguliere ruimte weer volledig regulier is.

Uit deze beide opgaven volgt dat elke deelruimte van een normale ruimte volledig regulier is. Dit is het beste dat men kan zeggen; niet elke deelruimte van een normale ruimte hoeft normaal te zijn.

3.37. Voorbeelden.

1. Daar elke normale ruimte volledig regulier is is elke metrische ruimte volledig regulier; geef hiervan een direct bewijs.
2. De Sorgenfrey lijn is dus ook volledig regulier; dit is ook direct in te zien: als F gesloten is en $x \notin F$ kies dan $y > x$ met $[x, y) \cap F = \varnothing$. De functie f gedefinieerd door

$$f(p) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant p < y \text{ en} \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$

voldoet duidelijk.

3.38. Voorbeeld. Het Niemytzki vlak is volledig regulier; omdat de ruimte niet normaal is moeten we dit met de hand laten zien. Voor de punten boven de x-as kunnen we de gewone metriek van $\mathbb{R}^2$ gebruiken om continue functies te maken.

Neem nu een punt $(x, 0)$ op de x-as en definieer voor elke $r \in (0, 1]$

$$U_r = \bigl\{(x, 0)\bigr\} \cup \bigl\{(p, q) : \|(p, q) - (x, r)\| < r\bigr\}.$$

Eenvoudig is in te zien dat elke U_r open is en dat $\operatorname{cl} U_r \subseteq U_s$ als $r < s$. Als in het bewijs van het Lemma van Urysohn definiëren we nu

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in U_r\}, & \text{als } x \in \bigcup_r U_r \text{ en} \\ 1, & \text{als } x \notin \bigcup_r U_r. \end{cases}$$

Dit geeft een continue functie met $f(x, 0) = 0$ en $f(p, q) = 1$ als $(p, q) \notin U_1$. Door deze functie te herschalen kunnen we voor elke omgeving U van $(x, 0)$ een functie g vinden met $g(x, 0) = 0$ en $g(p, q) = 1$ voor $(p, q) \notin U$.

3.39. Voorbeeld. We maken het plaatje volledig door een voorbeeld te geven van een reguliere ruimte die niet volledig regulier is. We maken hiertoe een topologie op het bovenhalfvlak.

De punten boven de x-as maken we geïsoleerd, dat wil zeggen, als z niet op de x-as ligt dan is $\bigl\{\{z\}\bigr\}$ een lokale basis in z.

Voor een punt $(x, 0)$ op de x-as maken we basisomgevingen als volgt: eerst stellen we $L_1(x) = \bigl\{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant 1\bigr\}$ (het verticale lijntje ter lengte 1 vanuit $(x, 0)$) en $L_2(x) = \bigl\{(x+y, y) : 0 \leqslant y \leqslant 1\bigr\}$ (het lijntje dat onder een hoek van $\pi/4$ vanuit $(x, 0)$ vertrekt). Vervolgens zetten we $L_x = L_1(x) \cup L_2(x)$. Als lokale basis in $(x, 0)$ nemen we $\mathcal{B}_x = \{L_x \setminus F : F$ is eindig en $(x, 0) \notin F\}$. De zo verkregen ruimte is regulier, zelfs volledig regulier want elke basisomgeving is open-en-gesloten.

We voegen nog één punt ∞ toe, met basisomgevingen

$$U_n(\infty) = \{\infty\} \cup \bigl\{(x, y) : x \geqslant n\bigr\} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ga na dat $\operatorname{cl} U_{n+1} = U_{n+1} \cup \bigl\{(x, 0) : n < x \leqslant n + 1\bigr\}$; de zo verkregen ruimte M is dus nog steeds regulier: $\operatorname{cl} U_{n+1} \subseteq U_n$. Zie ook Figuur 2.

Figuur 2. Omgevingen in Voorbeeld 3.39

De ruimte is niet volledig regulier. Neem maar eens een continue functie $f\colon M \to [0, 1]$ met $f(x, 0) = 0$ voor $x \leqslant 0$. We bewijzen dat $f(\infty) = 0$.

Hiertoe merken we eerst het volgende op: voor elke $x \in \mathbb{R}$ is er een aftelbare verzameling $A_x \subseteq L_x$ zó dat als $\boldsymbol{p} \in L_x \setminus A_x$ dan $f(\boldsymbol{p}) = f(x, 0)$; immers voor elke n is er een eindige verzameling F_n zó dat $\bigl|f(\boldsymbol{p}) - f(x, 0)\bigr| < 2^{-n}$ voor $\boldsymbol{p} \in L_x \setminus F_n$, neem nu $A_x = \bigcup_n F_n$.

We bewijzen nu: voor elke n zijn er maar aftelbaar veel $x \in [n, n+1)$ waarvoor $f(x, 0) \neq 0$. Voor $n < 0$ klopt dit. Neem $n \geqslant 0$ en neem aan dat het al klopt voor $k < n$. Kies een rij $\langle x_i \rangle_i$ in $[n - 1, n)$ die naar n convergeert en zó dat $f(x_i, 0) = 0$ voor alle i.

Projecteer de vereniging $\bigcup_i \bigl(L_2(x_i) \cap A_{x_i}\bigr)$ op de x-as; we krijgen een aftelbare verzameling A. Neem nu $x \in [n, n+1) \setminus A$; de lijn $L_1(x)$ snijdt dan $L_2(x_i) \setminus A_{x_i}$ voor bijna alle i. Elke omgeving van $(x, 0)$ snijdt dus ook bijna alle $L_2(x_i) \setminus A_{x_i}$. Hieruit volgt dat $f(x, 0) = 0$.

3.40. Opgave. Voeg nog een extra punt $-\infty$ aan de ruimte M uit Voorbeeld 3.39 toe, met basisomgevingen $U_n(-\infty) = \{-\infty\} \cup \bigl\{(x, y) : x \leqslant -n\bigr\}$. Deze nieuwe ruimte noemen we M^+.

Bewijs nu dat $f(\infty) = f(-\infty)$ voor elke continue functie $f\colon M^+ \to \mathbb{R}$.

3.41. Opgave. Bestudeer nu het artikel [1972] van van Douwen of maak Opgave 2.7.17 in het boek [1989] van Engelking.

III

COMPACTHEID EN PRODUCTEN

We zullen nu de klasse der compacte Hausdorff ruimten beschouwen. Willekeurige compacte ruimten zijn over het algemeen niet zo interessant; de compactheidseigenschap komt pas goed tot z'n recht als de Hausdorff eigenschap erbij wordt opgeteld.

In het tweede hoofdstuk van dit deel maken we producten van topologische ruimten.

4. EENVOUDIGE EIGENSCHAPPEN

Om te beginnen herhalen we de definitie van compactheid nog maar eens even.

4.1. Definitie. Een topologische ruimte is *compact* als elke open overdekking van die ruimte een eindige deeloverdekking heeft.

4.2. Voorbeelden.
1. Elke eindige ruimte is compact.
2. Elke ruimte met de co-eindige topologie is compact.
3. De Sorgenfrey lijn, het Niemytzki vlak en de ruimte uit Voorbeeld 2.19 zijn niet compact.
4. Elk gesloten en begrensd interval in $\mathbb{R}$ is compact, ten opzichte van de gewone topologie.

Door in de definitie over te gaan op complementen krijgen we de volgende herformulering van compactheid. Een ruimte is compact dan en slechts dan als elke familie gesloten verzamelingen met lege doorsnede een eindige deelfamilie heeft die ook een lege doorsnede heeft.

In de praktijk gebruiken we de contrapositieve formulering:

4.3. Stelling. *Een ruimte is compact dan en slechts dan als elke familie gesloten verzamelingen waarvan elke eindige deelfamilie een niet-lege doorsnede heeft zelf ook een niet-lege doorsnede heeft.*

In plaats van de zin 'elke eindige deelfamilie heeft een niet-lege doorsnede' zeggen we dat de familie de *eindige doorsnede eigenschap** heeft.

We zullen nu wat eigenschappen van compacte ruimten bekijken; sommige van deze eigenschappen kennen we in feite al van de cursus Voortgezette Analyse.

4.4. Stelling. *Zij $f\colon X \to Y$ een continue surjectieve afbeelding, waarbij X een compacte ruimte is, dan is Y ook compact.*

4.5. Stelling. *Elke gesloten deelruimte van een compacte ruimte is compact.*

De stelling dat compacte deelruimten van metrische ruimten gesloten zijn geldt niet voor willekeurige topologische ruimten.

4.6. Voorbeeld. Neem $\mathbb{N}$ met de co-eindige topologie en neem de deelruimte $2\mathbb{N}$. Dan is $2\mathbb{N}$ compact (want zij draagt de co-eindige topologie) maar niet gesloten.

We kunnen wel de volgende stelling bewijzen.

---

* Engels: *finite intersection property.*

4.7. Stelling. *Zij X een Hausdorff ruimte en Y een compacte deelruimte van X, dan is Y gesloten in X.*

Bewijs. Het bewijs is instructief genoeg om volledig na te lopen.

Zij $x \in X \setminus Y$; we zoeken een omgeving U van x die disjunct is van Y. Kies hiertoe voor elke $y \in Y$ een omgeving U_y van x en een omgeving V_y van y zó dat $U_y \cap V_y = \varnothing$.

We hebben nu een open overdekking van Y: de familie $\{V_y : y \in Y\}$. Neem een eindige deeloverdekking, zeg $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_k}\}$.

Maak nu $U = \bigcap_{i=1}^k U_{y_i}$ en $V = \bigcup_{i=1}^k V_{y_i}$; dan zijn U en V disjunct, x is een element van U en $Y \subseteq V$.

We hebben dus niet alleen laten zien dat x een omgeving heeft die disjunct is van Y, we hebben zelfs disjuncte omgevingen voor x en Y gevonden. □

Door het bewijs van deze stelling even na te lopen krijgen we vrijwel meteen de volgende stelling cadeau.

4.8. Stelling. *Elke compacte Hausdorff ruimte is regulier.*

En als we het bewijs nog beter bekijken dan zien we ook dat de volgende stelling waar is.

4.9. Stelling. *Elke compacte Hausdorff ruimte is normaal.*

Een andere stelling uit de Voortgezette Analyse zegt dat een continue bijectie van een compacte metrische ruimte naar een andere metrische ruimte automatisch een homeomorfisme is. Deze stelling geldt onverkort voor compacte Hausdorff ruimten. Het bewijs is ook hetzelfde.

4.10. Stelling. *Zij $f\colon X \to Y$ een continue bijectie, waarbij X compact is en Y Hausdorff. Dan is f een homeomorfisme.*

Bewijs. Om de continuïteit van f^{-1} te bewijzen moeten we aantonen dat $f[A]$ gesloten is in Y voor elke gesloten verzameling A in X.

Welnu: A is compact dus $f[A]$ is compact dus $f[A]$ is gesloten. □

Deze stelling vertelt ons iets over de plaats van compacte Hausdorff topologieën tussen de andere topologieën. Immers, stel $\mathcal{T}$ en $\mathcal{S}$ zijn topologieën op dezelfde verzameling X. Neem aan dat $\mathcal{T}$ compact is, dat $\mathcal{S}$ Hausdorff is en dat $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Dan volgt uit bovenstaande stelling dat $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ omdat de identieke afbeelding een continue bijectie van $(X, \mathcal{T})$ naar $(X, \mathcal{S})$ is.

4.11. Opgave. Leid uit bovenstaande opmerking af dat compacte Hausdorff topologieën *minimaal Hausdorff* en *maximaal compact* zijn: elke topologie met echt minder open verzamelingen is niet meer Hausdorff en elke topologie met echt meer open verzamelingen is niet meer compact.

5. PRODUCTEN

Een fundamenteel stuk gereedschap in de topologie is dat van het product van topologische ruimten. Men gebruikt de producttopologie zowel bij het construeren van tegenvoorbeelden als bij het bewijzen van stellingen.

We voeren eerst eindige producten in en laten vervolgens zien hoe men het product van oneindig veel topologische ruimten maakt.

Eindige producten

Om te beginnen de definitie van het product van een eindig aantal verzamelingen.

5.1. Definitie. Laat X_1, X_2,…, X_n een eindig aantal verzamelingen zijn. Het *product* van die verzamelingen is de verzameling van alle (geordende) n-tallen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die voldoen aan $x_i \in X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

We noteren het product als $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ of $\prod_{i=1}^n X_i$.

5.2. Voorbeelden.

1. Volgens deze definitie is $\mathbb{R}^n$ inderdaad het product van n kopieën van $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ is dus de verzameling van punten in het vlak waarvan de tweede coördinaat rationaal is.

Voor de gewone topologie van $\mathbb{R}^n$ is de verzameling van open rechthoeken een basis. Dit idee gebruiken we om een topologie op andere producten te maken.

5.3. Definitie. Laat $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, …, $(X_n, \mathcal{T}_n)$ een eindige familie topologische ruimten zijn.

Een *open blok* in $\prod_{i=1}^n X_i$ is een verzameling van de vorm $\prod_{i=1}^n U_i$ waar telkens U_i open is in X_i.

5.4. Lemma. *De familie van open blokken is een basis voor een topologie op* $\prod_{i=1}^n X_i$.

Bewijs. Ga zelf na dat de doorsnede van twee open blokken weer een open blok is en dat de open blokken het product overdekken. Pas vervolgens Stelling 2.9 toe. □

5.5. Definitie. Laat $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, …, $(X_n, \mathcal{T}_n)$ een eindige familie topologische ruimten zijn.

De *producttopologie* op $\prod_{i=1}^n X_i$ is de topologie die de familie der open blokken als basis heeft.

De verzameling $\prod_{i=1}^n X_i$ met de producttopologie noemen we het *product* van de ruimten $(X_1, \mathcal{T}_1)$, …, $(X_n, \mathcal{T}_n)$.

Bij de definitie van de producttopologie hebben we ons laten leiden door de situatie in $\mathbb{R}^n$. Er is nog een andere reden om de producttopologie te definiëren zoals we dat gedaan hebben: de projecties van het product naar de factoren zijn continu en de producttopologie is de 'zuinigste' topologie die dit klaarspeelt.

5.6. Definitie. Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$ een product van een n-tal verzamelingen en $i \leqslant n$. De afbeelding $\pi_i \colon X \to X_i$ gedefinieerd door $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ heet de *projectie op de i-de coördinaat of factor*.

5.7. Stelling. *Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$ een product van een n-tal topologische ruimten. Dan is elke projectie $\pi_i \colon X \to X_i$ continu. Elke andere topologie die de projecties continu maakt is groter dan de producttopologie.*

Bewijs. Dat elke π_i continu is is eenvoudig: als $U \subseteq X_i$ open is dan is $\pi_i^{-1}[U]$ een open blok (wat zijn de factoren?).

Omgekeerd, stel $\mathcal{T}$ is een topologie die de projecties continu maakt. Dan volgt meteen dat voor elke i en elke open verzameling U van X_i het open blok $\pi_i^{-1}[U]$ tot $\mathcal{T}$ behoort. Elke eindige doorsnede van dit soort open blokken behoort dan ook tot $\mathcal{T}$ (want $\mathcal{T}$ is een topologie); maar zo krijgen we nu net alle open blokken.

Conclusie: $\mathcal{T}$ bevat alle open blokken en dus ook willekeurige verenigingen van open blokken. Maar dit is precies wat we wilden aantonen. □

Met behulp hiervan kunnen we laten zien dat continuïteit van een afbeelding *naar* een product hetzelfde is als coördinaatsgewijze continuïteit.

5.8. Stelling. *Zij $X = \prod_{i=1}^n X_i$ een product van een n-tal topologische ruimten. Dan geldt: een afbeelding $f\colon Y \to X$ is continu dan en slechts dan als alle samenstellingen $\pi_i \circ f$ continu zijn.*

Bewijs. Als f continu is, dan is zeker elke $\pi_i \circ f$ continu. (Ga na!)

Omgekeerd, neem aan dat elke samenstelling $\pi_i \circ f$ continu is. Zij $y \in Y$, en zij $U = \prod_i U_i$ een basisomgeving van $f(y)$. Nu geldt voor $z \in Y$ dat $f(z) \in U$ dan en slechts dan als voor elke i de i-de coördinaat van $f(z)$ tot U_i behoort. Die i-de coördinaat is precies $\pi_i\bigl(f(z)\bigr)$.

We kunnen dus narekenen dat

$$f^{-1}[U] = \bigcap_{i=1}^{n} (\pi_i \circ f)^{-1}[U_i],$$

waarmee is aangetoond dat $f^{-1}[U]$ een omgeving van y is. $\square$

In het algemeen zullen we in een situatie als deze de afbeelding $\pi_i \circ f$ noteren als f_i.

Omgekeerd kunnen we uit een stel afbeeldingen $f_i\colon Y \to X_i$ een afbeelding f van Y naar X maken: definieer maar $f(y) = \bigl(f_1(y), f_2(y), \ldots, f_n(y)\bigr)$. De afbeelding f heet wel de *diagonaal* van de afbeeldingen f_1, f_2, …, f_n. We noteren de diagonaal als $f = \triangle_{i=1}^n f_i$ of $f = f_1 \triangle f_2 \triangle \cdots \triangle f_n$.

Bij Voortgezette Analyse is bewezen dat elk begrensd en gesloten blok in $\mathbb{R}^n$ compact is. Een zorgvuldige analyse van dat bewijs geeft de volgende stelling.

5.9. Stelling. *Het product van een eindig aantal compacte topologische ruimten is compact.*

We gebruiken het bovengenoemde bewijs om een handige stelling over compacte rechthoeken in producten af te leiden. Door in het bewijs de rechthoek gelijk te nemen aan het hele product zien we dat het product zelf ook compact is.

5.10. Stelling. *Laat C en D compacte deelverzamelingen zijn van respectievelijk de ruimten X en Y en zij O een omgeving van $C \times D$. Dan bestaan omgevingen U van C en V van D zó dat $U \times V \subseteq O$.*

Bewijs. Neem eerst $x \in C$ vast en kies voor elke $y \in D$ omgevingen W_y van x en V_y van y met $W_y \times V_y \subseteq O$. Omdat D compact is zijn er y_1, y_2, …, y_n in D zó dat $D \subseteq V^x = \bigcup_i V_{y_i}$. Definieer $U_x = \bigcap_i W_{y_i}$; dan volgt $\{x\} \times D \subseteq U_x \times V^x \subseteq O$.

Gebruik nu de compactheid van C om $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in C te vinden zó dat $C \subseteq U = \bigcup_i U_{x_i}$. Definieer nu $V = \bigcap_i V^{x_i}$, dan volgt $C \times D \subseteq U \times V \subseteq O$. $\square$

Eén van de bewijzen dat $\mathbb{R}^2$ samenhangend is laat zich generaliseren.

5.11. Stelling. *Het product van eindig veel samenhangende ruimten is samenhangend.*

5.12. Opgave. Bewijs voor elk van de onderstaande eigenschappen dat het product de eigenschap heeft, zodra elke factor deze heeft.

T_0, T_1, T_2, regulier, volledig regulier en het hebben van een aftelbare basis.

5.13. Opgave. Het product van de Sorgenfrey lijn met zichzelf is niet normaal.
Aanwijzing: Bekijk op de 'nevendiagonaal' de verzamelingen $Q = \bigl\{(q, -q) : q \in \mathbb{Q}\bigr\}$ en $P = \bigl\{(p, -p) : p \in \mathbb{P}\bigr\}$. Laat zien dat Q en P gesloten zijn. Pas nu het argument voor het Niemytzki vlak uit Voorbeeld 3.27 aan.

5.14. Opgave. Het product van een eindig aantal metrizeerbare topologische ruimten is metrizeerbaar. *Aanwijzing*: Definieer, naar analogie met $\mathbb{R}^n$, een metriek op $\prod_{i=1}^n X_i$ door

$$d\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big)=\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i),$$

waar telkens d_i een metriek op X_i is die de topologie genereert.

Oneindige producten

Om te beginnen moeten we afspreken wat het product van een willekeurige familie verzamelingen zou moeten zijn. Het antwoord ligt, na enig nadenken, eigenlijk voor de hand; als we eindig veel—zeg n—verzamelingen hebben dan bestaat het product uit geordende n-tallen punten waarbij telkens de i-de coördinaat uit de i-de verzameling komt. Zo'n n-tal is in feite een functie met domein $\{1,2,\ldots,n\}$ die voor elke i een punt in X_i kiest—een keuzefunctie.

5.15. Definitie. Laat $\{X_t\}_{t\in T}$ een familie verzamelingen zijn. Het *product* van die verzamelingen is gedefinieerd als de verzameling van alle keuzefuncties van die familie; we noteren het product als $\prod_{t\in T} X_t$.

Dus $x\in\prod_{t\in T}X_t$ dan en slechts dan als x een functie is met domein T zó dat $x(t)\in X_t$ voor alle t. Om de suggestie van coördinaten te versterken schrijven we x_t in plaats van $x(t)$ en $x=(x_t)_{t\in T}$.

Vervolgens nemen we aan dat elke X_t een topologische ruimte is, met topologie $\mathcal{T}_t$. De vraag is nu hoe we $\prod_{t\in T}X_t$ van een topologie zullen voorzien. We laten ons leiden door een natuurlijke eis, namelijk dat de projecties continu moeten zijn en dat dit zo zuinig mogelijk moet gebeuren. Vergelijk hiertoe Stelling 5.7.

5.16. Definitie. Zij $X=\prod_{t\in T}X_t$ een product van een familie verzamelingen en neem $s\in T$. De afbeelding $\pi_s\colon X\to X_s$ gedefinieerd door $\pi_s\big((x_t)_{t\in T}\big)=x_s$ heet de *projectie op de s-de coördinaat of factor*.

Als we willen dat elke projectie continu is dan moet voor elke t en voor elke open verzameling U in X_t het volledig origineel $\pi_t^{-1}[U]$ open zijn. Voorts moeten eindige doorsneden van dit soort verzamelingen ook weer open zijn. Dit leidt ons ertoe een speciaal soort open blokken te beschouwen die we, ietwat slordig, eindige open blokken zullen noemen.

5.17. Definitie. Zij $X=\prod_{t\in T}X_t$ een product van een familie topologische ruimten. Een *eindig open blok* in X is een verzameling van de vorm $\prod_{t\in T}U_t$, waarbij U_t een open deelverzameling van X_t is voor elke t èn waarbij voor ten hoogste eindig veel t geldt dat $U_t\neq X_t$.

Nu is het product zelf een eindig open blok en de doorsnede van twee eindige open blokken is weer een eindig open blok. De familie der eindige open blokken is dus een basis voor een topologie op het product. Dit wordt dan de producttopologie.

5.18. Definitie. Zij $X=\prod_{t\in T}X_t$ een product van een familie topologische ruimten. De *producttopologie* op X is de topologie die de familie der eindige open blokken als basis heeft.

De verzameling X met de producttopologie noemen we het *product* van de familie ruimten $\big\{(X_t,\mathcal{T}_t):t\in T\big\}$.

De geldigheid van de volgende stelling hebben we als het ware gewoon geforceerd.

5.19. Stelling. *Zij $X=\prod_{t\in T}X_t$ een product van een familie topologische ruimten. Dan is elke projectie $\pi_t\colon X\to X_t$ continu. Elke andere topologie die ook de projecties continu maakt is groter dan de producttopologie.*

Het bewijs staat in feite hierboven en is geheel analoog aan dat van Stelling 5.7.

Stelling 5.8, in aangepaste vorm, geldt ook.

5.20. Stelling. *Zij $X = \prod_{t\in T} X_t$ een product van een familie topologische ruimten. Dan geldt: een afbeelding $f\colon Y \to X$ is continu dan en slechts dan als alle samenstellingen $\pi_t \circ f$ continu zijn.*

Het bewijs levert geen nieuwe problemen op; we gebruiken immers *eindige* open blokken om de topologie te maken.

Tenslotte kunnen we uit een familie afbeeldingen $f_t\colon Y \to X_t$ weer een afbeelding f van Y naar X maken via $f(y) = \bigl(f_t(y)\bigr)_{t\in T}$. We noemen f weer de *diagonaal* van de afbeeldingen $\{f_t\}_{t\in T}$. De notatie blijft dezelfde: $f = \triangle_{t\in T} f_t$.

5.21. Opgave. Bewijs voor elk van de onderstaande eigenschappen dat het product de eigenschap heeft, zodra elke factor deze heeft.

T_0, T_1, T_2, regulier en volledig regulier.

5.22. Opgave. Bewijs: Een aftelbaar product van ruimten met een aftelbare basis heeft zelf ook een aftelbare basis.

5.23. Stelling. *Zij $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ een product van een aftelbare familie metrizeerbare ruimten. Dan is X zelf ook metrizeerbaar.*

Bewijs. We kunnen op elke ruimte X_n een metriek d_n kiezen die de topologie voortbrengt en die begrensd is door 1. We definiëren vervolgens een metriek op X door

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n).$$

Het is eenvoudig na te gaan dat d een metriek is. Het kost iets meer moeite na te gaan dat d de producttopologie voortbrengt.

Zij U open in de producttopologie en $x \in U$; we moeten een $\varepsilon > 0$ vinden zó dat $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Kies eerst een eindig open blok $\prod_n U_n$ met $x \in \prod_n U_n \subseteq U$ en kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $U_n = X_n$ als $n \geqslant N$. Vervolgens bepalen we voor elke $n < N$ een $\varepsilon_n > 0$ zó dat $B_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq U_n$. Als we nu $\varepsilon > 0$ zó kunnen bepalen dat $d(x,y) < \varepsilon$ impliceert dat $d_n(x_n,y_n) < \varepsilon_n$ voor elke $n < N$ dan zijn we klaar (ga na dat dan $B_\varepsilon(x) \subseteq \prod_n U_n$).

Welnu, voor elke n geldt $d_n(x_n,y_n) \leqslant 2^n d(x,y)$; kies dus $\varepsilon = \min\{2^{-n}\varepsilon_n : n < N\}$ Dan geldt: Als $d(x,y) < \varepsilon$ dan geldt $d_n(x_n,y_n) < 2^n\varepsilon \leqslant 2^n 2^{-n}\varepsilon_n = \varepsilon_n$.

Zij nu U een d-open verzameling en $x \in U$; we zoeken een eindig open blok $\prod_n U_n$ zó dat $x \in \prod_n U_n \subseteq U$. Kies eerst $\varepsilon > 0$ zó dat $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ en kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $\sum_{n\geqslant N} 2^{-n} < \varepsilon/2$. Definieer

$$U_n = \begin{cases} B_{\varepsilon/2}(x_n) & \text{als } n < N \text{ en} \\ X_n & \text{als } n \geqslant N. \end{cases}$$

Als $y \in \prod_n U_n$ dan geldt

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n<N} 2^{-n} d_n(x_n,y_n) + \sum_{n\geqslant N} 2^{-n} d_n(x_n,y_n) \\ &< \sum_{n<N} 2^{-n}\varepsilon/2 + \sum_{n\geqslant N} 2^{-n} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

We zien dat $\prod_n U_n \subseteq B_\varepsilon(x)$. □

5.24. Gevolg. *De producten* $[0,1]^\infty$ *en* $\mathbb{R}^\infty$ *zijn metrizeerbaar.*

5.25. Opgave. Bewijs dat een product van een familie samenhangende ruimten weer samenhangend is.

5.26. Opgave. Er is nog een voor de hand liggende manier om een product van een topologie te voorzien. Hier laten we alle open blokken toe, dus willekeurige producten van de vorm $\prod_{t\in T} U_t$ met elke U_t open in X_t. De zo verkregen topologie heet de *doostopologie* (in het engels: *boxtopology*).

a) Ga na dat de familie van alle open blokken inderdaad als basis voor een topologie kan dienen.

Deze topologie heeft niet zulke mooie eigenschappen als de producttopologie. Neem maar eens het product $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, waarbij $X_n = [0,1]$ voor elke n.

b) De diagonaal $\triangle_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Id}_n$ is niet continu; $\mathrm{Id}_n\colon [0,1] \to X_n$ is de identieke afbeelding.
Aanwijzing: De waardenverzameling heeft, als deelruimte van X, de discrete topologie.

c) De doostopologie op X is niet samenhangend en niet metrizeerbaar.

IV

DE STELLING VAN TYCHONOFF

De Stelling van Tychonoff, die zegt dat het product van willekeurig veel compacte topologische ruimten weer compact is, is één van de belangrijkste stellingen uit de topologie. De stelling duikt in vele gedaanten op; wij hebben hem nodig bij het maken van de Čech-Stone compactificatie.

Voor we de stelling van Tychonoff kunnen bewijzen moeten we iets meer van compacte ruimten weten en een paar extra noties invoeren.

Om te zien wat we nodig hebben bekijken we hoe het bewijs voor eindig veel compacte ruimten verloopt. Stel X en Y zijn compact en laat $\{U_i \times V_i : i \in I\}$ een overdekking van $X \times Y$ zijn met open blokken. De cruciale stap is het vinden, voor elke $x \in X$, van een omgeving U_x van x zó dat de open strook $U_x \times Y$ door slechts eindig veel rechthoeken $U_i \times V_i$ wordt overdekt. Dit gaat via de compactheid van Y: er zijn eindig veel i, zeg $i_1, i_2, \ldots, i_n$, zó dat $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_k U_{i_k} \times V_{i_k}$. Neem dan $U_x = \bigcap_k U_{i_k}$.

De open overdekking $\{U_x : x \in X\}$ van X heeft dan een eindige deeloverdekking; met behulp hiervan kunnen we een eindige deeloverdekking van $\{U_i \times V_i : i \in I\}$ vinden.

We reduceren dus in feite een willekeurige open overdekking, via rechthoeken, tot een overdekking met stroken en een overdekking met stroken is in feite een overdekking van één van de factoren.

We zullen voor willekeurige producten hetzelfde doen, alleen zal het niet zo makkelijk gaan als voor eindig veel factoren: er is namelijk geen laatste factor waar we mee kunnen beginnen.

Er is een belangrijk stuk gereedschap dat ons in staat stelt veel oneindige zaken tot eindige proporties terug te brengen: dat gereedschap heet filter.

6. FILTERS EN ULTRAFILTERS

We zullen de Stelling van Tychonoff via een omweg bewijzen. We zetten eerst een theorie van convergentie in willekeurige topologische ruimten op, bewijzen vervolgens het analogon van de stelling dat een metrische ruimte compact is dan en slechts dan als elke rij in die ruimte een convergente deelrij heeft en bewijzen tenslotte dat die gegeneraliseerde convergentieëigenschap productief is.

De juiste generalisatie van rijen zijn de filters. Zie Definitie 6.8 en Voorbeeld 6.9.1 voor meer uitleg.

Filters

6.1. Definitie. Zij X een verzameling. Een collectie $\mathcal{F}$ van deelverzamelingen van X is een *filter* op X als

(i) $\varnothing \notin \mathcal{F}$,
(ii) als $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ dan is er een $F_3 \in \mathcal{F}$ zó dat $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$ en
(iii) als $F \in \mathcal{F}$ en $F \subseteq G$ dan $G \in \mathcal{F}$.

6.2. Voorbeelden.

1. Als $\langle x_n \rangle_n$ een rij in X is dan is de familie $\mathcal{F}$ gedefinieerd door: $F \in \mathcal{F}$ dan en slechts dan als er een $N \in \mathbb{N}$ is met $\{x_n : n \geqslant N\} \subseteq F$, een filter op X.

2. Als X een oneindige verzameling is dan is $\mathcal{F} = \{F : X \setminus F \text{ is eindig}\}$ een filter op X, het co-eindige- of Fréchet filter.
3. Als $x \in X$ dan is $\mathcal{F}_x = \{F : x \in F\}$ een filter op X.
4. Als X een topologische ruimte is en $x \in X$ dan is $\mathcal{U}_x = \{F : x \in \operatorname{int} F\}$ een filter, het *omgevingenfilter* van x.

We kunnen een filter ook beschrijven door een basis aan te geven.

6.3. Definitie. Zij X een verzameling. Een collectie $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van X heet een *filterbasis* op X als de familie $\mathcal{F} = \{F : \text{er is een } B \in \mathcal{B} \text{ met } B \subseteq F\}$ een filter is. We noemen $\mathcal{B}$ dan ook wel een *basis* voor het filter $\mathcal{F}$.

6.4. Voorbeelden.
We geven voor elk filter uit 6.2 een basis.

1. De familie van de 'staarten' van de rij $\langle x_n \rangle_n$ is een basis voor het bijbehorende filter; een *staart* is een verzameling van de vorm $\{x_n : n \geqslant N\}$.
2. Het co-eindige filter heeft geen voor de hand liggende basis, behalve als $X = \mathbb{N}$: dan nemen we de staarten van $\mathbb{N}$.
3. De familie $\big\{\{x\}\big\}$ is een basis voor $\mathcal{F}_x$.
4. Elke omgevingenbasis in x is een basis voor $\mathcal{U}_x$.

Het volgende lemma is eenvoudig te bewijzen.

6.5. Lemma. *Zij X een verzameling. Een collectie $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van X is een filterbasis dan en slechts dan als*

(i) $\varnothing \notin \mathcal{B}$ *en*
(ii) *als $F_1, F_2 \in \mathcal{B}$ dan is er een $F_3 \in \mathcal{B}$ zó dat $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$.*

Een voorbeeld dat bij compactheid een grote rol speelt is het volgende:

6.6. Voorbeeld. Stel $\{A_i : i \in I\}$ is een overdekking van een verzameling X zonder eindige deeloverdekking; dan is de familie van verzamelingen van de vorm $X \setminus \bigcup_{i \in F} A_i$, met F eindig, een filterbasis op X. Het bijbehorende filter $\mathcal{F}$ heeft een lege doorsnede want $\bigcap \mathcal{F} = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \varnothing$. Een filter met een lege doorsnede wordt een *vrij filter* genoemd.

Via dit voorbeeld is de volgende stelling snel in te zien.

6.7. Stelling. *Een ruimte X is compact dan en slechts dan als voor elk filter $\mathcal{F}$ op de ruimte geldt $\bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$.*

Bewijs. Als $\mathcal{F}$ een filter is beschouw dan $\mathcal{U} = \{X \setminus \operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\}$; geen eindige deelfamilie van $\mathcal{U}$ overdekt X (waarom niet?). Omdat X compact is kan $\mathcal{U}$ zelf dus ook X niet overdekken. Maar $X \setminus \bigcup \mathcal{U} = \bigcap \mathcal{F}$.

Omgekeerd, als X een overdekking $\mathcal{U}$ heeft zonder eindige deeloverdekking dan maken we uit $\mathcal{U}$ een filter $\mathcal{F}$ als in Voorbeeld 6.6. Maar dan geldt $\bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\} = \varnothing$. □

Bekijk nog eens het filter $\mathcal{F}$ dat bij een rij $\langle x_n \rangle_n$ hoort; neem eens aan dat de rij $\langle x_n \rangle_n$ naar een punt x convergeert. Dan behoort elke omgeving van x tot $\mathcal{F}$: convergentie betekent immers dan voor elke omgeving U van x een N bestaat zó dat $x_n \in U$ voor $n \geqslant N$. Dus als $x_n \to x$ dan $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$ en het omgekeerde is ook waar (ga maar na).

We komen tot de volgende definitie.

6.8. Definitie. Zij X een topologische ruimte, $\mathcal{F}$ een filter op X en $x \in X$. We zeggen dat het filter $\mathcal{F}$ naar het punt x *convergeert* als $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$.

6.9. Voorbeelden.

1. De opmerking die aan de Definitie 6.8 vooraf gaat zegt: een rijtje $\langle x_n \rangle_n$ convergeert naar een punt x dan en slechts dan als het bij de rij behorende filter naar x convergeert.
2. Het filter $\mathcal{U}_x$ convergeert dus zeker naar x; het is het kleinste filter dat naar x convergeert.
3. Het filter $\mathcal{F}_x$ convergeert ook naar x.

Neem nu eens aan dat $\mathcal{F}$ een filter is en dat $x \in \bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\}$. Dan is voor elke omgeving U van x en elk element F van $\mathcal{F}$ de doorsnede $U \cap F$ niet leeg. De familie $\mathcal{G} = \{U \cap F : U \in \mathcal{U}_x, F \in \mathcal{F}\}$ is zelfs een filter en we zien dat $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{G}$ en $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

We concluderen: als $x \in \bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\}$ dan is er een filter $\mathcal{G}$ zó dat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ en $\mathcal{G}$ convergeert naar x.

We noemen een filter $\mathcal{G}$ *fijner* dan een filter $\mathcal{F}$ als $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$; we noemen $\mathcal{F}$ dan ook *grover* dan $\mathcal{G}$.

We krijgen de volgende stelling (bewijs zelf de implicatie van rechts naar links).

6.10. Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een topologische ruimte X. Dan geldt voor elke $x \in X$ dat $x \in \bigcap\{\operatorname{cl} F : F \in \mathcal{F}\}$ dan en slechts dan als er een filter $\mathcal{G}$ is dat fijner is dan $\mathcal{F}$ en dat naar x convergeert.*

We kunnen nu het beloofde analogon van de stelling dat een metrische ruimte compact is dan en slechts dan als elke rij in die ruimte een convergente deelrij heeft formuleren en bewijzen.

6.11. Stelling. *Een topologische ruimte is compact dan en slechts dan als voor elk filter op die ruimte een fijner filter bestaat dat convergeert.*

Bewijs. Combineer Stellingen 6.7 en 6.10. □

Nu we convergentie van filters hebben gedefinieerd kunnen we dit gebruiken om afsluitingen en continuïteit te beschrijven.

6.12. Opgave. Zijn A een deelverzameling van een topologische ruimte X en $x \in X$. Bewijs: $x \in \operatorname{cl} A$ dan en slechts dan als er een filter $\mathcal{F}$ is met $A \in \mathcal{F}$ dat naar x convergeert.

Vervolgens bekijken we continuïteit. Allereerst moeten we beeldfilters definiëren. Dit gaat vrij natuurlijk; als $f\colon X \to Y$ een afbeelding is en $\mathcal{F}$ een filter op X dan is $\{f[F] : F \in \mathcal{F}\}$ een filterbasis op Y (ga na); het door deze basis voortgebrachte filter noteren we als $f(\mathcal{F})$ en we noemen dit het *beeldfilter* van $\mathcal{F}$ onder f.

6.13. Opgave. Laat $f\colon X \to Y$ een afbeelding tussen topologische ruimten zijn. Dan geldt:

a) Als $x \in X$ dan is f continu in x dan en slechts dan als voor elk filter op X dat naar x convergeert het beeldfilter naar $f(x)$ convergeert.
b) De afbeelding f is continu dan en slechts dan als voor elk convergent filter op X het beeldfilter ook convergeert (naar de juiste limiet).

We kunnen ook inzien dat convergentie in een product hetzelfde is als coördinaatsgewijze convergentie.

6.14. Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een product $X = \prod_{t \in T} X_t$ van topologische ruimten. Dan geldt: $\mathcal{F}$ convergeert naar $x = (x_t)_{t \in T}$ dan en slechts dan als voor elke t het filter $\pi_t(\mathcal{F})$ naar x_t convergeert.*

Bewijs. Omdat de projecties continu zijn volgt uit convergentie coördinaatsgewijze convergentie.

Omgekeerd, neem aan dat $\pi_t(\mathcal{F})$ naar x_t convergeert voor elke t. Zij U een basisomgeving van x, bepaald door $U_{t_1}, U_{t_2}, \ldots, U_{t_n}$.

Voor iedere i geldt dan dat $U_{t_i} \in \pi_{t_i}(\mathcal{F})$, dus $\pi_{t_i}(F_i) \subseteq U_{t_i}$ voor een $F_i \in \mathcal{F}$. Maar dan geldt $F_i \subseteq \pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}]$ en dus $\pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}] \in \mathcal{F}$ voor elke i.

Nu volgt $U \in \mathcal{F}$, want $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}]$. □

Ultrafilters

We gaan nu een speciaal soort filters bekijken: ultrafilters.

6.15. Definitie. Een *ultrafilter* is een filter waarvoor geen fijner filter bestaat.

Met andere woorden: als voor elke filter $\mathcal{G}$ met $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ geldt dat $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ ($\mathcal{F}$ is een *maximaal* filter) dan noemen we $\mathcal{F}$ een ultrafilter.

We bewijzen eerst een paar karakterizeringen van ultrafilters.

6.16. Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een filter op een verzameling X; dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(i) *$\mathcal{F}$ is een ultrafilter;*
(ii) *voor elke deelverzameling A van X geldt: als $A \cap F \neq \varnothing$ voor alle $F \in \mathcal{F}$ dan $A \in \mathcal{F}$;*
(iii) *voor elk tweetal deelverzamelingen A en B van X geldt: als $A \cup B \in \mathcal{F}$ dan $A \in \mathcal{F}$ of $B \in \mathcal{F}$;*
(iv) *voor elke deelverzameling A van X geldt: $A \in \mathcal{F}$ of $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Bewijs. (i) $\Rightarrow$ (ii): neem aan dat $A \cap F \neq \varnothing$ voor alle $F \in \mathcal{F}$. Dan is $\{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ een filterbasis (ga na!) en het filter $\mathcal{G}$ dat hierdoor wordt voortgebracht is fijner dan $\mathcal{F}$ en bevat A; maar dan $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ en dus $A \in \mathcal{F}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): neem aan dat $A \notin \mathcal{F}$. Dan geldt voor geen enkele $F \in \mathcal{F}$ dat $F \subseteq A$ (waarom?) en dus $F \cap X \setminus A \neq \varnothing$ voor alle $F \in \mathcal{F}$. Maar dan $X \setminus A \in \mathcal{F}$ en dus ook $(X \setminus A) \cap (A \cup B) \in \mathcal{F}$. Merk nu op dat $(X \setminus A) \cap (A \cup B) \subseteq B$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): pas (iii) toe op A en $X \setminus A$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): als $\mathcal{G}$ een filter zou zijn dat echt fijner was dan $\mathcal{F}$ dan was er een $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Maar dan ook $X \setminus A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ en dus $\varnothing \in \mathcal{G}$; dit is een tegenspraak. □

6.17. Opgave. Bewijs: als $\mathcal{F}$ een ultrafilter op X is en $f\colon X \to Y$ een afbeelding dan is het beeldfilter $f(\mathcal{F})$ ook een ultrafilter.

De volgende stelling volgt nu makkelijk uit Stelling 6.11.

6.18. Stelling. *In een compacte ruimte is elk ultrafilter convergent.*

Het omgekeerde is ook waar: als in een topologische ruimte elk ultrafilter convergeert dan is deze ruimte compact. Voor we dat kunnen bewijzen zullen we manieren moeten vinden om ultrafilters te maken. Dat is helaas niet makkelijk. Eén soort ultrafilters kunnen we eenvoudig beschrijven.

6.19. Voorbeeld. Als $x \in X$ dan is $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$ een ultrafilter.

Dit is ook het enige 'makkelijke' voorbeeld van een ultrafilter dat we kunnen geven. In tegenstelling tot 'gewone' filters zijn ultrafilters niet eenvoudig te beschrijven. Als voorbeeld dient de volgende stelling. We gebruiken hierbij de afbeelding $\varphi\colon 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ gedefinieerd door $\varphi(A) = \sum_{n \in A} 2^{-n}$.

6.20. Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een vrij ultrafilter op $\mathbb{N}$. De verzameling $U = \big\{\varphi(F) : F \in \mathcal{F}\big\}$ is niet Lebesgue-meetbaar.*

Het Keuzeaxioma

Om ultrafilters te kunnen maken hebben we iets nodig dat ons in één keer de sprong van 'eindig' naar 'oneindig' laat maken. Dat 'iets' is het *Keuzeaxioma*.

6.21. Het Keuzeaxioma. Als $\{X_t : t \in T\}$ een niet-lege familie van niet-lege verzamelingen is dan is het product $\prod_{t\in T} X_t$ niet leeg.

Dit lijkt op het intrappen van een open deur maar is het echt niet. Het punt is dat er geen *manier* gegeven wordt om ook maar *één* individueel punt in $\prod_{t\in T} X_t$ te maken.

6.22. Opmerking. Het Keuzeaxioma is geen stelling, we zullen niet proberen hem te bewijzen en sinds de zestiger jaren weten we dat we het ook niet kunnen. Evenmin kunnen we bewijzen dat het Keuzeaxioma fout is.

Om deze zinnen een beetje toe te lichten het volgende. Tot het begin van deze eeuw werd 'verzameling' gedefinieerd als 'een stel dingen bij elkaar' en er werd, ondanks deze nietszeggende definitie, belangrijk werk mee gedaan. Op een gegeven moment bleek dat deze onbeperkte definitie tot paradoxen leidde: 'de verzameling van alle verzamelingen is geen verzameling'.

Toen werd het tijd na te denken wat men wel en niet met verzamelingen kan en mag doen. Het resultaat van dit denkwerk was een stel leefregels (axioma's) waar je je bij het werken met verzamelingen aan moet houden.

Zo mag je, gegeven twee verzamelingen x en y een nieuwe verzameling maken die alleen x en y als elementen heeft: $\{x, y\}$.

Een ander axioma zegt dat bij elke verzameling x een verzameling z bestaat zó dat $z = \bigcup x$.

Uit deze twee kunnen we afleiden dat $x \cup y$ bestaat voor elk tweetal verzamelingen x en y: er geldt immers $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$.

Als je je aan deze (overigens vrij natuurlijke) regels houdt zal je paradoxen als 'de verzameling van alle verzamelingen' niet meer tegenkomen; die collectie is te groot om door de axioma's beschreven te worden.

Het Keuzeaxioma neemt tussen de axioma's een bijzondere plaats in omdat het, in tegenstelling tot de andere, duidelijk niet-constructief is. Net als bij het Parallelenpostulaat van Euclides in de meetkunde is heel hard geprobeerd het Keuzeaxioma uit de andere axioma's af te leiden of te laten zien dat het niet waar was; zoals boven opgemerkt zijn beide onmogelijk. Toevoeging van het Keuzeaxioma tot de rest van de lijst leidt niet tot tegenspraken net zo min als de toevoeging van zijn ontkenning.

De meerderheid van de wiskundigen gebruikt zonder problemen het Keuzeaxioma en wij doen dat verder ook.

Voor wie meer wil weten: pak een boek over verzamelingenleer uit de Bibliotheek.

We formuleren nog twee andere beweringen die met het Keuzeaxioma equivalent zijn. Hiertoe moeten we nog een paar extra noties definiëren.

6.23. Definitie. Zij X een verzameling. Een *partiële ordening*op X is een relatie op X, suggestief geschreven als $\preccurlyeq$, met de volgende drie eigenschappen.

(i) Voor alle $x \in X$ geldt $x \preccurlyeq x$.
(ii) Voor alle x en y in X geldt: als $x \preccurlyeq y$ en $y \preccurlyeq x$ dan $x = y$.
(iii) Voor alle x, y en z in X geldt: als $x \preccurlyeq y$ en $y \preccurlyeq z$ dan $x \preccurlyeq z$.

Deze eigenschappen brengen de eigenschappen van $\leqslant$ op $\mathbb{R}$ en $\subseteq$ op families verzamelingen onder één noemer. Beide relaties voldoen aan de drie eigenschappen.

De ordening $\leqslant$ heeft nog een eigenschap die $\subseteq$ niet heeft:

6.24. Definitie. Een *lineaire ordening* is een partiële ordening met de volgende extra eigenschap:
Als $x, y \in X$ dan geldt $x \preccurlyeq y$ of $y \preccurlyeq x$.

Het beste dat we kunnen krijgen is een lineaire ordening als op $\mathbb{N}$.

6.25. Definitie. Een *welordening* is een partiële ordening ten opzichte van welke elke niet-lege deelverzameling een kleinste element heeft. (Een welgeordende verzameling is dus automatisch lineair geordend.)

6.26. Voorbeelden.

1. Elke familie verzamelingen is door $\subseteq$ partieel geordend.
2. De verzameling $\mathbb{R}$ is door $\leqslant$ lineair geordend.
3. De verzameling $\mathbb{N}$ is door $\leqslant$ welgeordend.
4. Definieer $\preccurlyeq$ op $\mathbb{R}^2$ door $(x, y) \preccurlyeq (u, v)$ dan en slechts dan als $x \leqslant u$ en $y \geqslant v$; dan is $\preccurlyeq$ een partiële ordening die niet lineair is.
5. Definieer $\preccurlyeq$ op $\mathbb{R}^2$ door $(x, y) \preccurlyeq (u, v)$ dan en slechts dan als $x < u$, of $x = u$ en $y \leqslant v$; dan is $\preccurlyeq$ een lineaire ordening op $\mathbb{R}^2$. Dit is de *lexicografische ordening*.
6. De verzameling $\mathbb{N}^2$ is door de lexicografische ordening welgeordend.

We krijgen de volgende uitspraken.

6.27. De Welordeningsstelling. Elke verzameling kan welgeordend worden.

6.28. Het Lemma van Zorn. Als X een partieel geordende verzameling is waarin elke lineair geordende deelverzameling een bovengrens heeft dan heeft X een *maximaal element*, dat wil zeggen een element x zó dat er géén $y \neq x$ is met $x \preccurlyeq y$.

Net als het Keuzeaxioma zijn de Welordeningsstelling en het Lemma van Zorn niet constructief; er wordt niet gezegd hoe de welordening te maken of hoe het maximale element te vinden. Er wordt alleen gezegd dat ze er zijn.

Over de woorden 'stelling' en 'lemma': deze worden gebruikt omdat de beweringen uit het Keuzeaxioma afgeleid zijn. Men heeft bewezen (met gebruik van alleen de andere axioma's van de verzamelingenleer) dat het Keuzeaxioma, de Welordeningsstelling en het Lemma van Zorn equivalent zijn. Als de geschiedenis anders was gelopen hadden we nu misschien het Welordeningsaxioma en de Keuzestelling gehad.

We noemen nog een paar gevolgen van het Keuzeaxioma:

(i) Elke vectorruimte heeft een basis.

(ii) In een ring met 1 is elk ideaal bevat in een maximaal ideaal.

(iii) De stelling van Hahn-Banach: als V een vectorruimte is, C een convexe deelverzameling van V en W een deelruimte van V met $W \cap C = \varnothing$ dan bestaat een deelruimte U van V van codimensie 1 zó dat $W \subseteq U$ en $U \cap C = \varnothing$ (codimensie 1 betekent dat er een vector x in $V \setminus U$ is zó dat V opgespannen wordt door $U \cup \{x\}$).

Wij hebben de volgende stelling nodig:

6.29. Stelling (Ultrafilterstelling). *Zij X een verzameling en $\mathcal{F}$ een filter op X. Dan is er een ultrafilter $\mathcal{G}$ dat fijner is dan $\mathcal{F}$.*

Bewijs. We passen het Lemma van Zorn toe. Beschouw hiertoe de familie

$$\mathfrak{F} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ is een filter dat fijner is dan } \mathcal{F}\}.$$

De familie $\mathfrak{F}$ is partieel geordend door $\subseteq$. Neem eens aan dat $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ niet leeg is en lineair geordend door $\subseteq$ en stel $\mathcal{G} = \bigcup \mathfrak{F}'$.

Duidelijk geldt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ voor elke $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$; we beweren dat $\mathcal{G}$ een filter is.

(i) $\varnothing \notin \mathcal{G}$ omdat $\varnothing \notin \mathcal{H}$ voor elke $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$.

(ii) Als $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ kies dan $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ in $\mathfrak{F}'$ met $G_1 \in \mathcal{H}_1$ en $G_2 \in \mathcal{H}_2$. Nu geldt $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$ of $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1$, bijvoorbeeld de eerste mogelijkheid. Dan $G_1, G_2 \in \mathcal{H}_2$ en dus ook $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{H}_2$. Maar dan ook $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$.

(iii) Als $G \in \mathcal{G}$ en $G \subseteq H$ kies dan $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}'$ met $G \in \mathcal{H}$; dan geldt $H \in \mathcal{H}$ en dus $H \in \mathcal{G}$.

We zien dat $\mathcal{G}$ een filter is. Dus $\mathcal{G}$ is een bovengrens voor $\mathfrak{F}'$.

De partieel geordende verzameling $\mathfrak{F}$ voldoet aan de voorwaarden van het Lemma van Zorn, er is dus een maximaal element, noem dit $\mathcal{G}$. Dan is $\mathcal{G}$ een filter, $\mathcal{G}$ is fijner dan $\mathcal{F}$ en elk ander filter dat fijner is dan $\mathcal{G}$ behoort tot $\mathfrak{F}$ en is dus gelijk aan $\mathcal{G}$.

Conclusie: $\mathcal{G}$ is een ultrafilter dat fijner is dan $\mathcal{F}$. □

We kunnen nu het omgekeerde van Stelling 6.18 bewijzen.

6.30. Stelling. *Als in een topologische ruimte elk ultrafilter convergeert dan is de ruimte compact.*

Bewijs. Het bewijs is nu niet moeilijk meer. Volgens de Ultrafilterstelling is er voor elke filter een fijner ultrafilter en volgens de aanname convergeert dit ultrafilter. Pas nu Stelling 6.11 toe. □

We kunnen nu eindelijk de Stelling van Tychonoff bewijzen.

6.31. Stelling (Stelling van Tychonoff). *Een product van topologische ruimten is compact dan en slechts dan als elke factor compact is.*

Bewijs. Dat elke factor compact is als het product dat is volgt uit het feit dat de projecties continu zijn.

Neem nu aan dat elke factor X_t van het product $X = \prod_{t\in T} X_t$ compact is. Zij $\mathcal{F}$ een ultrafilter op X. Voor elke t is het beeldfilter $\pi_t(\mathcal{F})$ een ultrafilter (Opgave 6.17) en dus convergent, zeg naar een punt x_t.

Volgens Stelling 6.14 convergeert $\mathcal{F}$ naar het punt $(x_t)_{t\in T}$. □

We zullen nog een bewijs van de Stelling van Tychonoff geven; hierbij gaan we wat omslachtiger te werk maar we leren er wel iets nieuws van. Het bewijs maakt ook gebruik van ultrafilters.

We definiëren eerst netjes wat een open strook is.

6.32. Definitie. Een *open strook* in een product $\prod_{t\in T} X_t$ van topologische ruimten is een open blok dat maar van één coördinaat afhangt; dus een open blok van de vorm $\pi_t^{-1}[U]$ met U open in X_t.

Bewijs van de Stelling van Tychonoff, 2. Neem eens aan dat $\mathcal{U}$ een familie eindige open blokken is in $X = \prod_{t\in T} X_t$ zó dat geen eindige deelfamilie van $\mathcal{U}$ een overdekking is. Maak een filter $\mathcal{F}$ als in Voorbeeld 6.6, dus een basis voor $\mathcal{F}$ is de familie $\{X \setminus \bigcup \mathcal{U}' : \mathcal{U}'$ is een eindige deelfamilie van $\mathcal{U}\}$.

Neem vervolgens een ultrafilter $\mathcal{G}$ dat fijner is dan $\mathcal{F}$. Bekijk nu een $U \in \mathcal{U}$; U is de doorsnede van eindig veel open stroken: $U = \bigcap_{i=1}^n \pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}]$. Nu is $\mathcal{G}$ een ultrafilter en $X \setminus U \in \mathcal{G}$, er is dus een t_i zó dat $X \setminus \pi_{t_i}^{-1}[U_{t_i}] \in \mathcal{G}$.

Conclusie: bij elke $U \in \mathcal{U}$ is een strook U^+ te vinden zó dat $U \subseteq U^+$ en $X \setminus U^+ \in \mathcal{G}$.

We maken zo'n simultane keuze van stroken (Keuzeaxioma) en we bekijken de familie $\mathcal{U}^+ = \{U^+ : U \in \mathcal{U}\}$.

Omdat $U \subseteq U^+$ voor elke U geldt $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{U}^+$.

Voor elke eindige deelfamilie $\mathcal{V}$ van $\mathcal{U}^+$ geldt $X \setminus \bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{G}$, dus geen eindige deelfamilie van $\mathcal{U}^+$ is een overdekking.

Neem nu $t \in T$ vast en bekijk de deelfamilie $\mathcal{U}_t$ van $\mathcal{U}^+$ die bestaat uit stroken van de vorm $\pi_t^{-1}[O]$ met O open in X_t. Stel $\mathcal{V}_t = \{O : \pi_t^{-1}[O] \in \mathcal{U}_t\}$. Omdat geen eindige deelfamilie van $\mathcal{U}_t$

het product X overdekt kan geen eindige deelfamilie van $\mathcal{V}_t$ de ruimte X_t overdekken en omdat X_t compact is is $\mathcal{V}_t$ geen overdekking van X_t.

Kies nu (simultaan) $x_t \in X_t \setminus \bigcup \mathcal{V}_t$ voor elke t. Het punt $x = (x_t)_{t\in T}$ wordt niet door $\mathcal{U}^+$ overdekt en dus ook niet door $\mathcal{U}$. □

Dit bewijs is in feite een bewijs van een andere stelling. Om die te formuleren moeten we nog een definitie geven.

6.33. Definitie. Een *subbasis* voor een topologie $\mathcal{T}$ is een deelfamilie $\mathcal{S}$ van $\mathcal{T}$ zó dat de familie doorsneden van eindig veel elementen van $\mathcal{S}$ een basis is voor $\mathcal{T}$.

Merk op dat $\varnothing$ eindig is en een deelfamilie van elke familie; als $\mathcal{S}$ een subbasis is dan behoort $\bigcap \varnothing$ dus ook tot de bijbehorende basis. Maar

$$\bigcap \varnothing = \bigl\{x \in X : \forall S \in \varnothing\, [x \in S]\bigr\} = X,$$

dus: ongeacht of $\mathcal{S}$ de ruimte overdekt, de familie eindige doorsneden is altijd een overdekking.

6.34. Voorbeelden.

1. De familie van alle open stroken is een subbasis voor de producttopologie.
2. De familie van alle intervallen van de vorm $(-\infty, b)$ en (a, ∞) is een subbasis voor de gewone topologie van $\mathbb{R}$.

Een subbasis wordt meestal gebruikt om uit een familie verzamelingen waarvan men zeker wilt dat die open worden een topologie te maken. Hiertoe neemt men eerst alle eindige doorsneden van elementen van die familie en gebruikt de zo verkregen familie als basis voor de gewenste topologie. In feite is dit de manier geweest waarop we de producttopologie gemaakt hebben: de open stroken moesten open worden om de projecties continu te maken.

De stelling waar net op gezinspeeld werd is het Subbasislemma van Alexander.

6.35. Stelling (Subbasislemma van Alexander). *Zij X een topologische ruimte en $\mathcal{S}$ een subbasis voor de topologie. Dan geldt: X is compact dan en slechts dan als elke overdekking van X met elementen van $\mathcal{S}$ een eindige deeloverdekking heeft.*

Bewijs. Het bewijs loopt parallel aan het tweede bewijs van de Stelling van Tychonoff: noem de familie van doorsneden van eindige deelfamilies van $\mathcal{S}$ even $\mathcal{B}$. Dan is $\mathcal{B}$ een basis. Stel $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ is een overdekking zonder eindige deeloverdekking en maak een filter $\mathcal{F}$ als tevoren. Neem weer een ultrafilter $\mathcal{G}$ dat fijner is dan $\mathcal{F}$ en kies, met behulp van $\mathcal{G}$, voor elke $U \in \mathcal{U}$ een $S_U \in \mathcal{S}$ zó dat $U \subseteq S_U$ en $X \setminus S_U \in \mathcal{G}$.

Dan is $\{S_U : U \in \mathcal{U}\}$ een overdekking van X met elementen van $\mathcal{S}$ zonder eindige deeloverdekking. □

Met behulp van deze stelling bewijzen we heel makkelijk dat een gesloten en begrensd interval in $\mathbb{R}$ compact is.

Laat $[a, b]$ zo'n interval zijn en neem een overdekking met subbasis elementen:

$$\mathcal{U} = \bigl\{[a, x_\lambda) : \lambda \in \Lambda\bigr\} \cup \bigl\{(y_\mu, b] : \mu \in M\bigr\}.$$

Zij $x = \sup_\lambda x_\lambda$ en kies μ zó dat $x \in (y_\mu, b]$ (waarom is er zo'n μ?). Kies vervolgens een λ zó dat $x_\lambda > y_\mu$; dan is $\bigl\{[a, x_\lambda), (y_\mu, b]\bigr\}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{U}$.

V

TOPOLOGIEËN OP FUNCTIERUIMTEN

In dit deel bekijken we een aantal verschillende topologieën die men op de verzameling $C(X,Y)$ van continue afbeeldingen van X naar Y kan specificeren.

7. NETTE, TOELAATBARE EN ACCEPTABELE TOPOLOGIEËN

Voor we topologieën op $C(X,Y)$ gaan definiëren bekijken we welke eigenschappen gewenst zijn. We zullen aan een aantal voorbeelden zien dat we niet altijd kunnen krijgen wat we hebben willen.

De exponentiële afbeelding

Voor willekeurige verzamelingen X en Y noteren we met Y^X de verzameling van alle afbeeldingen van X naar Y. Als Z een derde verzameling is dan kunnen we een bijectie tussen de verzamelingen $Y^{Z\times X}$ en $(Y^X)^Z$ maken en wel als volgt.

Elke afbeelding $f\colon Z\times X\to Y$ bepaalt een familie afbeeldingen van X naar Y: voor elke $z\in Z$ is $f_z\colon X\to Y$ gedefinieerd door $f_z(x)=f(z,x)$. De zo verkregen afbeelding $z\mapsto f_z$ van Z naar Y^X noteren we als $\Lambda(f)$.

Omgekeerd, uit een afbeelding $F\colon Z\to Y^X$ maken we via de definitie $M(F)(z,x)=F(z)(x)$ aan afbeelding $M(F)$ van $Z\times X$ naar Y.

7.1. Opgave. Bewijs dat M en Λ elkaars inversen zijn.

De bijectie $\Lambda\colon Y^{Z\times X}\to(Y^X)^Z$ noemen we de *exponentiële afbeelding*.

Een voorbeeld van een situatie waarin de exponentiële afbeelding een rol speelt is de volgende.

7.2. Voorbeeld. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $y'=y$ noteren we meestal als $y=Ce^x$, waarbij we eigenlijk bedoelen: 'voor elke $C\in\mathbb{R}$ is de functie f_C, gedefinieerd door $f_C(x)=Ce^x$, een oplossing van $y'=y$ en voor elke oplossing g van $y'=y$ is er een C zó dat $g=f_C$'.

Via de exponentiële afbeelding kunnen we van deze familie functies één functie $f\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ maken door $f(C,x)=Ce^x$. De functie f is continu en suggereert dus dat f_C continu van C afhangt. Echter, als $C\neq D$ dan geldt

$$\sup\Bigl\{\bigl|f_C(x)-f_D(x)\bigr| : x\in\mathbb{R}\Bigr\}=\infty,$$

de functies liggen dus eigenlijk oneindig ver uit elkaar. De functie f is dus continu, de bijbehorende afbeelding $\Lambda(f)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ lijkt niet continu te zijn.

In wat volgt zullen we een topologie op de verzameling van de continue functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ definiëren die onder meer de plezierige eigenschap heeft dat $f\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continu is dan en slechts dan als $\Lambda(f)$ het is.

Als X en Y topologische ruimten zijn dan noteren we de verzameling van alle continue afbeeldingen van X naar Y met $C(X,Y)$.

7.3. Definitie. Een topologie $\mathcal{T}$ op $C(X,Y)$ heet een *nette topologie* als voor elke ruimte Z en elke continue afbeelding $f: Z \times X \to Y$ de bijbehorende afbeelding $\Lambda(f): Z \to C(X,Y)$ continu is.

NB We kijken alléén naar topologieën op $C(X,Y)$ en niet op $C(Z \times X, Y)$; het is dus niet zinvol over de continuïteit van Λ zelf te spreken. We eisen slechts dat Λ continue afbeeldingen in continue afbeeldingen overvoert. Omdat een nette topologie een heleboel afbeeldingen *naar* $C(X,Y)$ continu moet maken kan deze niet te veel open verzamelingen bevatten. De indiscrete topologie is net.

7.4. Opgave. Laat $\mathcal{T}$ en $\mathcal{O}$ topologieën op $C(X,Y)$ zijn zó dat $\mathcal{T}$ net is en $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$. Dan is ook $\mathcal{O}$ een nette topologie.

De eis dat Λ^{-1} continue afbeeldingen in continue afbeeldingen overvoert leidt tot de definitie van toelaatbare topologieën.

7.5. Definitie. Een topologie $\mathcal{T}$ op $C(X,Y)$ heet een *toelaatbare topologie* als voor elke ruimte Z en elke continue afbeelding $F: Z \to C(X,Y)$ de bijbehorende afbeelding $\Lambda^{-1}(F): Z \times X \to Y$ continu is.

Voor toelaatbare topologieën geldt het omgekeerde als voor nette topologieën; deze moeten juist veel open verzamelingen hebben:

7.6. Opgave. Laat $\mathcal{T}$ en $\mathcal{O}$ topologieën op $C(X,Y)$ zijn zó dat $\mathcal{O}$ toelaatbaar is en $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$. Dan is ook $\mathcal{T}$ een toelaatbare topologie.

Toelaatbaarheid van topologieën kan zonder gebruik van extra ruimten getoetst worden. Hiertoe definiëren we de *evaluatieafbeelding* $\Omega: Y^X \times X \to Y$ door $\Omega(f,x) = f(x)$.

7.7. Stelling. *Een topologie $\mathcal{T}$ op $C(X,Y)$ is toelaatbaar dan en slechts dan als $\Omega: C(X,Y) \times X \to Y$ continu is.*

Bewijs. Als $\mathcal{T}$ toelaatbaar is neem dan $Z = Y^X$ en merk op dat $\Omega = \Lambda^{-1}(\mathrm{Id}_{Y^X})$.

Omgekeerd als $g: Z \to C(X,Y)$ continu is dan is $\Lambda^{-1}(g)$ als volgt te ontbinden:

$$\Lambda^{-1}(g): Z \times X \xrightarrow{g \times \mathrm{Id}_X} C(X,Y) \times X \xrightarrow{\Omega} Y.$$

De afbeelding $g \times \mathrm{Id}_x$ is altijd continu, dus als Ω continu is dan is $\Lambda^{-1}(g)$ het ook. $\square$

Het verband tussen nette en toelaatbare topologieën wordt gegeven door de volgende stelling.

7.8. Stelling. *Laat $\mathcal{O}$ een nette topologie op $C(X,Y)$ zijn en $\mathcal{T}$ een toelaatbare topologie. Dan geldt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$.*

Bewijs. We moeten laten zien dat $\mathrm{Id}: \big(C(X,Y), \mathcal{T}\big) \to \big(C(X,Y), \mathcal{O}\big)$ continu is.

Welnu, $\Omega: \big(C(X,Y), \mathcal{T}\big) \times X \to Y$ is continu omdat $\mathcal{T}$ toelaatbaar is en omdat $\mathcal{O}$ net is volgt dan dat $\mathrm{Id} = \Lambda(\Omega)$ continu is als afbeelding van $\big(C(X,Y), \mathcal{T}\big)$ naar $\big(C(X,Y), \mathcal{O}\big)$. $\square$

Een belangrijk gevolg van deze stelling is dat op $C(X,Y)$ ten hoogste één topologie te definiëren is die zowel net als toelaatbaar is; als zo'n topologie er is dan noemen we deze *acceptabel*. Een topologie $\mathcal{T}$ op $C(X,Y)$ is acceptabel dan en slechts dan als de beperking $\Lambda \restriction C(Z \times X, Y)$ een bijectie tussen $C(Z \times X, Y)$ en $C\big(Z, C(X,Y)\big)$ is.

Dat er niet altijd een acceptabele topologie is blijkt uit het volgende voorbeeld.

7.9. Voorbeeld. De ruimte $C(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ heeft geen acceptabele topologie.

Stel $\mathcal{T}$ is een toelaatbare topologie op $C(\mathbb{Q},\mathbb{R})$; dan is $\Omega\colon C(\mathbb{Q},\mathbb{R})\times\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ continu. Neem nu de nulfunctie $\mathbf{0}$ en het punt $0\in\mathbb{Q}$. Dan geldt $\Omega(\mathbf{0},0)=0$, er zijn dus een open verzameling $T\in\mathcal{T}$ en een interval $(-a,a)$ in $\mathbb{Q}$ zó dat $\Omega\bigl[T\times(-a,a)\bigr]\subseteq(-1,1)$. Merk op dat voor elke $f\in T$ geldt $f\bigl[(-a,a)\bigr]\subseteq(-1,1)$; ten opzichte van $\mathcal{T}$ is het inwendige van de verzameling M van functies die $(-a,a)$ in $(-1,1)$ afbeelden dus niet leeg.

We laten nu zien dat als $\mathcal{O}$ een nette topologie is het inwendige van M ten opzichte van $\mathcal{O}$ wel leeg is.

Neem $f\in M$. We construeren een continue functie $F\colon[0,1]\times\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ zó dat $\Lambda(F)(0)=f$ en $\Lambda(F)(z)\notin M$ voor alle $z\neq 0$. Omdat $\mathcal{O}$ net was verondersteld en $\Lambda(F)$ dus continu is volgt hieruit dat elke $\mathcal{O}$-omgeving van f functies bevat die niet tot M behoren; waarmee is aangetoond dat $f\notin\operatorname{int}_{\mathcal{O}}M$.

Om F te maken kiezen we eerst een stijgende rij $\langle r_n\rangle_n$ irrationale getallen in $(-a,a)$ die naar een irrationaal getal r convergeert met $|r|<a$.

We definiëren F als volgt:

(i) als $q<r_1$ dan $F(z,q)=f(q)$;
(ii) als $q>r$ dan $F(z,q)=f(q)$;
(iii) als $r_n<q<r_{n+1}$ dan

$$F(z,q)=\begin{cases} f(q) & \text{als } z\leqslant\frac{1}{2n},\\ (2-2nz)f(q)+(2nz-1) & \text{als } \frac{1}{2n}\leqslant z\leqslant\frac{1}{n}, \text{ en}\\ 1 & \text{als } z\geqslant\frac{1}{n}.\end{cases}$$

Dan is F een continue functie (zie Opgave 7.10). Als $z\neq 0$ kies dan n met $\frac{1}{2n}<z\leqslant\frac{1}{n}$; voor elke q tussen r_n en r_{n+1} geldt dan $F(z,q)=1$; hieruit volgt dat $\Lambda(F)(z)\bigl[(-a,a)\bigr]\nsubseteq(-1,1)$, als gewenst.

7.10. Opgave. Bewijs dat de functie F uit Voorbeeld 7.9 continu is. *Aanwijzing*: De stroken $\bigl\{(z,q):r_n<q<r_{n+1}\bigr\}$ zijn open-en-gesloten en op elke strook is F eenvoudig gedefinieerd.

Nu zijn $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ redelijk eenvoudige ruimten en als $C(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ al geen acceptabele topologie toelaat lijkt het vrijwel hopeloos voor andere ruimte wel acceptabele topologieën te verwachten. Het blijkt echter dat $\mathbb{Q}$ een belangrijke eigenschap ontbeert; dit is lokale compactheid. We zullen zien dat als X lokaal compact is er veelal wel een acceptabele topologie op Y^X te definiëren is.

8. DIVERSE TOPOLOGIEËN

We zullen nu een aantal topologieën op functieruimten bekijken; om ons het leven iets te vergemakkelijken voeren we de volgende notatie in: Als $A\subseteq X$ en $B\subseteq Y$ dan is $M(A,B)=\bigl\{f\in C(X,Y):f[A]\subseteq B\bigr\}$. Als $A=\{x\}$ dan schrijven we gewoon $M(x,B)$ in plaats van $M\bigl(\{x\},B\bigr)$. Verder zullen we vaak topologieën op deelruimten met elkaar vergelijken; als $\mathcal{T}$ een topologie is en A een deelruimte van de ruimte in kwestie dan noteren we met $\mathcal{T}\restriction A$ de topologie $\{T\cap A:T\in\mathcal{T}\}$.

De puntsgewijze topologie

De eerste topologie die we op $C(X,Y)$ definiëren is de zogeheten *puntsgewijze topologie*. Dit is niets anders dan de producttopologie van Y^X beperkt tot de verzameling $C(X,Y)$. We noteren de puntsgewijze topologie met $\mathcal{T}_p$.

De familie
$$\bigl\{M(x,U) : x \in X \text{ en } U \text{ open in } Y\bigr\}$$
is een subbasis voor de puntsgewijze topologie; dit is eenvoudig in te zien: $M(x,U)$ is immers de doorsnede van $C(X,Y)$ met de open strook $\pi_x^{-1}[U]$.

8.1. Stelling. *De puntsgewijze topologie is net.*

Bewijs. Dit volgt in feite uit Stelling 5.20: laat $f\colon Z \times X \to Y$ continu zijn. Dan is voor elke vaste x de functie $f^x\colon z \mapsto f(z,x)$ continu. Maar $f^x = \pi_x \circ \Lambda(f)$ voor elke x; hieruit volgt dat $\Lambda(f)$ continu is. □

Deze stelling impliceert dat elke toelaatbare topologie op $C(X,Y)$ de producttopologie omvat en dus alle projecties continu maakt.

De puntsgewijze topologie maakt Λ zelfs continu.

8.2. Opgave. Laat $C(X,Y)$, $C(Z \times X,Y)$ en $C\bigl(Z, C(X,Y)\bigr)$ alle voorzien zijn van de puntsgewijze topologie. Bewijs dat $\Lambda\colon C(Z \times X, Y) \to C\bigl(Z, C(X,Y)\bigr)$ een inbedding is.

Een belangrijke eigenschap van de puntsgewijze topologie vinden we in de volgende stelling.

8.3. Stelling. *Neem aan dat Y een Hausdorff ruimte is en dat $\mathcal{T}$ een topologie op $C(X,Y)$ is die fijner is dan $\mathcal{T}_p$. Dan zijn voor een deelverzameling F van $C(X,Y)$ de volgende uitspraken equivalent.*

(i) *F is compact ten opzichte van $\mathcal{T}$.*
(ii) *F is compact ten opzichte van de puntsgewijze topologie en $\mathcal{T} \restriction F = \mathcal{T}_p \restriction F$.*
(iii) *Voor elke $x \in X$ is de verzameling $F(x) = \bigl\{f(x) : f \in F\bigr\}$ compact, F is gesloten in Y^X ten opzichte van de producttopologie en $\mathcal{T} \restriction F = \mathcal{T}_p \restriction F$.*

Bewijs. (i) $\Rightarrow$ (ii): omdat $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}$ is de afbeelding $\mathrm{Id}\colon (F,\mathcal{T}) \to (F,\mathcal{T}_p)$ continu. Verder is de ruimte $(F,\mathcal{T}_p)$ Hausdorff. Pas nu Stelling 4.10 toe.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Als $(F,\mathcal{T}_p)$ compact is en $\mathcal{T} \restriction F = \mathcal{T}_p \restriction F$ dan is $(F,\mathcal{T})$ zeker compact.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): als F compact is ten opzichte van $\mathcal{T}_p$ dan is F gesloten omdat het product Hausdorff is. Voor elke $x \in X$ geldt verder $F(x) = \pi_x[F]$; omdat F compact is en π_x continu volgt dus dat $F(x)$ compact is.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): de Stelling van Tychonoff (Stelling 6.31) impliceert dat het product $\Pi = \prod_{x\in X} F(x)$ compact is; nu is F een gesloten deelverzameling van Π en dus compact. □

Merk op dat in (iii) staat dat F gesloten is in het grote product Y^X en niet alleen maar in $C(X,Y)$; dit is een belangrijk verschil en het geeft ook aan waar we problemen zullen krijgen bij het bewijzen van compactheid: puntsgewijze limieten van rijen continue functies zijn in het algemeen niet continu. Ondanks dit zal voorwaarde (iii) ons belangrijkste gereedschap zijn bij bewijzen van compactheid in functieruimten. We spreken nu dan ook af dat de ruimte Y (het codomein) voortaan Hausdorff verondersteld wordt.

De topologie van uniforme convergentie

De volgende topologie die we bekijken is de *topologie van uniforme convergentie.* Deze is alleen gedefinieerd als Y een metrische ruimte is omdat we in dat geval kunnen afspreken wat uniforme convergentie is.*

8.4. Definitie. Laat X een topologische ruimte zijn en (Y,d) een metrische ruimte. Definieer voor f en g in $C(X,Y)$ de afstand $d_u(f,g)$ door

$$d_u(f,g) = \sup\Bigl\{d\bigl(f(x),g(x)\bigr) : x \in X\Bigr\}.$$

Voor elke $f \in C(X,Y)$ en $\varepsilon > 0$ definieren we $U(f,\varepsilon) = \bigl\{g \in C(X,Y) : d_u(f,g) < \varepsilon\bigr\}$. De topologie van uniforme convergentie $\mathcal{T}_u$ op $C(X,Y)$ wordt verkregen door voor elke f de familie $\mathcal{U}_f = \bigl\{U(f,\varepsilon) : \varepsilon > 0\bigr\}$ als lokale basis te nemen. NB $d_u(f,g)$ kan de waarde ∞ aannemen, d_u is dus niet noodzakelijk een metriek.

8.5. Opgave. Ga na dat de toekenning van lokale bases inderdaad aan de voorwaarden van Stelling 2.14 voldoet.

8.6. Opgave. Bij elke metriek d hoort een begrensde metriek ρ gedefinieerd door $\rho(x,y) = \min\bigl\{d(x,y),1\bigr\}$. Bewijs dat d_u en ρ_u dezelfde topologie opleveren.

De naam van $\mathcal{T}_u$ wordt door de volgende opgave verklaard.

8.7. Opgave. Laat $\langle f_n\rangle_n$ een rij in $C(X,Y)$ zijn en $f \in C(X,Y)$. Dan geldt; $\langle f_n\rangle_n$ convergeert ten opzichte van $\mathcal{T}_u$ naar f dan en slechts dan als $\langle f_n\rangle_n$ uniform naar f convergeert.

Voor ons is de volgende stelling belangrijk.

8.8. Stelling. *De topologie $\mathcal{T}_u$ is toelaatbaar.*

Bewijs. We moeten aantonen dat Ω: $\bigl(C(X,Y),\mathcal{T}_u\bigr)\times X \to Y$ continu is. Neem dus $f \in C(X,Y)$ en $x \in X$ en laat $\varepsilon > 0$. We zoeken omgevingen U van f en O van x zó dat $\Omega[U\times O] \subseteq B_\varepsilon\bigl(f(x)\bigr)$.

Kies eerst O zó dat $d\bigl(f(y),f(x)\bigr) < \varepsilon/2$ voor $y \in O$. Neem vervolgens $U = U(f,\varepsilon/2)$. Als nu $(g,y) \in U \times O$ dan geldt

$$\begin{aligned} d\bigl(g(y),f(x)\bigr) &\leqslant d\bigl(g(y),f(y)\bigr) + d\bigl(f(y),f(x)\bigr) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

De ongelijkheid $d\bigl(g(y),f(y)\bigr) < \varepsilon/2$ geldt omdat $d_u(g,f) < \varepsilon/2$ en $d\bigl(f(y),f(x)\bigr) < \varepsilon/2$ geldt omdat $y \in O$. □

Ten opzichte van d_u is Λ^{-1} een isometrische inbedding.

8.9. Opgave. Bewijs dat als alle functieruimten de uniforme metriek dragen de afbeelding $\Lambda^{-1}\colon C\bigl(Z,C(X,Y)\bigr) \to C(Z\times X,Y)$ een isometrische inbedding is.

De functie f uit Voorbeeld 7.2 laat zien dat $\mathcal{T}_u$ op $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ niet net is. In dat voorbeeld hebben we $Z = X = Y = \mathbb{R}$. Het probleem ligt daar niet bij Z maar bij X; het punt is dat de functie e^x onbegrensd is. Als X compact is dan is $\mathcal{T}_u$ wel acceptabel.

---

* Dit is niet helemaal waar, er zijn topologische ruimten die niet metrizeerbaar zijn en waar toch zinvol over uniforme convergentie gesproken kan worden; in deze cursus komen we echter niet aan een behandeling van deze ‘uniforme’ ruimten toe.

8.10. Stelling. *Als X compact is en Y een metrische ruimte dan is $\mathcal{T}_u$ een acceptabele topologie op $C(X,Y)$.*

Bewijs. Laat Z een topologische ruimte zijn en neem aan dat $f\colon Z\times X\to Y$ continu is. Neem $z\in Z$ en laat $\varepsilon>0$; we zoeken een omgeving U van z zó dat $d_u(f_w,f_z)<\varepsilon$ voor alle $w\in U$.

Hiertoe kiezen we voor elke $x\in X$ een omgeving U_x van z en een omgeving O_x van x zó dat $d\bigl(f(w,y),f(z,x)\bigr)<\varepsilon/3$ als $(w,y)\in U_x\times O_x$. Neem vervolgens $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in X zó dat $X=\bigcup_i O_{x_i}$ en stel $U=\bigcap_i U_{x_i}$. Dan is U een omgeving van z en als gewenst.

Immers, neem $w\in U$ en $x\in X$; er is een i waarvoor $x\in O_{x_i}$. Dan geldt $(w,x),(z,x)\in U_{x_i}\times O_{x_i}$ en dus $d\bigl(f_w(x),f_z(x)\bigr)<2\varepsilon/3$. Hieruit volgt $d_u(f_w,f_z)\leqslant 2\varepsilon/3<\varepsilon$. □

We concluderen dat we in het geval X compact is en Y metrisch een acceptabele topologie voor $C(X,Y)$ gevonden hebben, namelijk de topologie van uniforme convergentie. Merk op dat, wegens de uniciteit van acceptabele topologieën, in dit geval de topologie van uniforme convergentie onafhankelijk van de gekozen metriek op Y is.

In het algemeen zal dat, als X niet compact is, niet zo zijn.

8.11. Opgave. Definieer op $\mathbb{R}$ de metriek ρ door $\rho(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$; de gewone metriek op $\mathbb{R}$ noteren we met d. Laat zien dat d en ρ dezelfde topologie op $\mathbb{R}$ induceren maar niet dezelfde topologieën van uniforme convergentie op $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

De Compact-open topologie

De topologieën die we tot nu toe beschreven hebben hingen voornamelijk van de topologie op Y af; de verzameling $C(X,Y)$ is natuurlijk door beide topologieën bepaald maar zowel de puntsgewijze topologie als de topologie van uniforme convergentie werden in feite alleen in termen van de structuur van Y gedefinieerd.

De topologie die we nu gaan bekijken wordt door zowel X als Y bepaald.

8.12. Definitie. De *compact-open topologie* op de verzameling $C(X,Y)$ wordt verkregen door de familie

$$\bigl\{M(C,O) : C \text{ compact in } X \text{ en } O \text{ open in } Y\bigr\}$$

als subbasis te nemen. We noteren deze topologie als $\mathcal{T}_c$.

Aangezien elke eindige verzameling compact is is de compact-open topologie fijner dan de puntsgewijze topologie; het is dus a priori niet duidelijk of $\mathcal{T}_c$ net of toelaatbaar is.

8.13. Stelling. *De compact-open topologie is net.*

Bewijs. Laat $f\colon Z\times X\to Y$ continu zijn. Laat $C\subseteq X$ compact zijn, $O\subseteq Y$ open en zij $z\in Z$ zó dat $f_z\in M(C,O)$. We zoeken een omgeving U van z zó dat $f_w\in M(C,O)$ als $w\in U$.

Nu betekent $f_z\in M(C,O)$ niets anders dan $f_z[C]\subseteq O$ en dit is equivalent met $f(z,x)\in O$ voor alle $x\in C$ ofwel $\{z\}\times C\subseteq f^{-1}[O]$. Pas Stelling 5.10 toe om omgevingen U van z en V van C te vinden zó dat $U\times V\subseteq f^{-1}[O]$.

Maar de laatste inclusie betekent dat $f_z[V]\subseteq O$ voor alle $z\in U$ en dus zeker $f_z[C]\subseteq O$ voor die z. □

8.14. Opmerking. Als X een discrete ruimte is dan geldt $C(X,Y)=Y^X$ en zijn de puntsgewijze- en compact-open topologieën op $C(X,Y)$ gelijk. Elke algemene stelling die we over functieruimten bewijzen zal dus ook voor gewone producten moeten gelden. Een negatief gevolg hiervan is dat de compact-open topologie niet normaal hoeft te zijn: het product $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ is niet normaal (Opgave5.13), de functieruimte $C\bigl(\{0,1\},\mathbb{S}\bigr)$ dus ook niet.

De compact-open topologie maakt Λ ook continu.

8.15. Opgave. Laat $C(X,Y)$, $C(Z\times X,Y)$ en $C\big(Z,C(X,Y)\big)$ alle voorzien zijn van de compact-open topologie. Bewijs dat $\Lambda\colon C(Z\times X,Y)\to C\big(Z,C(X,Y)\big)$ een inbedding is.

De compact-open topologie is T_0, T_1 of T_2 als Y dezelfde eigenschap heeft; dit is duidelijk omdat de compact-open topologie meer open verzamelingen heeft dan de puntsgewijze topologie.

8.16. Stelling. *Als Y een T_3-ruimte is dan is $\mathcal{T}_c$ een T_3-topologie.*

Bewijs. We bewijzen: als $f\in M(C,O)$ dan is er een open verzameling U in Y zó dat $f\in M(C,U)$ en $\operatorname{cl} M(C,U)\subseteq M(C,O)$.

Kies voor elke $x\in C$ een omgeving U_x van $f(x)$ met $\operatorname{cl} U_x\subseteq O$. Er zijn eindig veel punten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in C zó dat $C\subseteq\bigcup_i f^{-1}[U_{x_i}]$. Zij $U=\bigcup_i U_{x_i}$; dan geldt $\operatorname{cl} U\subseteq O$ en $f\in M(C,U)$. We bewijzen dat $\operatorname{cl} M(C,U)\subseteq M(C,O)$. Stel $g\notin M(C,O)$, kies $x\in C$ met $g(x)\notin O$ en neem $V=Y\setminus\operatorname{cl} U$. Dan is $M(x,V)$ een omgeving van g in $\mathcal{T}_p$ en dus in $\mathcal{T}_c$ en duidelijk geldt $M(x,V)\cap M(C,U)=\varnothing$. □

8.17. Opgave. Maak het bewijs af door de volgende stelling te bewijzen: een ruimte X heeft de T_3-eigenschap dan en slechts dan als er een subbasis $\mathcal{S}$ voor X is met de volgende eigenschap: als $S\in\mathcal{S}$ en $x\in S$ dan is er een omgeving U van x met $x\in U$ en $\operatorname{cl} U\subseteq S$.

We kunnen deze stelling ook voor volledig reguliere ruimten bewijzen. Hier hebben we een lemma nodig.

8.18. Lemma. *Zij X een $T_{3\frac12}$-ruimte, O een open deelverzameling van X en C een compacte deelverzameling van X met $C\subseteq O$. Dan is er een continue functie $g\colon X\to[0,1]$ met $g\restriction C\equiv 0$ en $g\restriction(X\setminus O)\equiv 1$.*

Bewijs. Kies voor elke $x\in C$ een continue functie $f_x\colon X\to[0,1]$ met $f_x(x)=0$ en $f_x(y)=1$ als $y\notin O$. Vervang f_x door $g_x=\max\{\mathbf{0},2f_x-1\}$; merk op dat g_x ook continu is, dat $g_x(y)=1$ als $y\notin O$ en dat $g_x(y)=0$ voor elke y in de omgeving $U_x=f_x^{-1}\big[[0,\frac12)\big]$ van x. Kies nu eindig veel punten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in C zó dat $C\subseteq\bigcup_i U_{x_i}$ en neem $g=\min\{g_{x_1},\ldots,g_{x_n}\}$. Het is eenvoudig na te gaan dat g als gewenst is. □

8.19. Stelling. *Als Y een $T_{3\frac12}$-ruimte is dan is $\mathcal{T}_c$ een $T_{3\frac12}$-topologie.*

Bewijs. We construeren als $f\in M(C,O)$ een continue functie $G\colon C(X,Y)\to[0,1]$ met $G(f)=0$ en $G(h)=1$ als $h\notin M(C,O)$.

Gebruik Lemma 8.18 om een continue functie $g\colon Y\to[0,1]$ vinden die op $f[C]$ de waarde 0 aanneemt en buiten O de waarde 1.

Definieer nu $G\colon C(X,Y)\to[0,1]$ door

$$G(h)=\sup\big\{g\big(h(x)\big) : x\in C\big\}.$$

Duidelijk is dat $G(f)=0$ en dat $G(h)=1$ als $h\notin M(C,O)$. Rest nog te verifiëren dat G continu is.

Zij $h\in C(X,Y)$ en kies $x\in C$ zó dat $g\big(h(x)\big)=G(h)$. Zij nu $\varepsilon>0$. Definieer $U=g^{-1}\big[[0,G(h)+\varepsilon)\big]$ en $V=g^{-1}\big[(G(h)-\varepsilon,1]\big]$. De verzamelingen U en V zijn open in Y omdat g continu is.

Zij nu $W=M(x,V)\cap M(C,U)$, dan is W een omgeving van h en als $k\in W$ dan geldt $\big|G(k)-G(h)\big|<\varepsilon$. □

8.20. Opgave. Maak het bewijs op dezelfde manier af als in de vorige opgave.

Lokaal compacte ruimten

We hebben in Voorbeeld 7.9 gezien dat $C(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ geen acceptabele topologie draagt en dat dit de 'schuld' van $\mathbb{Q}$ is; ook is toen al aangekondigd dat lokaal compacte ruimten zich in dit opzicht beter gedragen. We zullen deze klasse van ruimten nu definiëren.

Om ons het leven wat makkelijk te maken spreken we af dat voor de rest van dit hoofdstuk alle ruimten tenminste Hausdorff verondersteld worden.

8.21. Definitie. Een Hausdorff ruimte is *lokaal compact* als elk punt een omgeving heeft waarvan de afsluiting compact is.

Omdat we bij lokale compactheid de Hausdorff eigenschap meegenomen hebben kunnen we meteen een sterkere scheidingeigenschap afleiden.

8.22. Stelling. *Elke lokaal compacte ruimte is volledig regulier.*

Bewijs. Zij X lokaal compact, F gesloten in X en $x \in X \setminus F$. Kies een omgeving U van x zó dat $\operatorname{cl} U$ compact is.

De ruimte $\operatorname{cl} U$ is compact Hausdorff en dus volledig regulier. Er is dus een continue functie $f\colon \operatorname{cl} U \to [0,1]$ zó dat $f(x) = 0$ en $f(y) = 1$ als $y \in \partial U$ of $y \in F \cap \operatorname{cl} U$. Ga nu na dat door $f(y) = 1$ te definiëren voor $y \notin \operatorname{cl} U$ een continue functie op heel X verkregen wordt. □

Voor ons is het volgende gevolg belangrijk.

8.23. Gevolg. *Als X lokaal compact is dan bestaat voor elk punt x in X en elke omgeving U van x een omgeving O van x zó dat $\operatorname{cl} O$ compact is en bevat in U.*

Bewijs. Kies een omgeving W van x waarvoor $\operatorname{cl} W$ compact is. Kies vervolgens een omgeving O van x zó dat $\operatorname{cl} O \subseteq U \cap W$. Dan is $\operatorname{cl} O$ zeker compact. □

We kunnen nu bewijzen dat de compact-open topologie op $C(X,Y)$ toelaatbaar is als X lokaal compact is.

8.24. Stelling. *Als X lokaal compact is dan is de compact-open topologie op $C(X,Y)$ toelaatbaar en dus acceptabel.*

Bewijs. We laten zien dat $\Omega\colon C(X,Y) \times X \to Y$ continu is. Neem dus $f \in C(X,Y)$, $x \in X$ en laat U een omgeving van $f(x)$ zijn.

Kies een omgeving O van x zó dat $C = \operatorname{cl} O$ compact is en $f[C] \subseteq U$, dit kan omdat X regulier is. Dan is $W = M(C,U) \times O$ een omgeving van (f,x) en als $(g,y) \in W$ dan geldt $y \in C$ en dus $g(y) \in g[C] \subseteq U$. Conclusie $\Omega[W] \subseteq U$. □

8.25. Opgave. Laat $C(X,Y)$, $C(Z \times X,Y)$ en $C\bigl(Z, C(X,Y)\bigr)$ alle voorzien zijn van de compact-open topologie en neem aan dat X lokaal compact is. Bewijs dat $\Lambda\colon C(Z \times X,Y) \to C\bigl(Z, C(X,Y)\bigr)$ een homeomorfisme is.

Het bewijs van Stelling 8.24 is eigenlijk heel eenvoudig en suggereert de vraag of er niet een stelling is die voor meer ruimten X garandeert dat $C(X,Y)$ een acceptabele topologie heeft. Zo'n stelling is er, voor de ruimten die wij beschouwen, niet.

8.26. Stelling. *Stel dat X een volledig reguliere ruimte is en dat $C(X,\mathbb{R})$ een acceptabele topologie draagt. Dan is X lokaal compact.*

Bewijs. Zij $x_0 \in X$ en zij $\mathbf{0}$ de nulfunctie. Kies omgevingen V van x_0 en W van $\mathbf{0}$ (in de acceptabele topologie) zó dat $\Omega[W \times V] \subseteq (-1,1)$. We bewijzen dat $\operatorname{cl} V$ compact is.

Zij $\mathcal{O}$ een familie open verzamelingen die $\operatorname{cl} V$ overdekt. We definiëren een topologie $\mathcal{T}$ op $C(X,\mathbb{R})$ als volgt: zij eerst $\mathcal{A}$ de familie van die gesloten deelverzamelingen A van X met de eigenschap dat $A \cap \operatorname{cl} V = \varnothing$ of $A \subseteq O$ voor een $O \in \mathcal{O}$. De topologie $\mathcal{T}$ heeft de familie

$$\bigl\{M(A,U) : A \in \mathcal{A}, U \text{ open in } \mathbb{R}\bigr\}$$

als subbasis.

Als we kunnen bewijzen dat $\mathcal{T}$ toelaatbaar is dan zijn we klaar. Immers, dan geldt $W \in \mathcal{T}$, omdat W in de acceptabele topologie zit. Er zijn dus verzamelingen A_1, A_2, …, A_k in $\mathcal{A}$ en open verzamelingen U_1, U_2, …, U_k in $\mathbb{R}$ zó dat $\mathbf{0} \in \bigcap_i M(A_i, U_i) \subseteq W$. Dan geldt $V \subseteq \bigcup_i A_i$ en dus $\operatorname{cl} V \subseteq \bigcup_i A_i$. Stel maar eens dat er een punt y in $V \setminus \bigcup_i A_i$ is en neem een continue functie $f \colon X \to [0,1]$ zó dat $f(y) = 1$ en $f \equiv 0$ op $\bigcup_i A_i$. Dan geldt $f \in M(A_i, U_i)$ voor elke i omdat $f[A_i] = \mathbf{0}[A_i]$ maar $f \notin W$ omdat $y \in V$ en $f(y) = 1$.

Als we de A_i die $\operatorname{cl} V$ niet snijden weglaten en voor de overgebleven A_i een $O_i \in \mathcal{O}$ kiezen met $A_i \subseteq O_i$ dan hebben we een eindige deeloverdekking van $\mathcal{O}$ gevonden.

Rest nog te bewijzen dat $\mathcal{T}$ toelaatbaar is. Welnu, zij $(f, x) \in C(X, \mathbb{R}) \times X$ en $\varepsilon > 0$. Kies een omgeving U van x met de eigenschap dat $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \varnothing$ als $x \notin \operatorname{cl} V$ of anders $\operatorname{cl} U \subseteq O$ voor een $O \in \mathcal{O}$. Merk op dat $\operatorname{cl} U \in \mathcal{A}$. Kies verder nog een omgeving W van x zó dat $W \subseteq U$ en $\bigl|f(y) - f(x)\bigr| < \varepsilon$ voor alle $y \in W$.

Als nu $g \in M\bigl(\operatorname{cl} U, (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\bigr)$ en $y \in W$ dan geldt $\bigl|g(y) - f(x)\bigr| < \varepsilon$. We concluderen dat Ω continu is in (f, x). $\square$

VI

COMPACTHEID IN FUNCTIERUIMTEN

We zullen nu compactheid van deelverzamelingen van functieruimten karakteriseren. In een later deel zullen we enige toepassingen van onze stellingen zien.

9. COMPACTHEID IN DE COMPACT-OPEN TOPOLOGIE

We hebben in Stelling 8.13 gezien dat de compact-open topologie altijd net is en, in Stelling 8.24, dat ze als X lokaal compact is zelfs acceptabel is. Het ligt voor de hand voor deze topologie te onderzoeken hoe de compacte deelverzamelingen er uitzien.

Gelijkmatig continue families

Het sleutelbegrip in het onderzoek naar compactheid in functieruimten blijkt dat van een gelijkmatig continue familie afbeeldingen te zijn.

9.1. Definitie. Laat X en Y topologische ruimten zijn en F een familie afbeeldingen van X naar Y. De familie F heet *gelijkmatig continu* als voor elke $x \in X$, elke $y \in Y$ en elke omgeving U van y omgevingen O van x en V van y bestaan zó dat voor elke $f \in F$, als $f(x) \in V$ dan $f[O] \subseteq U$.

Deze definitie kan gezien worden als een formalisering van de vage zin 'alle functies zijn in elk punt even continu'. Het is natuurlijk te veel gevraagd dat $f[O] \subseteq U$ voor *elke* $f \in F$ maar we eisen deze inclusie in ieder geval voor die f waarvoor $f(x)$ redelijk dicht bij y ligt.

9.2. Opgave. Ga na dat elk element van een gelijkmatig continue familie continu is.

9.3. Voorbeeld. De familie functies $\{f_C : C \in \mathbb{R}\}$ uit Voorbeeld 7.2 is gelijkmatig continu. Laat $x, y \in \mathbb{R}$ en zij $\varepsilon > 0$. De verzameling $I = \bigl\{C : |Ce^x - y| < \varepsilon/2\bigr\}$ is een begrensd interval. Het is dan eenvoudig een $\delta > 0$ te vinden zó dat als $|z - x| < \delta$ dan $|Ce^z - Ce^x| < \varepsilon/2$ voor alle $C \in I$. Neem dan $O = (x - \delta, x + \delta)$ en $V = (y - \varepsilon/2, y + \varepsilon/2)$.

Het na Stelling 8.3 gesignaleerde probleem dat continuïteit bij puntsgewijze convergentie verloren kan gaan doet zich niet voor bij gelijkmatig continue families.

9.4. Stelling. *Laat Y een reguliere ruimte zijn en $F \subseteq Y^X$ gelijkmatig continu. Dan is de afsluiting van F ten opzichte van $\mathcal{T}_p$ ook gelijkmatig continu.*

Bewijs. Neem $x \in X$, $y \in Y$ en laat U een omgeving van y zijn. Zij W een omgeving van y zó dat $\operatorname{cl} W \subseteq U$. Kies dan omgevingen O van x en V van y zó dat voor elke $f \in F$ uit $f(x) \in V$ volgt dat $f[O] \subseteq W$.

Zij nu $f \in \operatorname{cl} F$ zó dat $f(x) \in V$. Dan geldt $f[O] \subseteq \operatorname{cl} W$. Immers, zij $z \in O$ en zij P een willekeurige omgeving van $f(z)$. Dan is $M(z, P) \cap M(x, V)$ een omgeving van f in $\mathcal{T}_p$, er is dus een $g \in F$ die in deze omgeving zit. Deze g voldoet aan $g(x) \in V$ en dus geldt $g(z) \in g[O] \subseteq W$. Ook geldt $g(z) \in P$ en dus $P \cap W \neq \varnothing$. □

Als we de puntsgewijze topologie beperken tot een gelijkmatig continue familie afbeeldingen krijgen we een toelaatbare topologie.

9.5. Stelling. *Als $F \subseteq Y^X$ gelijkmatig continu is en voorzien van de puntsgewijze topologie dan is de evaluatieafbeelding $\Omega: F \times X \to Y$ continu.*

Bewijs. Laat $f \in F$, $x \in X$ en zij U een omgeving van $f(x)$. Kies omgevingen O van x en V van y als in de definitie van gelijkmatige continuïteit. Voor elk paar $(g, z) \in M(x, V) \times O$ geldt dan $\Omega(g, z) = g(z) \in U$. □

k-ruimten

Zoals we in het bewijs van de Stelling van Arzelá en Ascoli zullen zien is de volgende situatie niet denkbeeldig: van een deelverzameling A van een ruimte X is bekend dat $A \cap C$ gesloten is (in C) voor *elke* compacte deelverzameling C van X. De vraag is dan: is A gesloten in X?

In een ruimte die aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet (dus in het bijzonder in metrische ruimten) is het antwoord bevestigend. Immers, A is gesloten dan en slechts dan als voor elke rij $\langle x_n \rangle_n$ in A die convergeert de limiet ook tot A behoort. Neem nu aan dat $A \cap C$ gesloten is voor elke compacte deelverzameling C van X en zij $\langle x_n \rangle_n$ een rij in A met limiet x. De verzameling $C = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ is compact, dus $A \cap C$ is gesloten in C; hieruit volgt dat $x \in A$.

In lokaal compacte ruimten is het antwoord ook bevestigend. Immers, neem aan dat $A \cap C$ gesloten is in C voor elke compacte deelverzameling C van de lokaal compacte ruimte X. Zij nu $x \in X \setminus A$ en kies een omgeving O van x met compacte afsluiting. Dan is $A \cap \operatorname{cl} O$ gesloten in $\operatorname{cl} O$ en dus in X. Er is dus een omgeving U van x zó dat $U \cap (A \cap \operatorname{cl} O) = \varnothing$. Maar dan $(U \cap O) \cap A = \varnothing$.

9.6. Definitie. Een Hausdorff ruimte X is een k-ruimte als de gesloten deelverzamelingen bepaald worden door de compacte deelverzamelingen, met andere woorden: een deelverzameling A van X is gesloten dan en slechts dan als voor elke compacte deelverzameling C van X de doorsnede $A \cap C$ gesloten in C is.

We hebben hierboven dus gezien dat lokaal compacte ruimten en ruimten die aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoen k-ruimten zijn.

9.7. Voorbeeld. De ruimte uit Voorbeeld 2.19 is niet een k-ruimte. De verzameling A uit Opgave 2.20 heeft met elke compacte verzameling een eindige doorsnede maar is niet gesloten.

9.8. Opmerking. Omdat we in de definitie de ruimte Hausdorff hebben verondersteld kunnen we het 'gesloten in C' vervangen door 'gesloten' of door 'compact'. Immers, compacte deelverzamelingen van Hausdorff ruimten zijn gesloten, en gesloten deelverzamelingen van compacte ruimten zijn weer compact.

Voor later gebruik bewijzen we nu twee stellingen over k-ruimten.

9.9. Stelling. *Zij X een k-ruimte en f een afbeelding van X naar een topologische ruimte Y. Dan geldt: f is continu dan en slechts dan als voor elke compacte deelverzameling C van X de beperking $f \restriction C$ continu is.*

Bewijs. Dit volgt meteen uit de karakterisering van continuïteit met behulp van volledige originelen van gesloten verzamelingen. □

9.10. Stelling. *Zij X een k-ruimte en Y een lokaal compacte ruimte. Dan is $X \times Y$ een k-ruimte.*

Bewijs. Zij $A \subseteq X \times Y$ zó dat $A \cap C$ gesloten is voor elke compacte deelverzameling C van $X \times Y$ en neem (x, y) buiten A.

Kies een omgeving W van y met compacte afsluiting; dan is $C = \{x\} \times \operatorname{cl} W$ compact en dus is $A \cap C$ gesloten. Er is dus een omgeving V van y met $\operatorname{cl} V \subseteq W$ en zó dat $\{x\} \times \operatorname{cl} V$ disjunct is van A. We werken nu verder in $X \times \operatorname{cl} V$.

We bewijzen nu dat $A_X = \pi_X\bigl[A \cap (X \times \operatorname{cl} V)\bigr]$ gesloten is. Zij $C \subseteq X$ compact. Dan is $A \cap (C \times \operatorname{cl} V)$ gesloten en dus compact, verder geldt $A_X \cap C = \pi_X\bigl[A \cap (C \times \operatorname{cl} V)\bigr]$ en dus is $A_X \cap C$ compact en dus gesloten. Dan is $(X \setminus A_X) \times V$ een omgeving van (x, y) die disjunct is van A. $\square$

9.11. Opgave. Zij X een k-ruimte en Y compact.

a) Bewijs: $A \subseteq X \times Y$ is gesloten dan en slechts dan als $A \cap (C \times Y)$ gesloten is voor elke compacte deelverzameling C van X.

b) Bewijs: $f\colon X \times Y \to Z$ is continu dan en slechts dan als $f \restriction C \times Y$ continu is voor elke compacte deelverzameling C van X.

De stelling van Arzelà en Ascoli, eerste versie

We gaan nu een stelling bewijzen die compacte deelverzamelingen in de compact-open topologie karakteriseert. Stellingen van dit type worden Arzelà-Ascoli-stellingen genoemd omdat Ascoli in 1883 en Arzelà in 1895 samen de compacte deelverzamelingen van $C\bigl([0,1], \mathbb{R}\bigr)$ ten opzichte van de topologie van uniforme convergentie karakteriseerden op een manier die erg lijkt op de manier die we nu gaan gebruiken.

We beginnen met een omkering van Stelling 9.5.

9.12. Stelling. *Zij Y een reguliere ruimte, X een willekeurige ruimte en voorzie $C(X, Y)$ van de puntsgewijze topologie $\mathcal{T}_p$. Zij $F \subseteq C(X, Y)$ compact en neem aan dat $\Omega\colon F \times X \to Y$ continu is. Dan is F een gelijkmatig continue familie afbeeldingen.*

Bewijs. Laat $x \in X$ en $y \in Y$ en zij U een omgeving van y. Kies een omgeving V van y met $\operatorname{cl} V \subseteq U$.

Merk nu op dat $M(x, \operatorname{cl} V)$ gesloten is (het complement is een open strook). Bekijk nu $F_0 = F \cap M(x, \operatorname{cl} V)$; deze verzameling is compact. Verder geldt $F_0 \times \{x\} \subseteq \Omega^{-1}[U]$. Pas nu Stelling 5.10 toe om omgevingen O van x en W van F_0 te vinden zó dat

$$F_0 \times \{x\} \subseteq W \times O \subseteq \Omega^{-1}[U].$$

Als nu $f \in F$ en $f(x) \in V$ dan $f \in F_0$ en dus $f(z) = \Omega(f, z) \in U$ voor elke $z \in O$. $\square$

We kunnen nu de eerste versie van de Stelling van Arzelá en Ascoli bewijzen.

9.13. Stelling. *Laat X een k-ruimte zijn, Y een reguliere ruimte en F een gesloten deelverzameling van $C(X, Y)$ met de compact-open topologie. Dan geldt: F is compact dan en slechts dan als F gelijkmatig continu is en als $\operatorname{cl} F(x)$ compact is voor elke x.*

Bewijs. Als F compact is dan volgt uit Stelling 8.3 dat F compact is ten opzichte van $\mathcal{T}_p$. Omdat $F(x) = \pi_x[F]$ volgt dan dat $F(x)$ compact is.

Om te bewijzen dat F gelijkmatig continu is passen we Stelling 9.12 toe. Omdat X een k-ruimte is is het voldoende aan te tonen dat voor elke compacte deelverzameling C van X de beperking $\Omega \restriction (F \times C)$ continu is. Welnu, zij $(f, x) \in F \times C$ en zij $U \subseteq Y$ een omgeving van $f(x)$. Kies, *binnen* C, een omgeving van x zó dat $f[\operatorname{cl} V] \subseteq U$ (C is regulier). Dan is $\bigl(M(\operatorname{cl} V, U) \cap F\bigr) \times V$ een omgeving van (f, x) die door Ω binnen U wordt afgebeeld.

Omgekeerd, neem aan dat F gelijkmatig continu is en dat $\operatorname{cl} F(x)$ compact is voor elke $x \in X$.

De verzameling $\Pi = \prod_x \operatorname{cl} F(x)$ is compact in het product Y^X en bevat F en dus ook de verzameling $\operatorname{cl}_p F$ (de afsluiting van F ten opzichte van $\mathcal{T}_p$). Deze verzameling is dus compact en, volgens Stelling 9.4, gelijkmatig continu.

Vervolgens concluderen we, met behulp van Stelling 9.5, dat $\Omega\colon \mathrm{cl}_p F \times X \to Y$ continu is. De compact-open topologie is net en dus is $\Lambda(\Omega)\colon \mathrm{cl}_p F \to \bigl(C(X,Y), \mathcal{T}_c\bigr)$ continu. Merk echter op dat $\Lambda(\Omega)(f) = f$ voor elke afbeelding f. We zien nu dat $\mathrm{cl}_p F$ compact is ten opzichte van $\mathcal{T}_c$; hieruit volgt dat $\mathcal{T}_c \restriction \mathrm{cl}_p F = \mathcal{T}_p \restriction \mathrm{cl}_p F$ en dat $\mathrm{cl}_p F$ gesloten is ten opzichte van $\mathcal{T}_c$. Omdat F gesloten verondersteld was volgt nu dat F zelf compact is. $\square$

Equicontinue families

Als de ruimte Y een metrische ruimte is dan kunnen we een iets aangepaste versie van de stelling van Arzelà en Ascoli geven. Hiervoor hebben we het volgende begrip nodig.

9.14. Definitie. Zij X een topologische ruimte, Y een metrische ruimte en F een familie afbeeldingen van X naar Y. De familie F heet *equicontinu* als voor elke $p \in X$ en elke $\varepsilon > 0$ een omgeving O van p bestaat zó dat voor elke $x \in O$ en elke $f \in F$ geldt $d\bigl(f(x), f(p)\bigr) < \varepsilon$.

Ook deze definitie formaliseert de vage zin 'alle functies zijn in elk punt even continu'; nu door bij elke $\varepsilon > 0$ één omgeving te vinden die voor deze ε werkt.

9.15. Opgave. Ga na dat elk element van een equicontinue familie continu is.

9.16. Opgave. Neem aan dat X een compacte metrische ruimte is en $F \subseteq Y^X$ equicontinu. Bewijs dat F *uniform equicontinu* is, dat wil zeggen: voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$ zó dat voor elke $x, y \in X$ met $\rho(x,y) < \delta$ geldt dat $d\bigl(f(x), f(y)\bigr) < \varepsilon$ voor *elke* $f \in F$.

We bekijken nu het verband tussen equicontinuïteit en gelijkmatige continuïteit.

9.17. Stelling. *Elke equicontinue familie is gelijkmatig continu.*

Bewijs. Laat $F \subseteq Y^X$ equicontinu zijn en bekijk $p \in X$, $y \in Y$ en een omgeving U van y. Kies $\varepsilon > 0$ zó dat $B_\varepsilon(y) \subseteq U$ en kies vervolgens een omgeving O van p zó dat $d\bigl(f(x), f(p)\bigr) < \varepsilon/2$ voor elke $x \in O$. Als nu $d\bigl(f(p), y\bigr) < \varepsilon/2$ dan volgt meteen dat $f[O] \subseteq U$. $\square$

Niet elke gelijkmatig continue familie is equicontinu; de familie uit Voorbeeld 7.2 illustreert dit. Er is immers geen $\delta > 0$ te vinden zó dat $|Ce^x - C| < \mathbf{1}$ voor alle x met $|x| < \delta$ en alle C.

Het probleem met deze familie is dat $F(x)$ te groot is.

9.18. Stelling. *Als $F \subseteq Y^X$ gelijkmatig continu is en als voor elke x de verzameling $F(x)$ een compacte afsluiting heeft dan is F equicontinu.*

Bewijs. Zij $p \in X$ en $\varepsilon > 0$. Kies voor elke $y \in \mathrm{cl}\, F(p)$ een omgeving U_y van y en een omgeving V_y van p zó dat als $f \in F$ en $f(p) \in U_y$ dan $f[V_y] \subseteq B_{\varepsilon/2}(y)$.

Omdat $\mathrm{cl}\, F(p)$ compact is kunnen we $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in $\mathrm{cl}\, F(p)$ vinden zó dat $\mathrm{cl}\, F(p) \subseteq \bigcup_i U_{y_i}$.

Zij nu $V = \bigcap_i V_{y_i}$. Neem $f \in F$ en $x \in V$. Kies i met $f(p) \in U_{y_i}$, dan volgt meteen dat $f[V] \subseteq B_{\varepsilon/2}(y)$ en dus volgt uit de driehoeksongelijkheid dat $d\bigl(f(x), f(p)\bigr) < \varepsilon$. $\square$

De stelling van Arzelà en Ascoli, tweede versie

Met behulp van Stellingen 9.17 en 9.18 is de volgende versie van de stelling van Arzelà en Ascoli eenvoudig uit de eerste versie af te leiden.

9.19. Stelling. *Laat X een k-ruimte zijn, Y een metrische ruimte en F een gesloten deelverzameling van $C(X,Y)$ met de compact-open topologie. Dan geldt: F is compact dan en slechts dan als F equicontinu is en als $\mathrm{cl}\, F(x)$ compact is voor elke x.*

Uniforme convergentie op compacte verzamelingen

We hebben ons niet uitgesproken over compactheid ten opzichte van de topologie van uniforme convergentie. Dat we hier niet al te veel van mogen verwachten blijkt als we naar een deelfamilie van de familie uit Voorbeeld 7.2 kijken.

De familie $F = \{f_C : C \in [0,1]\}$ is compact ten opzichte van de compact-open topologie; de familie is immers gelijkmatig continu en voor elke x is de verzameling $F(x) = [0, e^x]$ compact. Echter, ten opzichte van de topologie van uniforme convergentie liggen alle elementen oneindig ver uit elkaar en de verzameling is dus niet compact.

Aan de andere kant, als X compact is (en Y metrisch) dan zijn de compact-open topologie en de topologie van uniforme convergentie beide acceptabel en dus aan elkaar gelijk. De stelling van Arzelà en Ascoli karakteriseert in dit geval dus wel degelijk de compacte deelverzamelingen in de topologie van uniforme convergentie.

Om toch iets van uniforme convergentie te redden en met het oog op latere toepassingen geven we nu een andere beschrijving van de compact-open topologie in het geval dat Y een metrische ruimte is.

9.20. Definitie. Als f en g afbeeldingen van X naar Y zijn en C een compacte deelverzameling van X dan definiëren we

$$d_C(f,g) = \sup\Bigl\{d\bigl(f(x), g(x)\bigr) : x \in C\Bigr\}.$$

9.21. Definitie. Als X een topologische ruimte is en Y een metrische ruimte dan wordt de *topologie van uniforme convergentie op compacte verzamelingen* ook wel de *topologie van compacte convergentie* op $C(X,Y)$ gedefinieerd door voor elke f de familie

$$\bigl\{U(f,C,\varepsilon) : C \text{ compact en } \varepsilon > 0\bigr\}$$

als lokale basis te nemen, waarbij

$$U(f,C,\varepsilon) = \{g : d_C(g,f) < \varepsilon\}.$$

9.22. Opgave. Laat zien dat in Definitie 9.21 een correcte toekenning van lokale bases is gedaan.

De volgende stelling laat zien dat we niets nieuws hebben gemaakt.

9.23. Stelling. *De compact-open topologie en de topologie van compacte convergentie zijn gelijk.*

Bewijs. Zij $C \subseteq X$ compact, $U \subseteq Y$ open en zij $f \in M(C,U)$. Omdat $f[C]$ compact is en $Y \setminus U$ gesloten is er een $\varepsilon > 0$ zó dat $B_\varepsilon\bigl(f[C]\bigr) \subseteq U$. Dan geldt $U(f,C,\varepsilon) \subseteq M(C,U)$. De compact-open topologie is dus bevat in de topologie van compacte convergentie.

Omgekeerd, zij $f \in C(X,Y)$ en laat C compact zijn en $\varepsilon > 0$. Kies voor elke $x \in C$ een omgeving O_x van x zó dat $f[O_x] \subseteq B_{\varepsilon/2}\bigl(f(x)\bigr)$ en zij C_x de afsluiting, binnen C, van $O_x \cap C$.

Neem x_1, x_2, …, x_n in C zó dat $C \subseteq \bigcup_i O_{x_i}$ en zij $O = \bigcap_i M\bigl(C_{x_i}, B_{\varepsilon/2}\bigl(f(x_i)\bigr)\bigr)$. Dan is O open in de compact-open topologie; we laten zien dat $f \in O \subseteq U(f,C,\varepsilon)$. Dat $f \in O$ is duidelijk. Als $g \in O$ en $x \in C$ neem dan i met $x \in O_{x_i}$; dan geeft de driehoeksongelijkheid dat $d\bigl(g(x), f(x)\bigr) < \varepsilon$. □

We passen dit idee toe in het geval X een lokaal compacte ruimte met een aftelbare basis $\mathcal{B}$ is. We kunnen wel aannemen dat voor elke $B \in \mathcal{B}$ de afsluiting $\operatorname{cl} B$ compact is (de elementen van $\mathcal{B}$ met deze eigenschap vormen ook een basis).

Neem een aftelling $\langle B_n \rangle_n$ van $\mathcal{B}$ en definieer een rij compacte verzamelingen door 1) $C_1 = \operatorname{cl} B_1$ en 2) als C_n gevonden is kiezen we eerst een m_n zó dat $C_n \subseteq \bigcup_{i \leqslant m_n} B_i$; we nemen dan $C_{n+1} = \operatorname{cl} \bigcup_{i \leqslant m_n} B_i$.

De rij $\langle C_n \rangle_n$ heeft de volgende eigenschappen: elke C_n is compact, voor elke n geldt $C_n \subseteq \operatorname{int} C_{n+1}$ en $X = \bigcup_n C_n$. Hieruit volgt dat voor elke compacte deelverzameling C van X een n bestaat met $C \subseteq C_n$.

We kunnen nu de volgende stelling afleiden.

9.24. Stelling. *Als X een lokaal compacte ruimte met een aftelbare basis is en Y een metrische ruimte dan is de compact-open topologie op $C(X, Y)$ metriseerbaar.*

Bewijs. We nemen op Y een metriek die begrensd is door 1. Definieer nu voor $f, g \in C(X, Y)$

$$d_{uc}(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_{C_n}(f, g).$$

Dan is d_{uc} een metriek op $C(X, Y)$ die de topologie van compacte convergentie induceert. Immers, zij $f \in C(X, Y)$, C compact en $\varepsilon > 0$; kies N zó groot dat $C \subseteq C_N$. Merk nu op dat $d_C(f, g) \leqslant d_{C_N}(f, g) \leqslant 2^N d_{uc}(f, g)$ en dus dat $B_\delta(f) \subseteq U(f, C, \varepsilon)$, waar $\delta = 2^{-N}\varepsilon$. □

De reden dat we een metriek op $C(X, Y)$ hebben willen definiëren is dat in metrische ruimten compactheid gekarakteriseerd wordt door het feit dat elke rij een convergente deelrij heeft en dit is wat in de toepassingen het vaakst gebruikt wordt. De stelling van Arzelà en Ascoli neemt dan de volgende vorm aan.

9.25. Stelling. *Zij X een lokaal compacte ruimte met een aftelbare basis en Y een metrische ruimte. Voor een familie $F \subseteq C(X, Y)$ zijn de volgende uitspraken equivalent*

(i) *Elke rij in F heeft een deelrij die uniform convergeert op elke compacte deelverzameling van X*

(ii) *F is equicontinu en $\operatorname{cl} F(x)$ is compact voor elke x.*

VII

TOEPASSINGEN

We zullen nu twee toepassingen van de stelling van Arzelà en Ascoli behandelen. De eerste zegt dat voor continue functies f de differentiaalvergelijking $y' = f(x, y)$ altijd een oplossing heeft. De tweede is de afbeeldingsstelling van Riemann; deze stelling zegt dat een enkelvoudig samenhangend gebied in $\mathbb{C}$ analytisch equivalent is met de open eenheidsschijf (tenzij dat gebied gelijk is aan $\mathbb{C}$). Deze fraaie stelling heeft onder meer toepassingen in de potentiaaltheorie omdat de harmonische functies in een enkelvoudig samenhangend gebied blijkbaar nauw samenhangen met de harmonische functies in de open eenheidsschijf.

10. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

In dit hoofdstuk bewijzen we een existentiestelling voor oplossingen van differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$y' = f(x, y), \tag{†}$$

waarbij f een continue functie is. In de cursus Voortgezette Analyse is ook een dergelijk stelling bewezen met behulp van de stelling van Banach. Daar werd meer van f geëist dan alleen continuïteit; de partiele afgeleide f_y moest begrensd zijn. De conclusie was ook sterker: de oplossingen waren uniek.

Een existentiestelling

We bewijzen nu dat de differentiaalvergelijking (†) voor elke beginvoorwaarde een oplossing heeft mits f aan bepaalde voorwaarden voldoet.

10.1. Stelling. *Laat $f: S \to \mathbb{R}$ continu en begrensd zijn, waar S de strook $\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ is. Dan heeft voor elke $c \in \mathbb{R}$ het beginwaardeprobleem*

$$y' = f(x, y) \qquad y(0) = c$$

een oplossing.

Bewijs. Definieer voor elke n een functie φ_n door de methode van Euler op het beginwaardeprobleem toe te passen: $\varphi_n(0) = c$ en op $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ geldt telkens

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(x_{n,i}) + f\big(x_{n,i}, \varphi_n(x_{n,i})\big)(x - x_{n,i}),$$

waarbij $x_{n,i} = \frac{i}{n}$. Elke φ_n is dus een stuksgewijs lineaire functie.

We bewijzen dat $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu is; omdat $[0, 1]$ compact is volgt dan meteen dat $\{\varphi_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ begrensd is en dus een compacte afsluiting heeft. Kies $M \in \mathbb{R}$ zó dat $\big|f(x, y)\big| \leqslant M$ voor alle x en y. Dan volgt uit de definitie van de φ_n meteen dat

$$\big|\varphi_n(x) - \varphi_n(p)\big| \leqslant M\,|x - p|$$

voor elk tweetal punten $x, p \in [0,1]$. Dit impliceert zeker dat $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu is en verder volgt dat $\bigl|\varphi_n(x)\bigr| \leqslant M + |c| = M_1$ voor elke x en elke n.

Volgens de stelling van Arzelà en Ascoli heeft $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ ten opzichte van de topologie van compacte convergentie een compacte afsluiting; de rij $\langle\varphi_n\rangle_n$ heeft dus een convergente deelrij $\langle\varphi_{n_k}\rangle_k$. Omdat $[0,1]$ compact is, is de deelrij zelfs uniform convergent. Zij φ de uniforme limiet van $\langle\varphi_{n_k}\rangle_k$.

We bewijzen dat φ een oplossing van het beginwaardeprobleem is. Dat $\varphi(0) = c$ is duidelijk. We bewijzen dat φ voldoet aan

$$\varphi(x) = c + \int_0^x f\bigl(t, \varphi(t)\bigr)\, dt$$

en dus een oplossing van het beginwaardeprobleem is.

De functie f is op de rechthoek $[0,1] \times [-M_1, M_1]$ uniform continu. We kunnen daarom concluderen dat $f\bigl(x, \varphi_{n_k}(x)\bigr)$ uniform naar $f\bigl(x, \varphi(x)\bigr)$ convergeert. Dus volgt

$$\int_0^x f\bigl(t, \varphi(t)\bigr)\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^x f\bigl(t, \varphi_{n_k}(t)\bigr)\, dt.$$

Nu geldt

$$\varphi_n(x) = c + \int_0^x s_n(t)\, dt,$$

waarbij s_n de stapfunctie is die op $[x_{n,i}, x_{n,i+1})$ telkens de waarde $f\bigl(x_{n,i}, \varphi_n(x_{n,i})\bigr)$ aanneemt. De uniforme continuïteit van f garandeert nu dat $f\bigl(t, \varphi_n(t)\bigr) - s_n(t)$ uniform naar 0 convergeert. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x) \\
&= c + \lim_{k\to\infty} \int_0^x s_{n_k}(t)\, dt \\
&= c + \lim_{k\to\infty} \int_0^x f\bigl(t, \varphi_{n_k}(t)\bigr)\, dt \\
&= c + \int_0^x f\bigl(t, \varphi(t)\bigr)\, dt,
\end{aligned}$$

waarmee de stelling bewezen is. □

10.2. Opgave. Bewijs dat $f\bigl(t, \varphi_n(t)\bigr) - s_n(t)$ inderdaad uniform naar 0 convergeert.

Door het bewijs nauwkeurig na te lopen kan men de volgende stelling bewijzen.

10.3. Stelling. *Zij $R = [a, a+r] \times [b-s, b+s]$ een gesloten rechthoek en zij $f\colon R \to \mathbb{R}$ continu. Zij verder $A = \max\bigl\{\bigl|f(x,y)\bigr| : (x,y) \in R\bigr\}$ en $\varepsilon = \min\{r, s/A\}$. Dan heeft het beginwaardeprobleem*

$$y' = f(x,y) \qquad y(a) = b$$

een oplossing die op het hele interval $[a, a+\varepsilon]$ bestaat.

10.4. Opmerking. Als $f \equiv A$ op R dan is ε optimaal: de oplossing $y = b + A(x-a)$ schiet op tijdstip $a + \varepsilon$ de rechthoek uit.

Met wat zorgvuldig plakwerk kan de volgende stelling van Peano bewezen worden.

10.5. Stelling. *Zij G een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ en $f\colon G \to \mathbb{R}$ continu. Dan heeft voor elk punt (a,b) van G de differentiaalvergelijking $y' = f(x,y)$ een oplossing y met $y(a) = b$ die naar beide kanten voort te zetten is tot de rand van G.*

10.6. Opmerking. De stelling zegt niet dat een oplossing gevonden kan worden die op heel $\mathbb{R}$ bestaat, ook niet als $G = \mathbb{R}^2$. Neem de vergelijking $y' = 1 + y^2$ maar; de oplossing van deze bestaat niet op intervallen langer dan π.

Uniciteit van de oplossingen

Stellingen 10.1, 10.3 en 10.5 spreken zich niet uit over de uniciteit van de oplossingen. Dat kan ook niet, zoals het volgende voorbeelden laat zien.

10.7. Voorbeeld. De vergelijking $y' = \sqrt{|y|}$ heeft niet overal unieke oplossingen. Bekijk bijvoorbeeld het punt $(0,0)$. Door dit punt gaan in feite oneindig veel oplossingen maar twee springen meteen in het oog: $y_1(x) = 0$ en

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & \text{als } x \geqslant 0 \\ -\frac{1}{4}x^2 & \text{als } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Het probleem op de x-as is dat daar de functie $\sqrt{|y|}$ in de y-richting oneindige helling heeft. De volgende stelling, die we zonder bewijs vermelden, geeft aan wanneer uniciteit wel geldt.

10.8. Stelling. *Zij G een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ en $f\colon G \to \mathbb{R}$ een continue functie met de volgende eigenschap: elk punt (a,b) heeft een omgeving O waarop f in de y-richting niet te sterk varieert, dat wil zeggen: er is een getal M zó dat voor elk tweetal punten (x,y_1) en (x,y_2) van O geldt $\bigl|f(x,y_1) - f(x,y_2)\bigr| \leqslant M\,|y_1 - y_2|$. Dan heeft voor elk punt (a,b) van G het beginwaardeprobleem*

$$y' = f(x,y) \qquad y(a) = b$$

een unieke oplossing die voort te zetten is tot de rand van G.

De voorwaarde uit de stelling wordt een *Lipschitz-voorwaarde* genoemd. In het algemeen wordt een functie f *Lipschitz continu* genoemd als een getal L (een *Lipschitz constante*) bestaat zó dat $\bigl|f(x) - f(y)\bigr| \leqslant L\,|x - y|$ voor alle x en y.

Merk op dat een Lipschitz continue functie ook uniform continu is. Hoewel het lijkt alsof een Lipschitz continue functie een begrensde afgeleide zou moeten hebben is dat niet zo: de absolute-waardefunctie is een voorbeeld van Lipschitz continue functie die niet differentieerbaar is.

11. DE AFBEELDINGSSTELLING VAN RIEMANN

Om de afbeeldingsstelling van Riemann te bewijzen hebben we (natuurlijk) wat complexe-functietheorie nodig. Alles wat we nodig hebben is te vinden in het boek [1991] van AARTS.

Enkelvoudig samenhangende gebieden

Een *gebied* is een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$. Een gebied heet *enkelvoudig samenhangend* als elke gesloten kromme in dat gebied nulhomotoop is.

We geven een paar karakteriseringen van enkelvoudige samenhang. We noteren, voor een gebied G, met $H(G)$ de verzameling van alle analytische* functies van G naar $\mathbb{C}$. Deze verzameling denken we ons altijd voorzien van de topologie van compacte convergentie. Omdat G lokaal compact is en een aftelbare basis heeft is de topologie dus metriseerbaar.

11.1. Stelling. *Voor een gebied G in $\mathbb{C}$ zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(i) *G is enkelvoudig samenhangend.*
(ii) *Als $f \in H(G)$ en als γ een gesloten kromme in $\mathbb{C}$ is dan $\int_\gamma f = 0$.*
(iii) *Elke $f \in H(G)$ heeft een primitieve.*
(iv) *Als $f \in H(G)$ en als $f(z) \neq 0$ voor alle $z \in G$ dan bestaat een $g \in H(G)$ zó dat $f(z) = e^{g(z)}$ voor alle z.*
(v) *Als $f \in H(G)$ en als $f(z) \neq 0$ voor alle $z \in G$ dan bestaat een $g \in H(G)$ zó dat $f(z) = g(z)^2$ voor alle z.*

Bewijs. (i) $\Rightarrow$ (ii): dit volgt uit de integraalstelling van Cauchy.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): kies $z_0 \in G$ vast en kies voor elke $z \in G$ een stuksgewijs gladde kromme γ_z in G van z_0 naar z en definieer dan $F(z) = \int_{\gamma_z} f$. Omdat $\int_\gamma f = 0$ voor elke *gesloten* kromme volgt dat deze definitie onafhankelijk is van de keuze van γ_z. Het is nu verder eenvoudig na te gaan dat $F' = f$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): kies een primitieve F van f'/f en merk op dat $(e^F/f)' = 0$. Er is dus een constante K zó dat $f = Ke^F$; kies nu k met $e^k = K$, dan volgt $f = e^{F+k}$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): dit is eenvoudig, gegeven g met $e^g = f$ nemen we $h = e^{g/2}$.

(v) $\Rightarrow$ (i): dit volgt uit de afbeeldingsstelling van Riemann. We zullen in het bewijs van die stelling alléén eigenschap (v) gebruiken. □

Het bewijs van de stelling

We formuleren de afbeeldingsstelling van Riemann als volgt.

11.2. Stelling. *Zij G een enkelvoudig samenhangend gebied in $\mathbb{C}$ dat niet gelijk is aan $\mathbb{C}$ en zij $\alpha \in G$. Dan bestaat een unieke analytische functie $f\colon G \to \mathbb{C}$ met de volgende eigenschappen.*

(i) *$f(\alpha) = 0$ en $f'(\alpha) > 0$;*
(ii) *f is injectief;*
(iii) *$f[G] = D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Bewijs. We nemen de familie van alle kandidaatfuncties:

$$F = \{f \in H(G) : F[G] \subseteq D,\ f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) > 0 \text{ en } f \text{ is injectief}\}.$$

Uit de later te bewijzen stelling van Montel (Stelling 11.5) volgt dat de afsluiting $\operatorname{cl} F$ van F ten opzichte van de topologie van compacte convergentie compact is.

Als we bewijzen dat F niet leeg is en dat $\operatorname{cl} F = F \cup \{\mathbf{0}\}$ dan zijn we klaar. Immers, de functie $f \mapsto f'(a)$ van $H(G)$ naar $\mathbb{C}$ is continu ten opzichte van $\mathcal{T}_c$; dit volgt uit de integraalformule van Cauchy die zegt dat

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}\, dz$$

* De H in $H(G)$ staat voor Holomorf.

voor elke f, waarbij γ een klein cirkeltje rond α is dat binnen G ligt.

We kunnen dan een $f \in \operatorname{cl} F$ kiezen zó dat $f'(\alpha)$ maximaal is; omdat F niet leeg is geldt dan $f \in F$. Neem aan dat $\beta \in D \setminus f[G]$ en bekijk dan de functie g gedefinieerd door

$$g(z) = \frac{f(z) - \beta}{1 - \overline{\beta} f(z)}. \tag{$*$}$$

Deze functie is analytisch op G en neemt nergens de waarde 0 aan. We kunnen dus een $h \in H(G)$ vinden zó dat $g = h^2$ (hier gebruiken we de enkelvoudige samenhang voor het eerst). Merk op dat $g[G] \subseteq D$ (Opgave 11.3) en dus ook dat $h[G] \subseteq D$.

Definieer nu $k \in H(G)$ door

$$k(z) = \frac{\bigl|h'(\alpha)\bigr|}{h'(\alpha)} \frac{h(z) - h(\alpha)}{1 - \overline{h(\alpha)} h(z)}.$$

Dan is k injectief en verder geldt $k[G] \subseteq D$ (Opgave 11.3) en $k(\alpha) = 0$ (duidelijk). We berekenen $k'(\alpha)$:

$$k'(\alpha) = \frac{\bigl|h'(\alpha)\bigr|}{h'(\alpha)} \frac{h'(\alpha)\bigl(1 - |h(\alpha)|^2\bigr)}{\bigl(1 - |h(\alpha)|^2\bigr)^2} = \frac{\bigl|h'(\alpha)\bigr|}{1 - \bigl|h(\alpha)\bigr|^2}.$$

Merk nu op dat $h(\alpha)^2 = -\beta$ en dat, na differentiatie van $(*)$,

$$2h(\alpha)h'(\alpha) = f'(\alpha)\bigl(1 - |\beta|^2\bigr).$$

Als we dit invullen volgt

$$\begin{aligned} k'(\alpha) &= \frac{f'(\alpha)\bigl(1 - |\beta|^2\bigr)}{2\sqrt{|\beta|}} \frac{1}{1 - |\beta|} \\ &= f'(\alpha) \frac{1 + |\beta|}{2\sqrt{|\beta|}} \\ &> f'(\alpha) \end{aligned}$$

Dus $k \in F$ en $k'(\alpha) > f'(\alpha)$, een tegenspraak.

We bewijzen nu dat F niet leeg is. Kies een punt $\beta \in \mathbb{C} \setminus G$ en neem $g \in H(G)$ zó dat $g(z)^2 = z - \beta$ voor alle $z \in G$. Merk op dat g injectief is; zelfs geldt: als $g(z) = \pm g(w)$ dan $z - \beta = g(z)^2 = g(w)^2 = w - \beta$ en dus $z = w$. De open-afbeeldingstelling impliceert dat $g[G]$ open is; er is dus een $r > 0$ zó dat $B_r\bigl(g(\alpha)\bigr) \subseteq g[G]$.

We beweren nu dat $G \cap B_r\bigl(-g(\alpha)\bigr) = \varnothing$. Immers, als $g(z) \in B_r\bigl(-g(\alpha)\bigr)$ dan $-g(z) \in B_r\bigl(g(\alpha)\bigr)$ en dus is er een $w \in G$ met $g(w) = -g(z)$. Maar dan $w = z$ en dus $g(z) = 0$, hetgeen niet kan omdat $\beta \notin G$. Het is nu eenvoudig een Möbiustransformatie te maken die $\{z : \bigl|z + g(\alpha)\bigr| > r\}$ en dus ook $g[G]$ binnen D afbeeldt; met behulp van een transformatie als in Opgave 11.3 en een rotatie is g dan om te bouwen tot een element van F.

Zij tenslotte $\langle f_n \rangle_n$ een rij in F die naar een functie f convergeert en neem aan dat f niet de nulfunctie is. Dan geldt in ieder geval $f(\alpha) = 0$ en met behulp van de integraalformule van Cauchy volgt na limietovergang dat $f'(\alpha) \geqslant 0$.

Neem nu $z_1 \neq z_2$ in G en zij K een gesloten cirkelschijf rond z_2 waar z_1 niet in zit en wel zó dat $f(z) \neq f(z_1)$ op de rand van K (de een niet-constante analytische functie heeft slechts aftelbaar veel nulpunten). Stel $w = f(z_1)$ en $w_n = f_n(z_1)$ voor $n \in \mathbb{N}$. Stel verder

$$\delta = \min\bigl\{\bigl|f(z) - w\bigr| : z \text{ op de rand van } K\bigr\}.$$

Omdat $f_n(z) - w_n$ op K uniform naar $f(z) - w$ convergeert is er een n zó dat

$$\bigl|(f(z) - w) - (f_n(z) - w_n)\bigr| < \frac{1}{2}\delta < \bigl|f(z) - w\bigr|$$

op de rand van K. Maar dan hebben $f(z) - w$ en $f_n(z) - w_n$ evenveel (en dus geen) nulpunten in het inwendige van K (Stelling van Rouché); we zien dat $f(z_2) \neq f(z_1)$. De functie f is dus injectief. Dan volgt ook nog dat $f'(z) \neq 0$ voor alle z en dus in het bijzonder $f'(a) > 0$. We zien: als $f \in \operatorname{cl} F$ en $f \neq \mathbf{0}$ dan $f \in F$.

Merk op dat we door een vast element f van F met $1/n$ te vermenigvuldigen een rij in F creëren die in $H(G)$ naar de nulfunctie convergeert. □

11.3. Opgave. In het bewijs van de afbeeldingsstelling van Riemann hebben we een paar keer een Möbiustransformatie gebruikt en wel van de vorm

$$z \mapsto \frac{z - \beta}{1 - \overline{\beta} z}$$

met $\beta \in D$. Bewijs dat zo'n transformatie de schijf D op zichzelf afbeeldt en β naar 0 stuurt.

11.4. Opgave. In het bewijs van de afbeeldingsstelling van Riemann hebben we de open-afbeeldingstelling gebruikt; deze zegt dat indien f analytisch is en $f'(\alpha) \neq 0$ er bij elke $\varepsilon > 0$ een $r > 0$ bestaat zó dat $B_r\bigl(f(\alpha)\bigr) \subseteq f\bigl[B_\varepsilon(\alpha)\bigr]$. Het gevolg is dan dat voor een injectieve analytische functie f voor elke open deelverzameling O van G het beeld $f[O]$ ook open is; f is een *open afbeelding*.

a) Bewijs deze stelling met behulp van de inverse-functiestelling uit de gewone analyse.
b) Bewijs deze stelling met behulp van de stelling van Rouché.
c) Toon, voor de speciale functie g in het bewijs, rechtstreeks aan dat $g[G]$ open is.

De stelling van Montel

We moeten nu de in het bewijs van de afbeeldingsstelling van Riemann aangekondigde stelling van Montel nog bewijzen. Deze karakterizeert de deelverzamelingen van $H(G)$ die een compacte afsluiting hebben.

In het spraakgebruik van de complexe-functietheorie wordt een familie analytische functies met compacte afsluiting *normaal* genoemd.

We merken eerst op dat $H(G)$ gesloten is in $C(G, \mathbb{C})$. Immers als de rij $\langle f_n \rangle_n$ naar een functie f convergeert dan betekent dit dat voor elke gesloten kromme γ in G geldt

$$\int_\gamma f = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = 0.$$

De stelling van Morera impliceert dan dat f analytisch is.

We noemen een familie F functies *lokaal begrensd* als voor elk punt a een omgeving O en een postief getal M bestaan zó dat $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant M$ voor alle punten z in O en alle $f \in F$.

11.5. Stelling. *Zij F een familie analytische functies. Dan is F normaal dan en slechts dan als F lokaal begrensd is.*

Bewijs. Als F normaal is dan is $\operatorname{cl} F$ compact en dus equicontinu. Zij $\alpha \in G$ en kies een omgeving O van α zó dat $\bigl|f(z) - f(\alpha)\bigr| < 1$ als $z \in O$ en $f \in F$. Verder is $\operatorname{cl} F(\alpha)$ compact en dus begrensd, zeg $|w| \leqslant M$ voor alle $w \in \operatorname{cl} F(\alpha)$. Dan volgt dan $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant M + 1$ als $z \in O$ en $f \in F$.

Omgekeerd, neem aan dat F lokaal begrensd is. We moeten bewijzen dat voor elke z de verzameling $\operatorname{cl} F(z)$ compact is; dit volgt meteen uit de lokale begrensdheid. Vervolgens tonen we aan dat F equicontinu is. Zij $\alpha \in G$ en kies $r > 0$ en $M > 0$ zó dat $\operatorname{cl} B_r(\alpha) \subseteq G$ en $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant M$ als $|z - \alpha| \leqslant r$ en $f \in F$.

Zij nu z zó dat $|z - \alpha| < r/2$ dan geldt, als γ de cirkel $\{w : |w - \alpha| = r\}$ is,

$$\begin{aligned}
\bigl|f(z) - f(\alpha)\bigr| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(w)(\alpha - z)}{(w - \alpha)(w - z)} \, dw \right| \\
&\leqslant \frac{2\pi r}{2\pi} M \frac{4}{r^2} \, |z - \alpha| \\
&= \frac{4M}{r} \, |z - \alpha| \, .
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat F equicontinu is in α. □

Literatuur

AARTS, J. M.
[1991] *Complexe Functies, de eerste stappen.* ε 20. Epsilon Uitgaven, Utrecht.

CONWAY, J. B.
[1978] *Functions of one complex variable.* Graduate Texts in Mathematics 11. Springer-Verlag, New York, second edition.

VAN DOUWEN, E. K.
[1972] A regular space on which every continuous real-valued function is constant. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **20**, 143–145.

ENGELKING, R.
[1989] *General Topology. Revised and completed edition.* Sigma Series in Pure Mathematics 6. Heldermann Verlag, Berlin.

HAUSDORFF, F.
[1914] *Grundzüge der Mengenlehre.* Chelsea Publishing Company, New York. Reprint from 1978 of original edition published in Leipzig.

KELLEY, J. L.
[1974] *General Topology.* Graduate Texts in Mathematics 27. Springer-Verlag, Berlin etc. Original edition: University Series in Higher Mathematics, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1955.

KUNEN, K.
[1980] *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Studies in Logic and the foundations of mathematics 102. North-Holland, Amsterdam.

LEVY, A.
[1979] *Basic Set Theory.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin etc.

NOBLE, N.
[1971] Products with cloed projections II. *Transactions of the American Mathematical Society*, **160**, 169–183.

SORGENFREY, R. H.
[1947] On the topological product of paracompact spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **53**, 631–632.

TYCHONOFF, A.
[1925] Über einen Metrizationssatz von P. Urysohn. *Mathematische Annalen*, **95**, 139–142.
[1930] Über die topologische Erweiterung von Raümen. *Mathematische Annalen*, **102**, 544–561.

URYSOHN, P.
[1924] Über die Metrisation der kompakten topologischen Räume. *Mathematische Annalen*, **92**, 275–293.
[1925] Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen. *Mathematische Annalen*, **94**, 262–295.

ZERMELO, E.
[1904] Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen*, **56**, 514–516.

ZORN, M.
[1935] A remark on a method in transfinite algebra. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **41**, 667–670.

Index