Caleidoscoop: Logica

Non impeditus ab ulla scientia

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 3 October, 2007

Delft University of Technology

Overzicht

Overzicht

Waarheidstabellen

We gaan rekenen met proposities (beweringen).
Bedenker: George Boole (1854).

Waarheidstabellen

We gaan rekenen met proposities (beweringen).
Bedenker: George Boole (1854).

$\neg$ niet

Waarheidstabellen

We gaan rekenen met proposities (beweringen).
Bedenker: George Boole (1854).

$\neg$	niet
$\wedge$	en

Waarheidstabellen

We gaan rekenen met proposities (beweringen).
Bedenker: George Boole (1854).

$\neg$	niet
$\wedge$	en
$\vee$	of

Waarheidstabellen

We gaan rekenen met proposities (beweringen).
Bedenker: George Boole (1854).

$\neg$	niet
$\wedge$	en
$\vee$	of
$\longrightarrow$	impliceert

Waarheidstabellen

We gaan rekenen met proposities (beweringen).
Bedenker: George Boole (1854).

$\neg$	niet
$\wedge$	en
$\vee$	of
$\rightarrow$	impliceert

Hoe ‘rekenen’ we hier mee?

Waarheidstabellen

Beweringen zijn ‘waar’ (*waarheidswaarde* 1) of ‘onwaar’ (*waarheidswaarde* 0).

Delft University of Technology

Waarheidstabellen

Beweringen zijn 'waar' (*waarheidswaarde* 1) of 'onwaar' (*waarheidswaarde* 0).
Rekenregels:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Waarheidstabellen

Beweringen zijn 'waar' (*waarheidswaarde* 1) of 'onwaar' (*waarheidswaarde* 0).
Rekenregels:

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Delft University of Technology

Waarheidstabellen

Waarom zo?

Waarheidstabellen

Waarom zo?

- Duidelijk.

Waarheidstabellen

Waarom zo?

- $\neg$ Duidelijk.
- $\wedge$ Ook duidelijk (denk aan $\cap$).

TU Delft
Delft University of Technology

Waarheidstabellen

Waarom zo?

- $\neg$ Duidelijk.
- $\wedge$ Ook duidelijk (denk aan $\cap$).
- $\vee$ Ook duidelijk (het *inclusieve* of, $\cup$).

Delft University of Technology

Waarheidstabellen

Waarom zo?

- $\neg$ Duidelijk.
- $\wedge$ Ook duidelijk (denk aan $\cap$).
- $\vee$ Ook duidelijk (het *inclusieve* of, $\cup$).
- $\rightarrow$ Een beetje discutabel, maar

Waarheidstabellen

Waarom zo?

- $\neg$ Duidelijk.
- $\wedge$ Ook duidelijk (denk aan $\cap$).
- $\vee$ Ook duidelijk (het *inclusieve* of, $\cup$).
- $\to$ Een beetje discutabel, maar, denk aan $\subseteq$

Inclusie

$A \subseteq B$ betekent

Inclusie

$A \subseteq B$ betekent $(x \in A) \rightarrow (x \in B)$

Inclusie

$A \subseteq B$ betekent $(x \in A) \to (x \in B)$

$x \in A$ en $x \in B$ mag wel 1

Delft University of Technology

Inclusie

$A \subseteq B$ betekent $(x \in A) \to (x \in B)$

$x \in A$ en $x \in B$	mag wel	1
$x \in A$ en $x \notin B$	mag niet	0

Inclusie

$A \subseteq B$ betekent $(x \in A) \to (x \in B)$

$x \in A$ en $x \in B$	mag wel	1
$x \in A$ en $x \notin B$	mag niet	0
$x \notin A$ en $x \in B$	mag wel	1

Delft University of Technology

Inclusie

$A \subseteq B$ betekent $(x \in A) \rightarrow (x \in B)$

$x \in A$	en $x \in B$	mag wel	1
$x \in A$	en $x \notin B$	mag niet	0
$x \notin A$	en $x \in B$	mag wel	1
$x \notin A$	en $x \notin B$	mag wel	1

Inclusie

$A \subseteq B$ betekent $(x \in A) \to (x \in B)$

$x \in A$	en $x \in B$	mag wel	1
$x \in A$	en $x \notin B$	mag niet	0
$x \notin A$	en $x \in B$	mag wel	1
$x \notin A$	en $x \notin B$	mag wel	1

Merk op: dit komt overeen met

Delft University of Technology

Inclusie

$A \subseteq B$ betekent $(x \in A) \rightarrow (x \in B)$

$x \in A$	en $x \in B$	mag wel	1
$x \in A$	en $x \notin B$	mag niet	0
$x \notin A$	en $x \in B$	mag wel	1
$x \notin A$	en $x \notin B$	mag wel	1

Merk op: dit komt overeen met $(x \notin A) \vee (x \in B)$.

Delft University of Technology

Implicatie bewijzen, I (direct)

Om een implicatie te bewijzen moet je de mogelijkheid van de tweede regel uitsluiten.

Implicatie bewijzen, I (direct)

Om een implicatie te bewijzen moet je de mogelijkheid van de tweede regel uitsluiten.

Dus:

Delft University of Technology

Implicatie bewijzen, I (direct)

Om een implicatie te bewijzen moet je de mogelijkheid van de tweede regel uitsluiten.

Dus: stel p

Implicatie bewijzen, I (direct)

Om een implicatie te bewijzen moet je de mogelijkheid van de tweede regel uitsluiten.

Dus: stel p
Een héél slim bewijs

Implicatie bewijzen, I (direct)

Om een implicatie te bewijzen moet je de mogelijkheid van de tweede regel uitsluiten.

Dus: stel p
Een héél slim bewijs
Conclusie: q

Tabellen maken

Bijvoorbeeld $(p \to q) \wedge (\neg p)$

Tabellen maken

Bijvoorbeeld $(p \to q) \wedge (\neg p)$
Eerst de formule ontleden,

Delft University of Technology

Tabellen maken

Bijvoorbeeld $(p \to q) \wedge (\neg p)$
Eerst de formule ontleden,
de bouwstenen zijn:

Tabellen maken

Bijvoorbeeld $(p \longrightarrow q) \wedge (\neg p)$
Eerst de formule ontleden,
de bouwstenen zijn: $p \longrightarrow q$,

Delft University of Technology

Tabellen maken

Bijvoorbeeld $(p \longrightarrow q) \land (\neg p)$
Eerst de formule ontleden,
de bouwstenen zijn: $p \longrightarrow q$, $\neg p$,

Tabellen maken

Bijvoorbeeld $(p \longrightarrow q) \wedge (\neg p)$
Eerst de formule ontleden,
de bouwstenen zijn: $p \longrightarrow q$, $\neg p$, p

Tabellen maken

Bijvoorbeeld $(p \longrightarrow q) \wedge (\neg p)$
Eerst de formule ontleden,
de bouwstenen zijn: $p \longrightarrow q$, $\neg p$, p en q

Tabellen maken

Bijvoorbeeld $(p \to q) \wedge (\neg p)$
Eerst de formule ontleden,
de bouwstenen zijn: $p \to q$, $\neg p$, p en q
Zet die in de kop van de tabel:

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$(p \to q) \wedge (\neg p)$

Tabellen maken

Zet nullen en enen onder de p en q

Tabellen maken

Zet nullen en enen onder de p en q

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$(p \to q) \wedge (\neg p)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Delft University of Technology

Tabellen maken

Zet nullen en enen onder de p en q

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$(p \to q) \wedge (\neg p)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Merk op dat we in de kolommen onder de letters p en q van onder naar boven de getallen 0, 1, 2 en 3 in binaire schrijfwijze hebben staan.

Overzicht

1. Propositielogica
   - Waarheidstabellen
   - Soorten beweringen

2. Eerste-orde logica
   - Kwantoren
   - Negaties

Soorten beweringen

tautologie altijd waarheidswaarde 1;

Soorten beweringen

tautologie altijd waarheidswaarde 1; voorbeeld: $p \vee (\neg p)$

Soorten beweringen

tautologie altijd waarheidswaarde 1; voorbeeld: $p \vee (\neg p)$

contradictie altijd waarheidswaarde 0;

Soorten beweringen

tautologie altijd waarheidswaarde 1; voorbeeld: $p \vee (\neg p)$

contradictie altijd waarheidswaarde 0; voorbeeld: $p \wedge (\neg p)$

Equivalente beweringen

P en Q zijn *equivalent* als ze dezelfde waarheidstabel hebben; notatie $P \equiv Q$.

Equivalente beweringen

P en Q zijn *equivalent* als ze dezelfde waarheidstabel hebben; notatie $P \equiv Q$.

Voorbeeld $p \to q$ en $(\neg p) \vee q$ zijn equivalent.

De wetten van De Morgan

Hiermee wordt een verband tussen $\wedge$, $\vee$ en $\neg$ gelegd.

De wetten van De Morgan

Hiermee wordt een verband tussen $\wedge$, $\vee$ en $\neg$ gelegd.

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

TU Delft
Delft University of Technology

De wetten van De Morgan

Hiermee wordt een verband tussen $\wedge$, $\vee$ en $\neg$ gelegd.

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

en

De wetten van De Morgan

Hiermee wordt een verband tussen $\wedge$, $\vee$ en $\neg$ gelegd.

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

en

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$$

TU Delft
Delft University of Technology

Implicatie bewijzen, II (contrapositie)

Met behulp van de wetten van De Morgan vinden we

Implicatie bewijzen, II (contrapositie)

Met behulp van de wetten van De Morgan vinden we

$$(p \to q) \equiv ((\neg q) \to (\neg p))$$

Delft University of Technology

Implicatie bewijzen, II (contrapositie)

Met behulp van de wetten van De Morgan vinden we

$$(p \to q) \equiv \big((\neg q) \to (\neg p)\big)$$

Dus: Stel $\neg q$

Implicatie bewijzen, II (contrapositie)

Met behulp van de wetten van De Morgan vinden we

$$(p \rightarrow q) \equiv ((\neg q) \rightarrow (\neg p))$$

Dus: Stel $\neg q$
Een héél slim bewijs

Implicatie bewijzen, II (contrapositie)

Met behulp van de wetten van De Morgan vinden we

$$(p \longrightarrow q) \equiv ((\neg q) \longrightarrow (\neg p))$$

Dus: Stel $\neg q$
Een héél slim bewijs
Conclusie: $\neg p$

Delft University of Technology

Implicatie bewijzen, II (contrapositie)

Met behulp van de wetten van De Morgan vinden we

$$(p \to q) \equiv ((\neg q) \to (\neg p))$$

Dus: Stel $\neg q$
Een héél slim bewijs
Conclusie: $\neg p$

Dus $(\neg q) \to (\neg p)$ is bewezen, en *dus* ook $p \to q$.

Voorbeelden

- als n^2 even is dan is n even

Voorbeelden

- als n^2 even is dan is n even
- als mn oneven is dan zijn m en n oneven

Overzicht

1. Propositielogica
   - Waarheidstabellen
   - Soorten beweringen

2. Eerste-orde logica
   - Kwantoren
   - Negaties

Delft University of Technology

Kwantoren

Om ook logisch met variabelen te kunnen rekenen gebruiken we *kwantoren*.

Kwantoren

Om ook logisch met variabelen te kunnen rekenen gebruiken we *kwantoren*.

- $\forall$: 'voor alle' (universele kwantor)

Delft University of Technology

Kwantoren

Om ook logisch met variabelen te kunnen rekenen gebruiken we *kwantoren*.

- $\forall$: 'voor alle' (universele kwantor)
- $\exists$: 'er is' (existentiële kwantor)

Kwantoren

Om ook logisch met variabelen te kunnen rekenen gebruiken we *kwantoren*.

- $\forall$: ‘voor alle’ (universele kwantor)
- $\exists$: ‘er is’ (existentiële kwantor)

$A \subseteq B$ is $(\forall x)\big((x \in A) \to (x \in B)\big)$

Kwantoren

Om ook logisch met variabelen te kunnen rekenen gebruiken we *kwantoren*.

- $\forall$: 'voor alle' (universele kwantor)
- $\exists$: 'er is' (existentiële kwantor)

$A \subseteq B$ is $(\forall x)\big((x \in A) \to (x \in B)\big)$
$A \not\subseteq B$ is $(\exists x)\big((x \in A) \land (x \notin B)\big)$

Delft University of Technology

Waarheidswaarden

$(\forall x)(\phi(x))$ heeft als waarheidswaarde het minimum van alle waarheidswaarden van $\phi(x)$

Waarheidswaarden

$(\forall x)(\phi(x))$ heeft als waarheidswaarde het minimum van alle waarheidswaarden van $\phi(x)$
(dus alléén 1 als er voor alle x waarheidswaarde 1 uit komt)

Delft University of Technology

Waarheidswaarden

$(\forall x)(\phi(x))$ heeft als waarheidswaarde het minimum van alle waarheidswaarden van $\phi(x)$
(dus alléén 1 als er voor alle x waarheidswaarde 1 uit komt)

$(\exists x)(\phi(x))$ heeft als waarheidswaarde het maximum van alle waarheidswaarden van $\phi(x)$

Waarheidswaarden

$(\forall x)(\phi(x))$ heeft als waarheidswaarde het minimum van alle waarheidswaarden van $\phi(x)$
(dus alléén 1 als er voor alle x waarheidswaarde 1 uit komt)

$(\exists x)(\phi(x))$ heeft als waarheidswaarde het maximum van alle waarheidswaarden van $\phi(x)$
(dus 1 als er voor tenminste één x waarheidswaarde 1 uit komt)

Delft University of Technology

Het verband tussen $\forall$ en $\exists$

Er geldt

Het verband tussen $\forall$ en $\exists$

Er geldt

$$\neg(\forall x)\bigl(\phi(x)\bigr) \equiv (\exists x)\bigl(\neg\phi(x)\bigr)$$

Het verband tussen $\forall$ en $\exists$

Er geldt

$$\neg(\forall x)\big(\phi(x)\big) \equiv (\exists x)\big(\neg\phi(x)\big)$$

en ook dat

Het verband tussen $\forall$ en $\exists$

Er geldt

$$\neg(\forall x)\big(\phi(x)\big) \equiv (\exists x)\big(\neg\phi(x)\big)$$

en ook dat

$$\neg(\exists x)\big(\phi(x)\big) \equiv (\forall x)\big(\neg\phi(x)\big)$$

Delft University of Technology

Het verband tussen $\forall$ en $\exists$

Er geldt

$$\neg(\forall x)\big(\phi(x)\big) \equiv (\exists x)\big(\neg\phi(x)\big)$$

en ook dat

$$\neg(\exists x)\big(\phi(x)\big) \equiv (\forall x)\big(\neg\phi(x)\big)$$

Kortweg:

Het verband tussen $\forall$ en $\exists$

Er geldt

$$\neg(\forall x)\big(\phi(x)\big) \equiv (\exists x)\big(\neg\phi(x)\big)$$

en ook dat

$$\neg(\exists x)\big(\phi(x)\big) \equiv (\forall x)\big(\neg\phi(x)\big)$$

Kortweg: $\forall \equiv \neg\exists\neg$

TUDelft
Delft University of Technology

Het verband tussen $\forall$ en $\exists$

Er geldt

$$\neg(\forall x)\bigl(\phi(x)\bigr) \equiv (\exists x)\bigl(\neg\phi(x)\bigr)$$

en ook dat

$$\neg(\exists x)\bigl(\phi(x)\bigr) \equiv (\forall x)\bigl(\neg\phi(x)\bigr)$$

Kortweg:$\forall \equiv \neg\exists\neg$en $\exists \equiv \neg\forall\neg$

Overzicht

Delft University of Technology

Implicaties

De *negatie* van een bewering kan heel belangrijk zijn.

Implicaties

De *negatie* van een bewering kan heel belangrijk zijn.
De negatie van $p \to q$ is eenvoudig op te stellen:

$$\neg(p \to q) \equiv \neg\bigl((\neg p) \vee q\bigr)$$

tabel

Delft University of Technology

Implicaties

De *negatie* van een bewering kan heel belangrijk zijn.
De negatie van $p \rightarrow q$ is eenvoudig op te stellen:

$$
\begin{aligned}
\neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg\bigl((\neg p) \vee q\bigr) && \text{tabel} \\
&\equiv (\neg\neg p) \wedge (\neg q) && \text{De Morgan}
\end{aligned}
$$

TUDelft
Delft University of Technology

Implicaties

De *negatie* van een bewering kan heel belangrijk zijn.
De negatie van $p \to q$ is eenvoudig op te stellen:

$$\begin{aligned} \neg(p \to q) &\equiv \neg\big((\neg p) \vee q\big) && \text{tabel} \\ &\equiv (\neg\neg p) \wedge (\neg q) && \text{De Morgan} \\ &\equiv p \wedge (\neg q) && \text{omdat } p \equiv \neg\neg p \end{aligned}$$

Implicaties

De *negatie* van een bewering kan heel belangrijk zijn.
De negatie van $p \to q$ is eenvoudig op te stellen:

$$\begin{aligned} \neg(p \to q) &\equiv \neg\bigl((\neg p) \vee q\bigr) && \text{tabel} \\ &\equiv (\neg\neg p) \wedge (\neg q) && \text{De Morgan} \\ &\equiv p \wedge (\neg q) && \text{omdat } p \equiv \neg\neg p \end{aligned}$$

Vergelijk $A \subseteq B$ en $A \not\subseteq B$.

Continuïteit

Een functie f is continu in een punt p als

Continuïteit

Een functie f is continu in een punt p als

$$(\forall \epsilon > 0)$$

Continuïteit

Een functie f is continu in een punt p als

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)$$

Continuïteit

Een functie f is continu in een punt p als

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)$$

Continuïteit

Een functie f is continu in een punt p als

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \to |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \to |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$

Dit gaan we wat positiever formuleren.

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$

$$(\exists\epsilon > 0)\neg$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)\neg(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)\neg(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)\neg$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)\neg(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)\neg(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x-p| < \delta \rightarrow |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)\neg(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x-p| < \delta \rightarrow |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)\neg(\forall x)\big(|x-p| < \delta \rightarrow |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\neg$$

TUDelft
Delft University of Technology

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x-p| < \delta \to |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)\neg(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x-p| < \delta \to |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)\neg(\forall x)\big(|x-p| < \delta \to |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\neg\big(|x-p| < \delta \to |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x-p| < \delta \to |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)\neg(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x-p| < \delta \to |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)\neg(\forall x)\big(|x-p| < \delta \to |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\neg\big(|x-p| < \delta \to |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\bigl(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\bigr)$$
$$(\exists\epsilon > 0)\neg(\exists\delta > 0)(\forall x)\bigl(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\bigr)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)\neg(\forall x)\bigl(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\bigr)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\neg\bigl(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\bigr)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\bigl(|x - p| < \delta$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)\neg(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)\neg(\forall x)\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\neg\big(|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\big(|x - p| < \delta \wedge$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x-p| < \delta \rightarrow |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)\neg(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x-p| < \delta \rightarrow |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)\neg(\forall x)\big(|x-p| < \delta \rightarrow |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\neg\big(|x-p| < \delta \rightarrow |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\big(|x-p| < \delta \wedge \neg(|f(x)-f(p)| < \epsilon)\big)$$

Continuïteit

Een functie f is niet continu in een punt p als

$$\neg(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x-p| < \delta \rightarrow |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)\neg(\exists\delta > 0)(\forall x)\big(|x-p| < \delta \rightarrow |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)\neg(\forall x)\big(|x-p| < \delta \rightarrow |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\neg\big(|x-p| < \delta \rightarrow |f(x)-f(p)| < \epsilon\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\big(|x-p| < \delta \wedge \neg(|f(x)-f(p)| < \epsilon)\big)$$
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)\big(|x-p| < \delta \wedge |f(x)-f(p)| \geqslant \epsilon\big)$$

Delft University of Technology

Implicatie bewijzen, III (uit het ongerijmde)

Als $p \rightarrow q$ niet lukt

Delft University of Technology

Implicatie bewijzen, III (uit het ongerijmde)

Als $p \rightarrow q$ niet lukt en als $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ niet lukt,

Implicatie bewijzen, III (uit het ongerijmde)

Als $p \rightarrow q$ niet lukt en als $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ niet lukt, wat dan?

Implicatie bewijzen, III (uit het ongerijmde)

Als $p \longrightarrow q$ niet lukt en als $(\neg q) \longrightarrow (\neg p)$ niet lukt, wat dan?

Stel $\neg(p \longrightarrow q)$, ofwel $p \wedge (\neg q)$ en leid $0 = 1$ af.

Delft University of Technology

Implicatie bewijzen, III (uit het ongerijmde)

Als $p \rightarrow q$ niet lukt en als $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ niet lukt, wat dan?

Stel $\neg(p \rightarrow q)$, ofwel $p \wedge (\neg q)$ en leid $0 = 1$ af.

Dan heeft $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (0 = 1)$ (blijkbaar) waarheidswaarde 1

Implicatie bewijzen, III (uit het ongerijmde)

Als $p \rightarrow q$ niet lukt en als $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ niet lukt, wat dan?

Stel $\neg(p \rightarrow q)$, ofwel $p \wedge (\neg q)$ en leid $0 = 1$ af.

Dan heeft $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (0 = 1)$ (blijkbaar) waarheidswaarde 1

$0 = 1$ heeft waarheidswaarde 0, dus $\neg(p \rightarrow q)$ ook.

e is niet rationaal

Te bewijzen: "$(m, n \in \mathbb{N}) \longrightarrow (\frac{m}{n} \neq e)$"

e is niet rationaal

Te bewijzen: “$(m, n \in \mathbb{N}) \rightarrow (\frac{m}{n} \neq e)$”

Bewijs: stel $m, n \in \mathbb{N}$ en

e is niet rationaal

Te bewijzen: “$(m, n \in \mathbb{N}) \longrightarrow (\frac{m}{n} \neq e)$”

Bewijs: stel $m, n \in \mathbb{N}$ en $\frac{m}{n} = e$.

e is niet rationaal

Te bewijzen: "$(m, n \in \mathbb{N}) \rightarrow (\frac{m}{n} \neq e)$"

Bewijs: stel $m, n \in \mathbb{N}$ en $\frac{m}{n} = e$.

We bewijzen dat er een natuurlijk getal tussen 0 en 1 ligt

Dat heeft dezelfde waarheidswaarde als $0 = 1$.

Delft University of Technology

e is niet rationaal

Bekend (hoop ik): $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

e is niet rationaal

Bekend (hoop ik): $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Afschatting van $e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

e is niet rationaal

Bekend (hoop ik): $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Afschatting van $e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Voor $k > n+2$ geldt
$k! = (n+1)! \cdot (n+2) \cdots k > (n+1)! \cdot (n+2)^{k-(n+1)}$

e is niet rationaal

Bekend (hoop ik): $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Afschatting van $e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Voor $k > n+2$ geldt
$k! = (n+1)! \cdot (n+2) \cdots k > (n+1)! \cdot (n+2)^{k-(n+1)}$

Dus het verschil is kleiner dan

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} (n+2)^{-j} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

e is niet rationaal

Vermenigvuldig met $n!$:

e is niet rationaal

Vermenigvuldig met $n!$:

$$n!e - n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < \frac{n!}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

Delft University of Technology

e is niet rationaal

Vermenigvuldig met $n!$:

$$n!e - n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{n!}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

verder geldt

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{n^2+2n+1} = \frac{n+2}{n(n+2)+1} < 1$$

e is niet rationaal

We hebben

e is niet rationaal

We hebben

- $n!e - n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ is een natuurlijk getal

e is niet rationaal

We hebben

- $n!e - n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ is een natuurlijk getal
- $n!e - n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1$

Delft University of Technology

e is niet rationaal

We hebben

- $n!e - n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ is een natuurlijk getal
- $n!e - n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1$
- $0 < \frac{1}{n+1} < n!e - n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Delft University of Technology

e is niet rationaal

We hebben

- $n!e - n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ is een natuurlijk getal
- $n!e - n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < 1$
- $0 < \frac{1}{n+1} < n!e - n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

Tegenspraak!

Delft University of Technology