

Caleidoscoop: Logica

Non impeditus ab ulla scientia

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 3 October, 2007

Overzicht

- 1 **Propositie logica**
 - Waarheidstabellen
 - Soorten beweringen

- 2 **Eerste-orde logica**
 - Kwantoren
 - Negaties

Waarheidstabellen

We gaan rekenen met proposities (beweringen).
Bedenker: George Boole (1854).

- \neg niet
- \wedge en
- \vee of
- \rightarrow impliceert

Hoe 'rekenen' we hier mee?

Waarheidstabellen

Beweringen zijn 'waar' (*waarheidswaarde 1*)
of 'onwaar' (*waarheidswaarde 0*).

Rekenregels:

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Waarheidstabellen

Waarom zo?

- Duidelijk.
- ∧ Ook duidelijk (denk aan \cap).
- ∨ Ook duidelijk (het *inclusieve* of, \cup).
- Een beetje discutabel, maar, denk aan \subseteq

Inclusie

$A \subseteq B$ betekent $(x \in A) \rightarrow (x \in B)$

$x \in A$ en $x \in B$	mag wel	1
$x \in A$ en $x \notin B$	mag niet	0
$x \notin A$ en $x \in B$	mag wel	1
$x \notin A$ en $x \notin B$	mag wel	1

Merk op: dit komt overeen met $(x \notin A) \vee (x \in B)$.

Implicatie bewijzen, I (direct)

Om een implicatie te bewijzen moet je de mogelijkheid van de tweede regel uitsluiten.

Dus: stel p

Een héél slim bewijs

Conclusie: q

Tabellen maken

Bijvoorbeeld $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p)$

Eerst de formule ontleden,

de bouwstenen zijn: $p \rightarrow q$, $\neg p$, p en q

Zet die in de kop van de tabel:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p)$
-----	-----	-------------------	----------	-------------------------------------

Tabellen maken

Zet nullen en enen onder de p en q

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Merk op dat we in de kolommen onder de letters p en q van onder naar boven de getallen 0, 1, 2 en 3 in binaire schrijfwijze hebben staan.

Soorten beweringen

tautologie altijd waarheidswaarde 1; voorbeeld: $p \vee (\neg p)$

contradictie altijd waarheidswaarde 0; voorbeeld: $p \wedge (\neg p)$

Equivalenten beweringen

P en Q zijn *equivalent* als ze dezelfde waarheidstabel hebben;
notatie $P \equiv Q$.

Voorbeeld $p \rightarrow q$ en $(\neg p) \vee q$ zijn equivalent.

De wetten van De Morgan

Hiermee wordt een verband tussen \wedge , \vee en \neg gelegd.

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

en

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$$

Implicatie bewijzen, II (contrapositie)

Met behulp van de wetten van De Morgan vinden we

$$(p \rightarrow q) \equiv ((\neg q) \rightarrow (\neg p))$$

Dus: Stel $\neg q$

Een héél slim bewijs

Conclusie: $\neg p$

Dus $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ is bewezen, en *dus* ook $p \rightarrow q$.

Voorbeelden

- als n^2 even is dan is n even
- als mn oneven is dan zijn m en n oneven

Kwantoren

Om ook logisch met variabelen te kunnen rekenen gebruiken we *kwantoren*.

- \forall : 'voor alle' (universele kwantor)
- \exists : 'er is' (existentiële kwantor)

$A \subseteq B$ is $(\forall x)((x \in A) \rightarrow (x \in B))$

$A \not\subseteq B$ is $(\exists x)((x \in A) \wedge (x \notin B))$

Waarheidswaarden

$(\forall x)(\phi(x))$ heeft als waarheidswaarde het **minimum** van alle waarheidswaarden van $\phi(x)$
(dus alléén 1 als er voor **alle** x waarheidswaarde 1 uit komt)

$(\exists x)(\phi(x))$ heeft als waarheidswaarde het **maximum** van alle waarheidswaarden van $\phi(x)$
(dus 1 als er voor **tenminste één** x waarheidswaarde 1 uit komt)

Het verband tussen \forall en \exists

Er geldt

$$\neg(\forall x)(\phi(x)) \equiv (\exists x)(\neg\phi(x))$$

en ook dat

$$\neg(\exists x)(\phi(x)) \equiv (\forall x)(\neg\phi(x))$$

Kortweg: $\forall \equiv \neg\exists\neg$ en $\exists \equiv \neg\forall\neg$

Implicaties

De *negatie* van een bewering kan heel belangrijk zijn.

De negatie van $p \rightarrow q$ is eenvoudig op te stellen:

$$\begin{aligned}\neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg((\neg p) \vee q) && \text{tabel} \\ &\equiv (\neg\neg p) \wedge (\neg q) && \text{De Morgan} \\ &\equiv p \wedge (\neg q) && \text{omdat } p \equiv \neg\neg p\end{aligned}$$

Vergelijk $A \subseteq B$ en $A \not\subseteq B$.

Continuïteit

Een functie f is continu in een punt p als

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon)$$

Continuïteit

Een functie f is **niet** continu in een punt p als

$$\neg(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon)$$

Dit gaan we wat positiever formuleren.

Continuïteit

Een functie f is **niet** continu in een punt p als

$$\begin{aligned} & \neg(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon) \\ & (\exists \epsilon > 0)\neg(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon) \\ & (\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)\neg(\forall x)(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon) \\ & (\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x)\neg(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon) \\ & (\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x)(|x - p| < \delta \wedge \neg(|f(x) - f(p)| < \epsilon)) \\ & (\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x)(|x - p| < \delta \wedge |f(x) - f(p)| \geq \epsilon) \end{aligned}$$

Implicatie bewijzen, III (uit het ongerijmde)

Als $p \rightarrow q$ niet lukt en als $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ niet lukt, wat dan?

Stel $\neg(p \rightarrow q)$, ofwel $p \wedge (\neg q)$ en leid $0 = 1$ af.

Dan heeft $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (0 = 1)$ (blijkbaar) waarheidswaarde 1

$0 = 1$ heeft waarheidswaarde 0, dus $\neg(p \rightarrow q)$ ook.

e is niet rationaal

Te bewijzen: “ $(m, n \in \mathbb{N}) \rightarrow (\frac{m}{n} \neq e)$ ”

Bewijs: stel $m, n \in \mathbb{N}$ en $\frac{m}{n} = e$.

We bewijzen dat er een natuurlijk getal tussen 0 en 1 ligt

Dat heeft dezelfde waarheidswaarde als $0 = 1$.

e is niet rationaal

Bekend (hoop ik): $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Afschatting van $e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Voor $k > n + 2$ geldt

$$k! = (n+1)! \cdot (n+2) \cdots k > (n+1)! \cdot (n+2)^{k-(n+1)}$$

Dus het verschil is kleiner dan

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} (n+2)^{-j} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

e is niet rationaal

Vermenigvuldig met $n!$:

$$n!e - n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

verder geldt

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{n^2 + 2n + 1} = \frac{n+2}{n(n+2) + 1} < 1$$

e is niet rationaal

We hebben

- $n!e - n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ is een natuurlijk getal
- $n!e - n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 1$
- $0 < \frac{1}{n+1} < n!e - n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Tegenspraak!