Drie problemen voor de prijs van één

Of: één probleem voor de prijs van drie

K. P. Hart

Faculty EEMCS
TU Delft

Delft, 30 oktober, 2012: 10:15–10:45

Eenvoudig begin

Opgave

Bewijs dat voor $m, n \in \mathbb{N}$ het volgende geldt:
als $2^m = 2^n$ dan $m = n$.

Maar, ..., ik wil het volgende bewezen zien:

Stelling

Als er een bijectie tussen $\mathcal{P}(m)$ en $\mathcal{P}(n)$ bestaat dan $m = n$.

$\mathcal{P}(m)$ is de familie deelverzamelingen van $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Eenvoudig begin

Waarom zo ingewikkeld?
Het is niet ingewikkeld, het is de essentie van de vraag.
Voor mij is 2^n per definitie het aantal elementen van $\mathcal{P}(n)$.
Dit maakt van

$$2^n = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ stuks}}$$

een *stelling*.

Oplossing

Nadat

$$2^n = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ stuks}}$$

bewezen is, is de implicatie ook snel bewezen.

Iets lastiger

Neem twee willekeurige verzamelingen X en Y.

Vraag

Als er een bijectie van $\mathcal{P}(X)$ naar $\mathcal{P}(Y)$ is, is er dan ook een bijectie van X naar Y?

Kennelijk wel als X of Y eindig wordt verondersteld.
Maar dat bewijs ging via een omweg.

Inleiding
Een wat makkelijker probleem
Het echte probleem
Het antwoord

Antwoord

Uit een bijectie tussen $\mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{P}(Y)$ is niet noodzakelijk een bijectie tussen X en Y te distilleren.

Huh?

Inderdaad. Daarom is de verzamelingenleer zo leuk.

K. P. Hart Drie problemen voor de prijs van één

Andere context

Stel $\Phi : \ell^\infty(X) \to \ell^\infty(Y)$ is een lineaire bijectie.

Dan is er niet noodzakelijk een bijectie $\phi : X \to Y$.

De algebraïsche dimensie van $\ell^\infty(X)$ is gelijk aan de cardinaliteit van $\mathcal{P}(X)$.

Iets zwakker antwoord

Stel $F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ is een bijectie die doorsnede en vereniging bewaart.
Dat wil zeggen: voor alle A en B geldt $F(A \cap B) = F(A) \cap F(B)$ en $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$.

Dan is er wel een bijectie $f : X \to Y$.

Als $x \in X$ dan bestaat $F(\{x\})$ uit één punt, dat wordt $f(x)$.

Andere context

Stel $\Phi : \ell^\infty(X) \to \ell^\infty(Y)$ is een lineaire bijectie die ook de (puntsgewijze) vermenigvuldiging bewaart.

Dan is er een bijectie $\phi : Y \to X$.

Als $y \in Y$ en $f_y : \ell^\infty(Y) \to \mathbb{R}$ is de puntevaluatie dan is $f_y \circ \Phi$ ook een puntevaluatie, in wat $\phi(y)$ wordt.

TUDelft
Delft University of Technology

Nog een andere context

Stel $h : \beta X \to \beta Y$ is een homeomorfisme; dan bepaalt h een bijectie tussen X en Y.

X en Y vormen de verzamelingen geïsoleerde punten van respectievelijk βX en βY (hun Čech-Stonecompactificaties).

TUDelft
Delft University of Technology

Het is één resultaat

- βX is de structuurruimte van $\ell^\infty(X)$.
- $\mathcal{P}(X)$ is de Boole-algebra van idempotenten van $\ell^\infty(X)$.

Eindig is niets

We beschouwen eindige verzamelingen als verwaarloosbaar.

topologie	beschouw $\beta X \setminus X$ (laat de geïsoleerde punten weg)
analytisch	beschouw $\ell^\infty(X)/c_0(X)$
algebraïsch	beschouw $\mathcal{P}(X)/\mathit{fin}(X)$

(Als X eindig is blijft er, in essentie, niets over.)

Het probleem uit Katowice

Het probleem is, in eerste instantie, topologisch gesteld:

Vraag

Als $\beta X \setminus X$ en $\beta Y \setminus Y$ homeomorf zijn, is er dan een bijectie tussen X en Y?

Achtergrond: de ruimte $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ was, toentertijd, net gekarakteriseerd en men wilde weten wat er over andere verzamelingen te zeggen was.

Het probleem uit Katowice, andere context

Vraag

Als $\ell^\infty(X)/c_0(X)$ en $\ell^\infty(Y)/c_0(Y)$ isomorf zijn, als Banach-algebra's, is er dan een bijectie tussen X en Y?

$\beta X \setminus X$ is de structuurruimte van $\ell^\infty(X)/c_0(X)$.

Het probleem uit Katowice, derde context

Vraag

Als $\mathcal{P}(X)/\mathit{fin}(X)$ en $\mathcal{P}(Y)/\mathit{fin}(Y)$ isomorf zijn, als Boole-algebra's, is er dan een bijectie tussen X en Y?

$\mathcal{P}(X)/\mathit{fin}(X)$ is de idempotentenalgebra van $\ell^\infty(X)/c_0(X)$.

Het antwoord is bijna altijd 'ja'

Het antwoord op elk der vragen is 'ja'; voor alle verzamelingen, op één paar na.

Dat paar bestaat uit de kleinste twee oneindige verzamelingen:

$$\omega_0 \text{ en } \omega_1.$$

Het antwoord is bijna altijd ‘ja’

Gezamenlijk werk van Balcar en Frankiewicz:

Als er een tegenvoorbeeld is dan is het paar (ω_0, ω_1) ook een tegenvoorbeeld.

het paar (ω_1, ω_2) is geen tegenvoorbeeld en ‘dus’ blijft (ω_0, ω_1) als enig potentieel tegenvoorbeeld over.
(Dat ‘dus’ volgt via het bewijs van de eerste uitspraak.)

Het antwoord is bijna altijd ‘ja’

Dus:

- zijn $\beta\omega_0 \setminus \omega_0$ en $\beta\omega_1 \setminus \omega_1$ homeomorf?
- zijn ℓ^∞ / c_0 en $\ell^\infty(\omega_1)/c_0(\omega_1)$ isomorf?
- zijn $\mathcal{P}(\omega_0)/\mathit{fin}(\omega_0)$ en $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathit{fin}(\omega_1)$ isomorf?

Partiële antwoorden

Er zijn diverse gevolgen afgeleid van het isomorf zijn van $\mathcal{P}(\omega_0)/\mathit{fin}(\omega_0)$ en $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathit{fin}(\omega_1)$.

Dankzij die gevolgen weten we dat we in ieder geval niet kunnen bewijzen dat $\mathcal{P}(\omega_0)/\mathit{fin}(\omega_0)$ en $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathit{fin}(\omega_1)$ isomorf zijn.

De ContinuumHypothese (die van Cantor natuurlijk) impliceert dat $\mathcal{P}(\omega_0)/\mathit{fin}(\omega_0)$ en $\mathcal{P}(\omega_1)/\mathit{fin}(\omega_1)$ *niet* isomorf zijn.

Inleiding
Een wat makkelijker probleem
Het echte probleem
Het antwoord

Wat nu?

Twee mogelijkheden:

De gelijkheid $0 = 1$ behoort tot de gevolgen van het isomorf zijn van de algebra's.

Iemand laat zien dat $0 = 1$ niet tot de gevolgen van het isomorf zijn van de algebra's behoort.

Ik hoop op het eerste (en wil dat graag bewijzen) maar ik vrees af en toe voor het tweede.

Delft University of Technology
K. P. Hart Drie problemen voor de prijs van één