

Hoeveel elementen?

Non impeditus ab ulla scientia

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 18 november 2009: 13:15–14:15

De vragen van vandaag

- Hoeveel provincies heeft Nederland?
- Hoeveel natuurlijke getallen zijn er?
- Hoeveel reële getallen zijn er?

Het antwoord op de eerste vraag is:

- tekeni-yawenre,
- kaksitoista,
- XII,
- twaalf

Hoeveel natuurlijke getallen?

De natuurlijke getallen zijn de getallen die we gebruiken om te tellen:

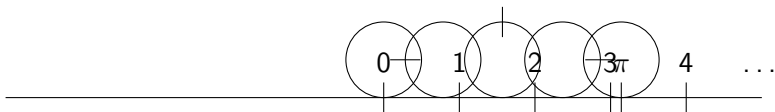
1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Zo te zien: meer dan één, meer dan twee, meer dan drie, ...

Meer dan eindig veel dus, oneindig veel, maar *hoeveel* is dat?

Hoeveel reële getallen?

De reële getallen corresponderen met de punten op een lijn, nadat we twee punten de namen 0 en 1 hebben gegeven. De plaats van π vinden we door een cirkel met middellijn 1 vanuit 0 naar rechts één omwenteling te laten maken.



We kunnen de natuurlijke getallen als reële getallen beschouwen, er zijn dus ten minste zoveel reële als natuurlijke getallen.
 Maar de vraag blijft: *Hoeveel?*

De vragen zijn niet goed gesteld

De vraag “Hoeveel?” is eigenlijk geen goede vraag.

Een verzameling heeft geen intrinsiek ‘aantal elementen’.

Dat is te zien aan de antwoorden op de vraag naar het aantal provincies van Nederland.

Wie het Mohawk of Fins niet beheerst heeft aan de eerste twee antwoorden niets.

Wat kunnen we doen?

We kunnen vergelijken.

Denk aan lengten: als je wilt weten wie/wat het langst is dan zet/leg je de dingen naast elkaar.



welke is langer?



kijk en vergelijk

En als we de objecten niet kunnen verplaatsen?

Gebruik een stokje en pas de lengten af.

Verzamelingen vergelijken

Met verzamelingen kan zoiets ook

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z
 $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \omicron \pi \rho \sigma \tau \upsilon \varphi \chi \psi \omega$

Kijk en vergelijk.

Op deze manier kunnen we betekenis hechten aan 'minder', 'even veel' en 'meer'.

Verzamelingen vergelijken

Voor 'eindige' verzamelingen werkt deze methode in principe altijd:

één van mij, één van jou,

één van mij, één van jou,

één van mij, één van jou,

...

de verzameling die het eerst leeg is heeft minder elementen dan de andere.

Bij gelijk eindigen: even veel.

Vergelijken op afstand

Wat als de verzamelingen niet bij elkaar te brengen zijn?

Neem een stok en maak een kerfje voor elk element van de verzameling hier en neem die **kerfstok** mee naar de andere.

Vergelijk de andere verzameling met de verzameling kerfjes, klaar.

Die kerfstok kan vaker gebruikt worden.

Markeer de kerfjes die met de ene verzameling corresponderen, ga naar de andere en vergelijk.

Een aantal kerfstokken

	EGYPTIAN			ASSYRIAN- BABYLONIAN	PHOENICIAN	SYRIAN	PALMYRIAN	GREEK HERODIANIC	ROMAN
	HERO- GLYPHS	HERIATIC	DEMOTIC						
1	I	I	I	∨	I	I	I	I	I
2	II	II	4	∨∨	II	∨	II	II	II
3	III	III	b	∨∨∨	III	∨∨	III	III	III
4	IIII	∨	∨:∨	∨∨∨∨	IIII	∨∨∨	IIII	IIII	IV
5	IIII	∨	1	∨∨∨∨	II III	∨	∨	∨	V
6	IIII	∨	2	∨∨∨∨	III III	∨	∨	∨	VI
7	IIII	∨	3	∨∨∨∨	IIII III	∨	∨	∨	VII
8	IIII	∨	2	∨∨∨∨	II III III	∨∨	∨∨	∨∨	VIII
9	IIII	∨	2	∨∨∨∨	III III III	∨∨∨	∨∨∨	∨∨∨	IX
10	n	∧	∧	<	∨	7	∨	∨	X
11	nI	I∧	I∧	<∨	∨	7	∨	∨	XI
15	nIII	I∧	I∧	<∨∨	II III ∨	∨	∨	∨	XV
20	nn	∨	∨	<<	H	0	3	∨∨	XX
30	nnn	∨	∨	<<<	∨H	70	∨3	∨∨∨	XXX
40	nnnn	∨	∨	<<<<	HH	00	33	∨∨∨∨	XL
50	nnnnn	∨	∨	<<<<<	∨HH	700	∨33	∨	L
60	nnnnn	∨	∨	<<<<<	HHH	000	333	∨∨	LX
70	nnnnn	∨	∨	<<<<<	∨HHH	7000	∨333	∨∨∨	LXX
80	nnnnn	∨	∨	<<<<<	HHHH	0000	3333	∨∨∨∨	LXXX
90	nnnnn	∨	∨	<<<<<	∨HHHH	70000	∨3333	∨∨∨∨∨	XC
100	9	∨	∨	<<<<<	∨∨	∨∨	∨	∨	C
200	99	∨	∨	<<<<<	∨∨∨	∨∨	∨	∨∨	CC
400	9999	∨	∨	<<<<<	∨∨∨∨	∨	∨∨∨∨	∨∨∨∨	CD
500	999	∨	∨	<<<<<	∨∨∨	∨	∨	∨	D
1000	9	∨	∨	<<<<<	∨∨∨	∨∨∨	∨	∨	M
10000	∨	∨	∨	<<<<<	∨∨∨∨	∨∨∨∨	∨	∨	M

Er zijn veel systemen bedacht om aantallen weer te geven.

Al die systemen beschrijven hetzelfde: datgene dat wij met

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...

beschrijven.

Ze maken een betere boekhouding mogelijk dan kerfstokken.

Na verloop van tijd gaf deze kerfstok het antwoord op de vraag: hoeveel?

Hoeveel natuurlijke getallen?

Hoeveel elementen heeft \mathbb{N} (de verzameling der natuurlijke getallen) nu?

Dat kunnen we niet zeggen omdat
we geen punt op onze kerfstok hebben dat met \mathbb{N} correspondeert.

Als in het begin moeten we het eerst gaan hebben over 'meer',
'minder' en 'even veel'.

Uit een brief van Cantor aan Dedekind



Halle, d. 29^{ten} Nov. 73.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n) ; ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrößen x und bezeichne ihn mit (x) ; so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordnen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?

De betekenis van Cantor's vraag

Dit was de eerste keer dat deze vraag gesteld werd voor **oneindige** verzamelingen.

De vraag komt neer op: zijn er even veel natuurlijke getallen als punten op een lijn?

Hierbij is 'even veel' ondubbelzinnig gedefinieerd: er is een massahuwelijk mogelijk waarbij elk natuurlijk getal met één punt op de lijn en elk punt op de lijn met één natuurlijk getal zal trouwen.

In wiskundige termen

In plaats van ‘massahuwelijken’ spreken we van bijectieve afbeeldingen.

Een afbeelding $f : A \rightarrow B$ is **bijectief** als

- voor elk tweetal verschillende elementen a_1 en a_2 van A geldt dat $f(a_1) \neq f(a_2)$ en
- voor elke $b \in B$ een $a \in A$ bestaat met $f(a) = b$.

Het “één van mij, één van jou” beslist voor eindige verzamelingen in eindige tijd of er een bijectie tussen de verzamelingen bestaat.

Hoe Cantor's vraag te beantwoorden?

Men kan:

- een formule/beschrijving geven van een bijectieve $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ en een bewijs dat deze werkt of
- een bewijs dat zo'n formule/beschrijving niet bestaat.

Het proces van “één van mij, één van jou” werkt hier niet omdat het geen verifieerbare beschrijving oplevert.

Een paar formules

- De formule $n \mapsto 2n$ laat zien dat er *even veel* **even** natuurlijke getallen zijn als natuurlijke getallen.
- De formule

$$n \mapsto (-1)^n \left(\frac{n}{2} + \frac{-1 + (-1)^n}{4} \right)$$

laat zien dat er even veel **gehele** getallen zijn als natuurlijke getallen; de echtparen zijn als volgt

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	...

Paren en breuken

De formule

$$(m, n) \rightarrow \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1) + m$$

laat zien dat er even veel *paren* natuurlijke getallen bestaan als natuurlijke getallen.

Er zijn dus ook even veel (positieve) breuken als natuurlijke getallen.

Het antwoord van Cantor op zijn eigen vraag

Uit: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, 1874*

Stelling

Wenn eine nach irgendeinem Gesetze gegebenen unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrößen

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots \quad (4)$$

vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle ($\alpha \dots \beta$) eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4) nicht vorkommt; dies sol nun bewiesen werden.

Wat betekent dit?

Er zijn ten minste twee soorten oneindig: die van \mathbb{N} en die van \mathbb{R} (de verzameling der reële getallen).

Dit geeft ons twee extra kerfjes op de stok; we markeren ze met de symbolen die Cantor ingevoerd heeft:

- \aleph_0 , de machtigheid van \mathbb{N}
- \mathfrak{c} , de machtigheid van \mathbb{R}

Machtigheid is Cantor's term voor wat we 'het aantal elementen' zouden willen noemen.

Onze kerfstok

Als we oneindige verzamelingen bekijken kunnen we ons dus afvragen of deze even groot zijn als \mathbb{N} of even groot als \mathbb{R} .

We vragen dus niet hoeveel elementen \mathbb{N} en \mathbb{R} hebben; we gebruiken ze als modelverzamelingen om mee te vergelijken.

Hier is de kerfstok:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, \aleph_0, \dots, \mathfrak{c}, \dots$$

Is er meer?

Eerste vraag: is er iets tussen \aleph_0 en \aleph_1 ?

\aleph_0^2 misschien?

Dat is de machtigheid van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, de verzameling van alle paren natuurlijke getallen.

We hebben al een bijectie tussen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en \mathbb{N} gezien, dus

$$\aleph_0^2 = \aleph_0$$

Met inductie volgt: $\aleph_0^n = \aleph_0$ voor alle n .

Continuümhypothese

Cantor vermoedde, en dacht te kunnen bewijzen, dat er niets tussen \aleph_0 en \aleph_1 te vinden is.

Dit is Cantor's Continuum Hypothesis.

Deze is noch te bewijzen, noch te ontkrachten.

We kunnen dat laatste **bewijzen**.

Is er meer?

Tweede vraag: is er iets boven \aleph ?

Bijvoorbeeld \aleph^2 , de machtigheid van het platte vlak?

Cantor: \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 hebben even veel elementen; dus $\aleph = \aleph^2$.

Er zijn zelfs even veel **rijen** reële getallen als er reële getallen zijn; met behulp van Cantor's symbolen: $\aleph = \aleph^{\aleph_0}$.

Er is meer

Elke verzameling heeft echt minder elementen dan deelverzamelingen.

Als $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ een willekeurige afbeelding is dan is er géén x met $f(x) = A$, waarbij $A = \{z \in X : z \notin f(z)\}$.

Geen enkele $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ is dus bijectief.

Er is meer

Dit is van toepassing op \mathbb{R} : de machtigheid van $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ is strikt groter dan die van \mathbb{R} .

Meer algemeen: er is geen grootste machtigheid.

Wat is een natuurlijk getal?

We hebben \mathbb{N} als standaard representant van de machtigheid \aleph_0 gekozen en \mathbb{R} als die van c .

Hoe zit dat met de eindige machtigheden?

Von Neumann heeft daar wat op gevonden.

De lege verzameling, \emptyset , is een perfecte representant voor de machtigheid 0.

Wat is een natuurlijk getal?

- $\{\emptyset\}$ is een prima representant voor 1
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ is een prima representant voor 2
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ is een prima representant voor 3
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$ is een prima representant voor 4
- ...

Wat is een natuurlijk getal?

Von Neumann draaide dit om en maakte er een definitie van:

- We definiëren $0 = \emptyset$.
- $1 = \{\emptyset\}$, dus $1 = \{0\}$.
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, dus $2 = \{0, 1\}$.
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, dus $3 = \{0, 1, 2\}$.
- $4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Elk natuurlijk getal is de verzameling van zijn voorgangers.
Zo kunnen de natuurlijke getallen geheel in termen van verzamelingen gedefinieerd worden.

Eindige definitie van \mathbb{N}

Merk op, met deze definitie volgt $n + 1 = n \cup \{n\}$.

De verzameling \mathbb{N} der natuurlijke getallen is hiermee de *kleinste* verzameling met de volgende twee eigenschappen

- $\emptyset \in \mathbb{N}$, en
- als $x \in \mathbb{N}$ dan $x \cup \{x\} \in \mathbb{N}$.

Dit is een definitie zonder ... er in en in eindig veel symbolen op te schrijven.

Ordinaalgetallen

Dit leidde tot een bijzondere klasse van verzamelingen: ordinaalgetallen. Een ordinaalgetal is een verzameling x met

- als $y \in x$ en $z \in y$ dan $z \in x$, (transitiviteit)
- als $y, z \in x$ dan $y \in z$ of $y = z$ of $z \in y$ (lineair geordend door \in)
- als $a \subseteq x$ dan heeft a een minimum ten opzichte van \in (welgeordend door \in)

Elk natuurlijk getal, zoals hierboven door Von Neumann gedefinieerd, is een ordinaalgetal, \mathbb{N} is het ook; met Cantor noteren we \mathbb{N} -als-ordinaalgetal ook wel als ω .

De ultieme meetlat

De ordinaalgetallen vormen de ultieme meetlat.

We kunnen nu de **machtigheid** of het **kardinaalgetal** geheel binnen de verzamelingenleer definiëren:

Het kardinaalgetal van X is het kleinste ordinaalgetal dat even groot is als X .

De ordinaalgetallen vormen een wat fijnmaziger structuur dan die der machtigheden.

Wat met \mathbb{R} ?

De machtigheid \aleph_0 correspondeert dus met ω .

Hoe zit het met \mathfrak{c} , de machtigheid van \mathbb{R} ?

Cantor's Continuümhypothese komt neer op “ \mathbb{R} is net zo groot als het eerste overaftelbare ordinaalgetal”.

De plaats van \mathfrak{c} is dus niet te bepalen; dat wil zeggen niet met behulp van de gangbare spelregels van de verzamelingenleer.

\mathbb{N} versus \mathbb{R}

Om te beginnen: \mathbb{N} is een deelverzameling van \mathbb{R} , dus $\aleph_0 \leq \mathfrak{c}$.

Lastiger is te bewijzen dat $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$.

Met andere woorden: bij elke koppeling van natuurlijke getallen aan reële getallen blijven er altijd vrijgezelle reële getallen over.

Het bewijs

Cantor's bewijs maakte gebruik van de *volledigheid* van \mathbb{R} .
Hij begon met een rij

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$$

van reële getallen en een willekeurig interval

$$(\alpha, \beta)$$

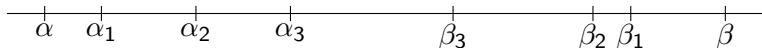
Hij liet toen zien dat er een reëel getal $\eta \in (\alpha, \beta)$ bestaat ongelijk aan alle ω_ν .

Het bewijs



- Laat α_1 en β_1 de eerste twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α, β) liggen en wel zó dat $\alpha_1 < \beta_1$.
- Laat α_2 en β_2 de eerste twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α_1, β_1) liggen en wel zó dat $\alpha_2 < \beta_2$.
- Laat α_3 en β_3 de eerste twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α_2, β_2) liggen en wel zó dat $\alpha_3 < \beta_3$.
- ...

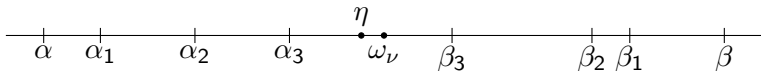
Het bewijs



Bedenk zelf waarom

- $\omega_1, \omega_2 \notin (\alpha_1, \beta_1)$,
- $\omega_3, \omega_4 \notin (\alpha_2, \beta_2)$,
- $\omega_5, \omega_6 \notin (\alpha_3, \beta_3)$,
- ...

Het bewijs

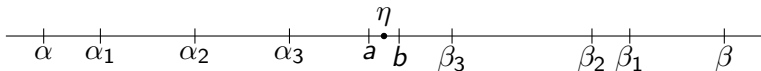


Geval 1: de constructie stopt bij n .

Waarom zou dat kunnen gebeuren?

Nog maar één (of geen) ω_n in (α_n, β_n) ; dan is η gauw gevonden.

Het bewijs



Geval 2: de constructie stopt nooit.

Neem $a = \sup_n \alpha_n$ en $b = \inf_n \beta_n$ (die bestaan want ...).

Dan $a \leq b$ (waarom ook alweer?)

Neem $\eta \in [a, b]$

Verder lezen

Website: fa.its.tudelft.nl/~hart



K. P. Hart.

De Continuümhypothese, Nieuw Archief voor Wiskunde, **10**
(2009), 33–39.