Oneindig? Hoeveel is dat?

Non impeditus ab ulla scientia

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 21 oktober 2009: 20:45–21:30

Delft University of Technology

Wat zegt Van Dale?

De allereerste editie (1864):

- eindig: bn. en bijw. een einde hebbende.
- oneindig: bn. en bijw. zonder einde;
  (fig.) buitengemeen groot;
  — groot, door geene maat te bepalen;
  — klein, nul.

Delft University of Technology

Wat zegt Van Dale?

De laatste editie (online):

eindig

1. een einde hebbend
   antoniem: eeuwig, oneindig
   (wiskunde) eindige getallen, reeksen
2. waaraan grenzen gesteld zijn; synoniem: beperkt
   het eindig verstand
   eindige brandstoffen
   niet-herwinbare, fossiele brandstoffen
   antoniem: duurzame brandstoffen

TU Delft
Delft University of Technology

Wat zegt Van Dale?

De laatste editie (online):

oneindig

1. (mbt. uitgestrektheid of tot veelvuldigheid) geen einde hebbende
   synoniem: eindeloos
   antoniem: eindig
2. het oneindige: de onbegrensde ruimte (van het heelal); ook zonder gedachte aan ruimte
   de wiskunde is wel gedefinieerd als de wetenschap van het oneindige, die dit met eindige middelen tracht te beheersen
3. de Oneindige
   synoniem: God

TU Delft
Delft University of Technology

Wat zegt Van Dale?

De laatste editie (online):

oneindig

1. (wiskunde, natuurkunde) grensbegrip, nl. de limiet waartoe een bepaalde grootheid nadert als een andere onbeperkt aangroeit
2. een oneindige reeks reeks waaraan men onbeperkt verdere termen kan toevoegen
3. (wiskunde) oneindig groot gezegd van een veranderlijk getal dat, steeds aangroeiende ten laatste elk denkbaar getal te boven gaat (teken: ∞)
4. (wiskunde) oneindig klein gezegd van een veranderlijk getal dat meer en meer tot de limiet nul nadert

De vraag van vandaag

Hoeveel natuurlijke getallen zijn er?

De natuurlijke getallen zijn de getallen die we gebruiken om te tellen:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

Zo te zien: meer dan één, meer dan twee, meer dan drie, ...

Meer dan eindig veel dus, oneindig veel, maar *hoeveel* is dat?

Delft University of Technology

De vraag is niet goed gesteld

De vraag "Hoeveel?" is eigenlijk geen goede vraag.

Een verzameling heeft geen intrinsiek 'aantal elementen'.

Wat wij het aantal elementen van

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

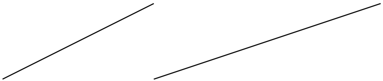
noemen, 26, is slechts een label dat wij op de verzameling geplakt hebben. En dat is nog een vrij recent label.

Ouder label: XXVI. Ook wel: tewahsen-yayak (Mohawk), kaksikymmentä-kuusi (Fins)

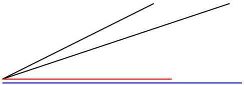
TUDelft
Delft University of Technology

We kunnen vergelijken.

Denk aan lengten: als je wilt weten wie/wat het langst is dan zet/leg je de dingen naast elkaar.



welke is langer?



kijk en vergelijk

En als we de objecten niet kunnen verplaatsen?
Gebruik een stokje en pas de lengten af.

Verzamelingen vergelijken

Met verzamelingen kan zoiets ook

$$\begin{matrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} & \mathrm{g} & \mathrm{h} & \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} & \mathrm{l} & \mathrm{m} & \mathrm{n} & \mathrm{o} & \mathrm{p} & \mathrm{q} & \mathrm{r} & \mathrm{s} & \mathrm{t} & \mathrm{u} & \mathrm{v} & \mathrm{w} & \mathrm{x} & \mathrm{y} & \mathrm{z} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon & \zeta & \eta & \theta & \iota & \kappa & \lambda & \mu & \nu & \xi & \mathrm{o} & \pi & \rho & \sigma & \tau & \upsilon & \varphi & \chi & \psi & \omega \end{matrix}$$

Kijk en vergelijk.

Op deze manier kunnen we betekenis hechten aan ‘minder’, ‘even veel’ en ‘meer’.

Verzamelingen vergelijken

Voor ‘eindige’ verzamelingen werkt deze methode in principe altijd:

één van mij, één van jou,
één van mij, één van jou,
één van mij, één van jou,
. . .

de verzameling die het eerst leeg is heeft minder elementen dan de andere.
Bij gelijk eindigen: even veel.

Delft University of Technology

Vergelijken op afstand

Wat als de verzamelingen niet bij elkaar te brengen zijn?

Neem een stok en maak een kerfje voor elk element van de verzameling hier en neem die kerfstok mee naar de andere.

Vergelijk de andere verzameling met de verzameling kerfjes, klaar.

Die kerfstok kan vaker gebruikt worden.
Markeer de kerfjes die met de ene verzameling corresponderen, ga naar de andere en vergelijk.

Delft University of Technology

Universele kerfstok

Adapted from: G. I. Gleizer, *Istoriya matematiki v shkole* (The History of Mathematics in School), Prosveshchenie Publishing House, Moscow, 1964.

Er zijn veel systemen bedacht om aantallen weer te geven.

Al die systemen beschrijven hetzelfde: datgene dat wij met

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots$$

beschrijven.

Ze maken een betere boekhouding mogelijk dan kerfstokken.

Na verloop van tijd gaf deze kerfstok het antwoord op de vraag: **hoeveel?**

Hoeveel natuurlijke getallen?

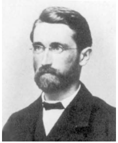
Hoeveel elementen heeft $\mathbb{N}$ (de verzameling der natuurlijke getallen) nu?

Dat kunnen we niet zeggen omdat
we geen punt op onze kerfstok hebben dat met $\mathbb{N}$ *correspondeert*.

Als in het begin moeten we het eerst gaan hebben over 'meer', 'minder' en 'even veel'.

Delft University of Technology

Uit een brief van Cantor aan Dedekind



Halle, d. 29ten Nov. 73.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen x und bezeichne ihn mit (x); so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordenen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?

Delft University of Technology

De betekenis van Cantor's vraag

Dit was de eerste keer dat deze vraag gesteld werd voor oneindige verzamelingen.

De vraag komt neer op: zijn er even veel natuurlijke getallen als punten op een lijn?
Hierbij is 'even veel' ondubbelzinnig gedefinieerd: is er een massahuwelijk mogelijk waarbij elk natuurlijk getal met één punt op de lijn en elk punt op de lijn met één natuurlijk getal zal trouwen.

Het "één van mij, één van jou" werkt hier niet omdat het niet eindigt.
De oplossing is: een formule/beschrijving van zo'n paarvorming en
een bewijs dat deze werkt of
een bewijs dat zo'n formule/beschrijving niet bestaat.

Een paar formules

- De formule $n \mapsto 2n$ laat zien dat er *even veel* **even** natuurlijke getallen zijn als natuurlijke getallen.
- De formule

$$n \mapsto (-1)^n \left(\frac{n}{2} + \frac{-1 + (-1)^n}{4} \right)$$

laat zien dat er even veel **gehele** getallen zijn als natuurlijke getallen; de echtparen zijn als volgt

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & 5 & -5 & \ldots \end{array}$$

- Er zijn zelfs even veel **rationale** getallen (breuken) als natuurlijke getallen.

Delft University of Technology

Het antwoord van Cantor op zijn eigen vraag

Uit: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, 1874*

Stelling

Wenn eine nach irgendeinerm Gesetze gegebenen unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrößen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \tag{4}$$

vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *eine Zahl* η *(und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe* (4) *nicht vorkommt; dies sol nun bewiesen werden.*

Delft University of Technology

Wat betekent dit?

Er zijn ten minste twee soorten oneindig: die van $\mathbb{N}$ en die van $\mathbb{R}$ (de verzameling der reële getallen).
Dit geeft ons twee extra kerfjes op de stok; we markeren ze met de symbolen die Cantor ingevoerd heeft:

- $\aleph_0$, de machtigheid van $\mathbb{N}$
- $\mathfrak{c}$, de machtigheid van $\mathbb{R}$

Machtigheid is Cantor's term voor wat we 'het aantal elementen' zouden willen noemen.

Onze kerfstok

Als we oneindige verzamelingen bekijken kunnen we ons dus afvragen of deze even groot zijn al $\mathbb{N}$ of even groot als $\mathbb{R}$. We vragen dus niet hoeveel elementen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ hebben; we gebruiken ze als modelverzamelingen om mee te vergelijken.

Hier is de kerfstok:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, \aleph_0, \ldots, \mathfrak{c}, \ldots$$

Delft University of Technology

Is er meer?

Eerste vraag: is er iets tussen $\aleph_0$ en $\mathfrak{c}$?

Dat vroeg Cantor zich ook af. Hij vermoedde, en dacht te kunnen bewijzen, dat er niets tussen $\aleph_0$ en $\mathfrak{c}$ te vinden is.
Dit is Cantor's Continuüm Hypothese.

Deze is noch te bewijzen, noch te ontkrachten.

Delft University of Technology

Is er meer?

Tweede vraag: is er iets boven $\mathfrak{c}$?

Cantor's antwoord: ja.

Elke verzameling heeft echt minder elementen dan deelverzamelingen.

$\mathbb{R}$ dus ook.

NB Het platte vlak, $\mathbb{R}^2$, is even groot als de lijn $\mathbb{R}$.

Delft University of Technology

Om te beginnen: $\mathbb{N}$ is een deelverzameling van $\mathbb{R}$, dus $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{c}$.

Lastiger is te bewijzen dat $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$.
Met andere woorden: bij elke koppeling van natuurlijke getallen aan reële getallen blijven er altijd vrijgezelle reële getallen over.

Delft University of Technology

Het bewijs

Cantor's bewijs maakte gebruik van de *volledigheid* van $\mathbb{R}$.
Hij begon met een rij

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

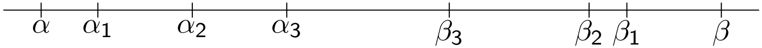
van reële getallen en een willekeurig interval

$$(\alpha, \beta)$$

Hij liet toen zien dat er een reëel getal $\eta \in (\alpha, \beta)$ bestaat ongelijk aan alle ω_ν.

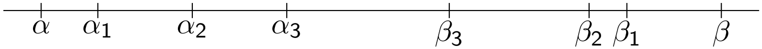
Delft University of Technology

Het bewijs



- Laat α_1 en β_1 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α, β) liggen en wel zó dat $\alpha_1 < \beta_1$.
- Laat α_2 en β_2 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α_1, β_1) liggen en wel zó dat $\alpha_2 < \beta_2$.
- Laat α_3 en β_3 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α_2, β_2) liggen en wel zó dat $\alpha_3 < \beta_3$.
- ...

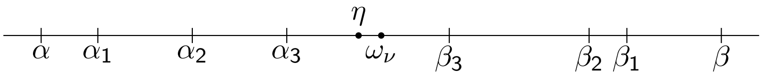
Het bewijs



Bedenk zelf waarom

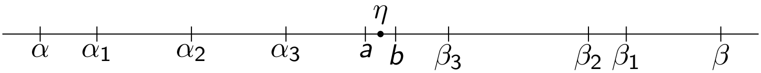
- $\omega_1, \omega_2 \notin (\alpha_1, \beta_1)$,
- $\omega_3, \omega_4 \notin (\alpha_2, \beta_2)$,
- $\omega_5, \omega_6 \notin (\alpha_3, \beta_3)$,
- $\ldots$

Het bewijs



Geval 1: de constructie stopt bij n.
Waarom zou dat kunnen gebeuren?
Nog maar één (of geen) ω_ν in (α_n, β_n); dan is η gauw gevonden.

Het bewijs



Geval 2: de constructie stopt nooit.
Neem $a = \sup_n \alpha_n$ en $b = \inf_n \beta_n$ (die bestaan want . . .).
Dan $a \leqslant b$ (waarom ook alweer?)
Neem $\eta \in [a, b]$

Verder lezen

Website: `fa.its.tudelft.nl/~hart`

K. P. Hart.
De Continuümhypothese, Nieuw Archief voor Wiskunde, **10** (2009), 33–39.