De Dekpuntstelling van Brouwer

Non impeditus ab ulla scientia

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Twente, 19 oktober 2009: 18:00–20:00

Delft University of Technology

Outline

TU Delft
Delft University of Technology

De formulering

Dekpuntstelling van Brouwer

Zij n een natuurlijk getal en f $: [0,1]^n \to [0,1]^n$ *een continue functie. Dan is er een* $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ *met* $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Met behulp van de tussenwaardestelling

Stelling

Zij $f : [0,1] \to [0,1]$ continu. Dan is er een $x \in [0,1]$ met $f(x) = x$.

Bewijs.

Definieer $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ door $g(x) = x - f(x)$. Dan $g(0) \leqslant 0$ en $g(1) \geqslant 0$. Er is dus een $x \in [0,1]$ met $g(x) = 0$; die x voldoet aan $f(x) = x$. $\square$

Delft University of Technology

Een ingewikkelder bewijs

We schrijven

- $F_0 = \{x : x \leqslant f(x)\}$ en
- $F_1 = \{x : x \geqslant f(x)\}$

Te bewijzen: $F_0 \cap F_1 \neq \emptyset$.

We bewijzen: voor elke n zijn er $x_n \in F_0$ en $y_n \in F_1$ met $|x_n - y_n| \leqslant 2^{-n}$.

Waarom is dat genoeg?

Delft University of Technology

Een ingewikkelder bewijs

Stelling (Bolzano-Weierstraß)

Elke rij in $[0, 1]$ *heeft een convergente deelrij.*

Pas dit toe op de rij $\langle x_n \rangle_n$: er is een deelrij $\langle x_{n_k} \rangle_k$ die naar een punt x convergeert.

Wegens $|x_{n_k} - y_{n_k}| \leqslant 2^{-n_k}$ geldt ook $\lim_k y_{n_k} = x$.

Omdat F_0 en F_1 gesloten zijn volgt $x \in F_0 \cap F_1$.

Een ingewikkelder bewijs

Waar komen x_n en y_n vandaan?

Verdeel $[0, 1]$ in 2^n deelintervallen $[k2^n, (k+1)2^n]$ met $k = 0$, $\dots$, $2^n - 1$.
Kies voor elke k een $\lambda(k) \in \{0, 1\}$ zó dat $k2^n \in F_{\lambda(k)}$; neem daarbij $\lambda(0) = 0$ en $\lambda(2^n) = 1$.
Zij $A = \{k : \lambda(k) < \lambda(k+1)\}$ en $B = \{k : \lambda(k) > \lambda(k+1)\}$.
Merk op

$$1 = \lambda(2^n) - \lambda(0) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \lambda(k+1) - \lambda(k)$$

Delft University of Technology

Een ingewikkelder bewijs

De bijdrage van elke $k \in A$ aan de som is $+1$; elke $k \in B$ draagt -1 bij; de andere ks dragen 0 bij.

Conclusie:

$$1 = \sum_{k=0}^{2^n-1} \lambda(k+1) - \lambda(k) = |A| - |B|$$

Dus $|A| = |B| + 1$; we vinden een oneven aantal k met $\{\lambda(k), \lambda(k+1)\} = \{0, 1\}$.

Dat aantal is niet negatief, er is dus ten minste één zo'n interval en dat levert een paar punten x_n en y_n als gevraagd.

Delft University of Technology

Poging tot bewijs

Stelling

Zij $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ *continu. Dan is er een* $\boldsymbol{x} \in [0,1]^2$ *met* $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

De tussenwaardestelling toepassen is lastig omdat we die voor functies van $[0,1]^2$ naar $[0,1]^2$ (nog) niet hebben.

Hoe zit het met het ingewikkelde bewijs?

Delft University of Technology

Het ingewikkelde bewijs, I

Schrijf $f(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big)$ en definieer

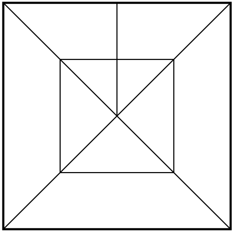
1. $F_{1,0} = \{(x, y) : x \leqslant f_1(x, y)\}$
2. $F_{1,1} = \{(x, y) : x \geqslant f_1(x, y)\}$
3. $F_{2,0} = \{(x, y) : y \leqslant f_2(x, y)\}$
4. $F_{2,1} = \{(x, y) : y \geqslant f_2(x, y)\}$

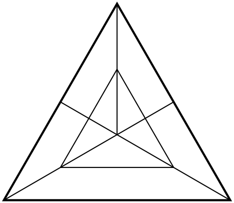
We moeten bewijzen dat $F_{1,0} \cap F_{1,1} \cap F_{2,0} \cap F_{2,1} \neq \emptyset$; immers de punten in die doorsnede zijn precies de dekpunten van f.

Dit kan maar is iets meer werk dan het volgende.

Het ingewikkelde bewijs, II

Het eenheidsvierkant is homeomorf met een driehoek.

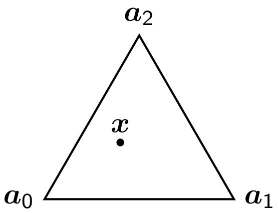




Met stukjes lineaire afbeelding kun je een homeomorfisme maken.

We bewijzen de stelling voor een driehoek Δ.

Waarom een driehoek?

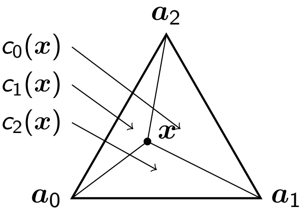


We kunnen elk punt $\boldsymbol{x}$ in het vlak als lineaire combinatie van $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}_1$ en $\boldsymbol{a}_2$ schrijven:

$$\boldsymbol{x} = c_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_0 + c_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_1 + c_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_2$$

met de eis $c_0(\boldsymbol{x}) + c_1(\boldsymbol{x}) + c_2(\boldsymbol{x}) = 1$ zijn de $c_i(\boldsymbol{x})$ uniek.

Waarom een driehoek?



Voor $\boldsymbol{x}$ in de driehoek (inclusief rand) geldt $c_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ voor alle i.

Meetkundig: de getallen $c_0(\boldsymbol{x})$, $c_1(\boldsymbol{x})$ en $c_2(\boldsymbol{x})$ zijn de oppervlakten van de deeldriehoeken (als de totale oppervlakte op 1 wordt gesteld). Ze heten de barycentrische coördinaten van $\boldsymbol{x}$.

Gebruik van barycentrische coördinaten

Zij $f : \Delta \to \Delta$ continu.

Met behulp van de barycentrische coördinaten definiëren we

1. $F_0 = \{\boldsymbol{x} : c_0(\boldsymbol{x}) \geqslant c_0(f(\boldsymbol{x}))\}$
2. $F_1 = \{\boldsymbol{x} : c_1(\boldsymbol{x}) \geqslant c_1(f(\boldsymbol{x}))\}$
3. $F_2 = \{\boldsymbol{x} : c_2(\boldsymbol{x}) \geqslant c_2(f(\boldsymbol{x}))\}$

Weer: de doorsnede $F_0 \cap F_1 \cap F_2$ bestaat uit de dekpunten van f.

Dus: te bewijzen: $F_0 \cap F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.

We volgen dezelfde weg als in het geval van $[0, 1]$.

Delft University of Technology

Convergeren naar een dekpunt

We bewijzen: voor elke n bestaan $\boldsymbol{x}_n \in F_0$, $\boldsymbol{y}_n \in F_1$ en $\boldsymbol{z}_n \in F_2$, met onderlinge afstanden kleiner dan of gelijk aan 2^{-n}.

Bolzano-Weierstraß: er is een deelrij $\langle \boldsymbol{x}_{n_k} \rangle_k$ van $\langle \boldsymbol{x}_n \rangle_n$ die convergeert, zeg naar $\boldsymbol{x}$.

Dan geldt, omdat $\|\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{x}_n\|, \|\boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{x}_n\| \leqslant 2^{-n}$ voor alle n, ook $\lim_k \boldsymbol{y}_{n_k} = \boldsymbol{x}$ en $\lim_k \boldsymbol{z}_{n_k} = \boldsymbol{x}$.

Omdat de F_i gesloten zijn geldt dan $\boldsymbol{x} \in F_0 \cap F_1 \cap F_2$.

Delft University of Technology

Drie punten vinden

In het geval van $[0, 1]$ vonden we een intervalletje van lengte 2^{-n} met een eindpunt in de ene en een eindpunt in de andere verzameling.

In dit geval zoeken we een driehoekje met diameter kleiner dan of gelijk aan 2^{-n}, met een hoekpunt in F_0, een hoekpunt in F_1 en een hoekpunt in F_2.

Als in het geval van $[0, 1]$ gaan we labels gebruiken om zo'n driehoekje te vinden.

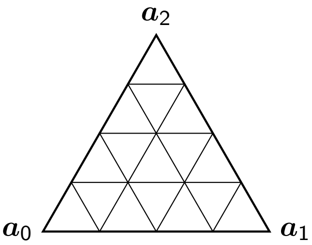
Een paar opmerkingen vooraf

Omdat $c_0(\boldsymbol{a}_0) = 1$, $c_1(\boldsymbol{a}_0) = 0$ en $c_2(\boldsymbol{a}_0) = 0$ volgt dat $\boldsymbol{a}_0 \in F_0$.
En evenzo: $\boldsymbol{a}_1 \in F_1$ en $\boldsymbol{a}_2 \in F_2$.

Als $\boldsymbol{x}$ op de lijn $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ ligt dan geldt $c_0(\boldsymbol{x}) = 0$; daaruit volgt dat $c_1(\boldsymbol{x}) + c_2(\boldsymbol{x}) = 1 \geqslant c_1(f(\boldsymbol{x})) + c_2(f(\boldsymbol{x}))$ en dus $c_1(\boldsymbol{x}) \geqslant c_1(f(\boldsymbol{x}))$ of $c_2(\boldsymbol{x}) \geqslant c_2(f(\boldsymbol{x}))$.

Conclusie $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \subseteq F_1 \cup F_2$.
Evenzo: $[\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1] \subseteq F_0 \cup F_1$ en $[\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_2] \subseteq F_0 \cup F_2$.

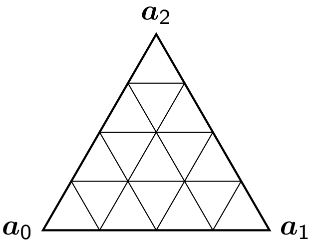
Kleine driehoekjes



Verdeel de driehoek in kleine driehoekjes van diameter ten hoogste 2^{-n}.

Kies voor elk hoekpunt $\boldsymbol{x}$ van elk driehoekje een $\lambda(\boldsymbol{x}) \in \{0, 1, 2\}$ zó dat $\boldsymbol{x} \in F_{\lambda(\boldsymbol{x})}$.

Kleine driehoekjes



Zorg er voor dat $\lambda(\boldsymbol{a}_i) = i$ voor $i = 0, 1, 2$.
Zorg er ook voor dat $\lambda(\boldsymbol{x}) \in \{i, j\}$ als $\boldsymbol{x}$ op $[\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j]$ ligt.
Dat dit kan volgt uit de opmerkingen vooraf.

Het lemma van Sperner

Stelling

Er is een oneven aantal driehoekjes die volledig gelabeld zijn (alle getallen 0, 1 en 2 komen voor).

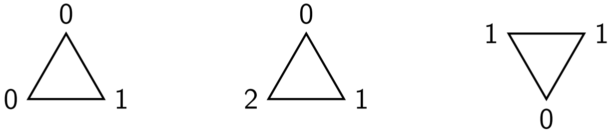
Het bewijs volgt uit hetgeen we voor $[0, 1]$ bewezen hebben en door een bepaalde verzameling twee keer te tellen.

Delft University of Technology

Bijna volle driehoekjes

We bekijken de verzameling D van alle driehoekjes die de labels 0 en 1 hebben gekregen. Die valt in twee verzamelingen uiteen:

- D_1: de driehoekjes die 0, 1 en 2 hebben gekregen
- D_2: de driehoekjes die alleen 0 en 1 hebben gekregen.



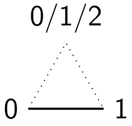
in D_2 in D_1 in D_2

Volle lijntjes

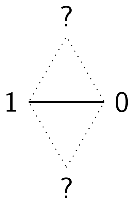
We bekijken ook de verzameling L van alle lijnstukjes die de labels 0 en 1 hebben gekregen. Die valt ook in twee verzamelingen uiteen:

- L_1: de lijnstukjes die op de zijde $[a_0, a_1]$ liggen
- L_2: de lijnstukjes die in het inwendige liggen.

Op de andere twee zijden liggen geen lijnstukjes uit L, wegens de keuzen die we gemaakt hebben.



in L_1



in L_2

Verbindingen tellen

We maken een tabel met voor ieder lijntje in L een rij en voor ieder driehoekje in D een kolom (met D_1 en L_1 aan het begin).

	d_1	$\ldots$	d_j	$\ldots$
l_1			$*$	
$\vdots$				
l_i	$*$		$*$	
$\vdots$				

Plaats een $*$ in rij l_i en kolom d_j als l_i een zijde van d_j is.
Onder $d \in D_1$ staat één ster.
Onder $d \in D_2$ staan twee sterren.
Naast $l \in L_1$ staat één ster.
Naast $l \in L_2$ staan twee sterren.

Sterren tellen

We tellen de sterren twee keer.

- rij voor rij: de uitkomst is dan $|L_1| + 2|L_2|$
- kolom voor kolom: de uitkomst is dan $|D_1| + 2|D_2|$

We weten dat $|L_1|$ oneven is, dus $|L_1| + 2|L_2|$ ook.

Dus $|D_1| + 2|D_2|$ is oneven, en daarmee $|D_1|$ ook.

Klaar!!

Delft University of Technology

$n = 1$ nogmaals

Het was misschien niet te zien maar het bewijs voor $[0,1]$ werkt ook met barycentrische coordinaten: als $x \in [0,1]$ dan geldt

$$x = (1-x)\cdot 0 + x \cdot 1,$$

dus de coördinaten zijn $c_0(x) = 1 - x$ en $c_1(x) = x$.
Dus $F_i = \{x : c_i(x) \geqslant c_i\big(f(x)\big)\}$ voor $i = 0,\ 1$.

Het bewijs van $F_0 \cap F_1 \neq \emptyset$ werd teruggebracht tot een telprobleem.

Dat telprobleem is ook op te lossen door het tot een eerder geval terug te voeren ...

$n = 1$ nogmaals

... door de volgende definities

- $L_1 = \{0\}$;
- L_2 is de verzameling punten met label 0 in $(0, 1)$;
- D_1 is de verzameling intervalletjes met labels 0 en 1;
- D_2 is de verzameling intervalletjes met beide labels 0.

Precies als bij het geval $n = 2$ volgt nu weer

$$|L_1| + 2|L_2| = |D_1| + 2|D_2|$$

en omdat $|L_1| = 1$ volgt dat $|D_1|$ oneven is.

Dit suggereert dat er een inductie aan zit te komen.

$n = 3$

Neem een 3-simplex (tetraeder) $\Delta = [\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3]$ en voer weer barycentrische coördinaten in.

Gegeven een continue $f : \Delta \to \Delta$ definiëren we:

$$F_i = \{\boldsymbol{x} : c_i(\boldsymbol{x}) \geqslant c_i\bigl(f(\boldsymbol{x})\bigr)\}$$

(voor $i = 0, 1, 2$ en 3). Dan geldt

- $\boldsymbol{a}_i \in F_i$ voor elk hoekpunt;
- $[\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j] \subseteq F_i \cup F_j$ voor elk lijntje en
- $[\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_k] \subseteq F_i \cup F_j \cup F_k$ voor elk zijvlak,

Delft University of Technology

$n = 3$

Bij iedere verdeling van Δ in kleine simplices kunnen we een labeling λ maken met $\boldsymbol{x} \in F_{\lambda(\boldsymbol{x})}$ voor alle $\boldsymbol{x}$ en zó dat

- $\lambda(\boldsymbol{a}_i) = i$;
- $\lambda(\boldsymbol{x}) \in \{i, j\}$ als $\boldsymbol{x}$ op $[\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j]$ ligt;
- $\lambda(\boldsymbol{x}) \in \{i, j, k\}$ als $\boldsymbol{x}$ op $[\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{a}_k]$ ligt.

Dan is er weer een oneven aantal volledig gelabelde simplices.

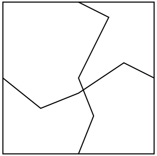
En zo vinden we dan vier rijen punten die naar één punt $\boldsymbol{x}$ in $F_0 \cap F_1 \cap F_2 \cap F_3$ convergeren.

Dimensies

Stelling

Als $n \neq m$ dan zijn $[0,1]^n$ en $[0,1]^m$ niet homeomorf.

Bekijk in $[0,1]^2$ de gesloten verzamelingen $A_1 = \{\boldsymbol{x} : x_1 = 0\}$, $A_2 = \{\boldsymbol{x} : x_2 = 0\}$, $B_1 = \{\boldsymbol{x} : x_1 = 1\}$ en $B_2 = \{\boldsymbol{x} : x_2 = 1\}$.
Neem (willekeurige) open verzamelingen U_1 en U_2 met $A_i \subseteq U_i$ en $B_i \cap \overline{U}_i = \emptyset$.
Bewering: de randen van U_1 en U_2 snijden elkaar.



Dimensies

Er zijn continue functies f_1 en f_2 van $[0,1]^2$ naar $[0,1]$ met

- $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ als $\boldsymbol{x} \in A_i$;
- $f_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}$ als $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Fr} U_i$;
- $f_i(\boldsymbol{x}) = 1$ als $\boldsymbol{x} \in B_i$.

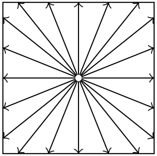
We krijgen $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ met coördinaten f_1 en f_2.

Als de randen elkaar niet snijden dan $f(\boldsymbol{x}) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ voor alle $\boldsymbol{x}$.

Delft University of Technology

Dimensies

Maak nu de samenstelling van f, de projectie op de rand vanuit $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



en de afbeelding $\boldsymbol{x} \mapsto -\boldsymbol{x}$.

Ga zelf na dat het resultaat, $h : [0,1]^2 \to [0,1]^2$, geen dekpunt heeft.

Tegenspraak.

Dimensies

Neem twee paren gesloten deelverzamelingen (F_1, G_1) en (F_2, G_2) in $[0, 1]$.

Met eindig veel intervallen met rationale eindpunten kun je een open verzameling U_1 maken met $F_1 \subseteq U_1$ en $\overline{U}_1 \cap G_1 = \emptyset$ en $\operatorname{Fr} U_i \subseteq \mathbb{Q}$.

Met eindig veel intervallen met irrationale eindpunten kun je een open verzameling U_2 maken met $F_2 \subseteq U_2$ en $\overline{U}_2 \cap G_2 = \emptyset$ en $\operatorname{Fr} U_2 \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

Dus de randen van U_1 en U_2 snijden elkaar niet.

Een duidelijk onderscheid tussen $[0, 1]$ en $[0, 1]^2$!

Project

Formuleer voor elk natuurlijk getal n een eigenschap d_n, uitgedrukt in open en gesloten verzamelingen, en wel zo dat

$$[0,1]^m \text{ heeft } d_n \text{ dan en slechts dan als } m \geqslant n$$

en bewijs zo dat $[0,1]^n$ en $[0,1]^m$ alleen homeomorf zijn als $n = m$.

Verder lezen

Website: `fa.its.tudelft.nl/~hart`

L. E. J. Brouwer.
Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten,
Mathematische Annalan, **71** (1912), 97–115..

B. Knaster, K. Kuratowski, S. Mazurkiewicz.
Ein beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale simplexe,
Fundamenta Mathematicae, **14** (1929), 132–137.

Delft University of Technology