# Een touwtje om de aarde

## Quidquid latine dictum sit, altum videtur

K. P. Hart

Faculty EEMCS
TU Delft

Leiden, 22 oktober 2014: 13:00 – 13:45

# Vraag 1

Stel je voor dat er een touw strak om de aarde getrokken is, zeg over de polen.

Maak het touw één meter langer en til het overal even hoog op.

Hoe hoog komt het touw boven het aardoppervlak?

# Vraag 2

Stel je voor dat er een touw strak om de aarde getrokken is, zeg over de polen.

Maak het touw één meter langer en til bij de Noordpool op, tot het strak staat. (Alsof je de aarde met het touw aan een spijker hangt.)

Hoe hoog is die spijker boven de Noordpool?

Delft University of Technology

# Vraag 3

Boor een kaarsrechte tunnel van (De Dam in) Amsterdam naar de Martinitoren in Gronignen.

Hoe diep ligt de tunnel halverwege?

Tussen de één en tien meter?
Tussen de tien en honderd meter?
Tussen de honderd en duizend meter?

Delft University of Technology

# Antwoord 1

Vraag 1 is een bekend raadseltje en het antwoord is onafhankelijk van de straal, $R$, van de aarde.

We zoeken $h$ zó dat $2\pi R + 1 = 2\pi(R + h)$.

Oplossing: $h = \frac{1}{2\pi}$ (ongeveer $16\,\mathrm{cm}$).

Delft University of Technology

# Antwoord 2

Vraag 2 is wat minder bekend.

Het verhaal stond in November 2004 in Pythagoras
en het was vraag 4 van de Nationale Wetenschapsquiz 2010

Het was in december 2010 heel druk op
`http://dutiaw37.twi.tudelft.nl/~kp/stukjes-pythagoras/jg44/2004-11/`

Antwoord: ongeveer 120 $\mathrm{m}$

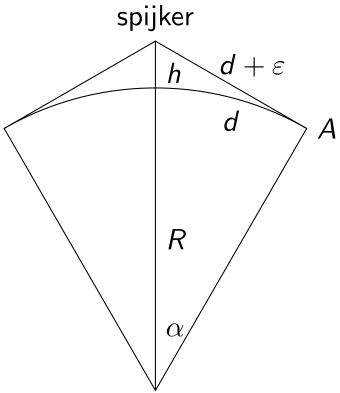
# Antwoord 3

Dit was ooit een kwisvraagje dat voor Pythagoras gemaakt was, vandaar de drie keuzemogelijkheden.

Antwoord: tussen honderd en duizend meter (wat meer dan $400\,\mathrm{m}$).

Hoe doe je zoiets snel, op een kladje, zonder rekenmachientje?

# Situatieschets




$h$: dit willen we bepalen
$R$: de straal van de aarde
$A$: hier komt het touw los
$d$: afstand $A$ tot de noordpool
$\varepsilon$: halve meter touw
$\alpha$: deze hoek hebben we nodig

# Betrekkingen

- $d = \alpha \cdot R$ (of $\alpha = d/R$) en
- $(R+h)^2 = R^2 + (d+\varepsilon)^2$ (Pythagoras)

Dus

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{R^2 + (d+\varepsilon)^2} - R \\ &= R\left(\sqrt{1 + \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{R}\right)^2} - 1\right) \end{aligned}$$

Om $h$ te bepalen hebben we $R$ en $\alpha$ nodig.

# Getallen invullen

$R$ is makkelijk: de omtrek van de aarde is, per definitie, $40.000\,\mathrm{km}$.
Dus $R = \frac{40.000.000}{2\pi}\,\mathrm{m}$

Verder: $\tan\alpha = \frac{d+\varepsilon}{R} = \alpha + \frac{\varepsilon}{R}$
Dus $\alpha$ voldoet aan $\tan\alpha - \alpha = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\pi}{40.000.000}$.
Rekenmachientje, of anderzins: $\alpha \approx 0{,}006176$.

# Het antwoord

Vul nu alles in:

$$h \approx \frac{40.000.000}{2\pi}\left(\sqrt{1+\left(0{,}006176+\frac{\pi}{40.000.000}\right)^2}-1\right) \approx 121{,}4\,\mathrm{m}$$

# Nadere analyse

Met behulp van de stelling van Taylor kunnen we zien hoe $h$ van $\varepsilon$ afhangt.

Om te beginnen: $\tan\alpha \approx \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$.

En dus

$$\frac{1}{3}\alpha^3 \approx \frac{\varepsilon}{R}$$

# Nadere analyse

Ten tweede, voor kleine $x$ geldt $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$.

Dus

$$\begin{aligned} h &= R\left(\sqrt{1+\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{R}\right)^2} - 1\right) \\ &\approx R\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 \\ &\approx R\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{3}\alpha^3\right)^2 \\ &\approx \frac{1}{2}R\alpha^2 \end{aligned}$$

# Afmaker

We hadden $\frac{1}{3}\alpha^3 \approx \frac{\varepsilon}{R}$, ofwel

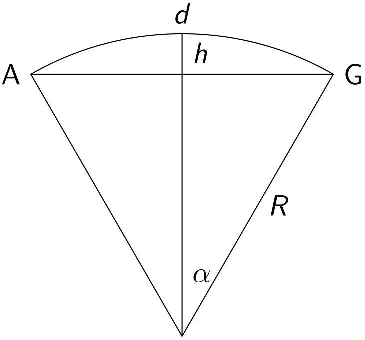
$$\alpha \approx \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{R}} \text{ en dus } \alpha^2 \approx \frac{3^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{2}{3}}}$$

conclusie

$$h \approx \frac{3^{\frac{2}{3}}R^{\frac{1}{3}}}{2} \cdot \varepsilon^{\frac{2}{3}}$$

Opgave: ga na dat deze net zo goed is als de eerdere 'exacte' berekening (het verschil is in de orde van grootte van centimeters)

# Situatieschets




$h$: dit willen we bepalen

$d$: de afstand Amsterdam - Groningen

$R$: de straal van de aarde

$\alpha$: deze hoek hebben we nodig

# Betrekkingen

De formule voor $h$ is redelijk eenvoudig:

$$h = R(1 - \cos\alpha)$$

De situatie: een diner
Beschikbaar materiaal: servetjes en pennen
Geen rekenmachientjes, e.d. (dit was lang geleden)

Delft University of Technology

# De schatting

Met de natte vinger: $d$ ligt tussen de 100 en 200 kilometer.
Dus, met $\alpha = \frac{d}{2R}$,

$$\frac{\pi}{400} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{200}$$

Dus $\alpha$ is vrij klein.
In dat geval $\sin\alpha \approx \alpha$ en $\cos\alpha = 1 = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$,
we benaderen $h$ met

$$h \approx \frac{1}{2}R\alpha^2$$

# Getallen invullen

We vinden dus

$$\frac{1}{2}R\frac{\pi^2}{400^2} \leqslant h \leqslant \frac{1}{2}R\frac{\pi^2}{200^2}$$

en met $R = 40.000.000/(2\pi)$ (in meters):

$$62{,}5\pi \leqslant h \leqslant 250\pi$$

Het derde antwoord is dus correct.

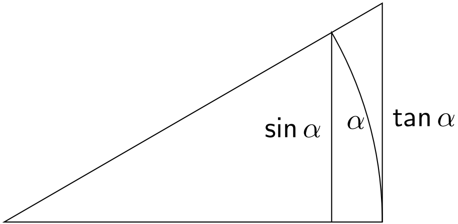
# Nauwkeurigheid

De afstand Amsterdam-Groningen is ongeveer $150\,\mathrm{km}$.
Met de benadering vinden we $h \approx 441{,}79\,\mathrm{m}$.

Hoe betrouwbaar is dit eigenlijk?

# Nauwkeurigheid

Hoe goed is $\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$?




Uit het plaatje: $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$.

# Nauwkeurigheid

Dus weten we dat $\cos\alpha > 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$.

En dus ook: $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha > \alpha - \frac{1}{2}\alpha^3$

En daarmee vinden we dan weer

$$1 - \frac{1}{2}\alpha^2 < \cos\alpha < 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{8}\alpha^4$$

# Nauwkeurigheid

Gevolg van dit al:

$$\frac{1}{2}R\alpha^2 > h > \frac{1}{2}R\alpha^2 - \frac{1}{8}R\alpha^4$$

Met $d = 150\,\mathrm{km}$ vinden we

$$\frac{1}{8}R\alpha^4 \approx 1{,}5\,\mathrm{cm}$$

Moraal: de fout door de benadering is te verwaarlozen

Delft University of Technology

# Taylor

De getallen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{8}$ de ongelijkheden voor $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ zijn niet optimaal, de stelling van Taylor geeft ons

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{120}\alpha^5 + \cdots$$

en

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 - \frac{1}{720}\alpha^6 + \cdots$$

Zie de Analyse (en Wiskundige Structuren).

# Verder lezen?

Op www.pyth.eu
Tunnel: April 2001, en Touw: November 2004

Of op fa.its.tudelft.nl/~hart
(Volg link naar Pythagoras.)