Tellen

Tá scéilín agam

K. P. Hart

Faculty EEMCS
TU Delft

Delft, 16-9-2015

TU Delft
Delft University of Technology

Dingen om te tellen

- afbeeldingen

Dingen om te tellen

- afbeeldingen
- injecties

Delft University of Technology

Dingen om te tellen

- afbeeldingen
- injecties
- surjecties

- afbeeldingen
- injecties
- surjecties
- bijecties

Dingen om te tellen

- afbeeldingen
- injecties
- surjecties
- bijecties
- deelverzamelingen

Delft University of Technology

Dingen om te tellen

- afbeeldingen
- injecties
- surjecties
- bijecties
- deelverzamelingen

Delft University of Technology

Dingen om te tellen

- afbeeldingen
- injecties
- surjecties
- bijecties
- deelverzamelingen van diverse pluimage

Delft University of Technology

Wat notatie

Afkorting: $\mathbf{n} = \{1, \ldots, n\}$

Wat notatie

Afkorting: $\mathbf{n} = \{1, \ldots, n\}$
$|X|$: het aantal elementen van X

Wat notatie

Afkorting: $\mathbf{n} = \{1, \ldots, n\}$
$|X|$: het aantal elementen van X
$\mathcal{P}(X)$: machtsverzameling, alle deelverzamelingen van X

Delft University of Technology

Wat notatie

Afkorting: $\mathbf{n} = \{1, \ldots, n\}$
$|X|$: het aantal elementen van X
$\mathcal{P}(X)$: machtsverzameling, alle deelverzamelingen van X
$[X]^k$: de deelverzamelingen van X met k elementen

Alle afbeeldingen van **k** naar **n**.

Alle afbeeldingen van $\mathbf{k}$ naar $\mathbf{n}$.

Makkelijk: voor elke $i \in \mathbf{k}$ één $j \in \mathbf{n}$ kiezen, Alle afbeeldingen van $\mathbf{k}$ naar $\mathbf{n}$.

Makkelijk: voor elke $i \in \mathbf{k}$ één $j \in \mathbf{n}$ kiezen, onafhankelijk van elkaar, dus

Afbeeldingen tellen

Alle afbeeldingen van **k** naar **n**.

Makkelijk: voor elke $i \in \mathbf{k}$ één $j \in \mathbf{n}$ kiezen, onafhankelijk van elkaar, dus

n^k afbeeldingen

Delft University of Technology

Hoeveel deelverzamelingen heeft **k**?

Hoeveel deelverzamelingen heeft **k**?

Even veel als er afbeeldingen van **k** naar **2** zijn!

Deelverzamelingen, I

Hoeveel deelverzamelingen heeft $\mathbf{k}$?

Even veel als er afbeeldingen van $\mathbf{k}$ naar $\mathbf{2}$ zijn!

$f \mapsto \{i : f(i) = 1\}$ is een bijectie

Deelverzamelingen, I

Hoeveel deelverzamelingen heeft **k**?

Even veel als er afbeeldingen van **k** naar **2** zijn!

$f \mapsto \{i : f(i) = 1\}$ is een bijectie

Dus 2^k deelverzamelingen

Delft University of Technology

Injecties

Hoeveel injecties van $\mathbf{k}$ naar $\mathbf{n}$?

Injecties

Hoeveel injecties van **k** naar **n**?

Als $k > n$ dan 0 injecties.

Delft University of Technology

Injecties

Hoeveel injecties van **k** naar **n**?

Als $k > n$ dan 0 injecties.

Als $k \leqslant n$ dan

Injecties

Hoeveel injecties van **k** naar **n**?

Als $k > n$ dan 0 injecties.

Als $k \leqslant n$ dan

$$n$$

Hoeveel injecties van **k** naar **n**?

Als $k > n$ dan 0 injecties.

Als $k \leqslant n$ dan

$$n \times (n-1)$$

Hoeveel injecties van **k** naar **n**?

Als $k > n$ dan 0 injecties.

Als $k \leqslant n$ dan

$$n \times (n-1) \times \cdots$$

Hoeveel injecties van **k** naar **n**?

Als $k > n$ dan 0 injecties.

Als $k \leqslant n$ dan

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$$

injecties van **k** naar **n**

In het bijzonder

Bijecties

In het bijzonder

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 1$$

bijecties van $\mathbf{n}$ naar zichzelf.

Bijecties

In het bijzonder

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 1$$

bijecties van $\mathbf{n}$ naar zichzelf.

Notatie: $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$

Bijecties

In het bijzonder

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 1$$

bijecties van **n** naar zichzelf.

Notatie: $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$
Spreek uit: n-faculteit

In het bijzonder

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 1$$

bijecties van $\mathbf{n}$ naar zichzelf.

Notatie: $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$
Spreek uit: n-faculteit

Er zijn iets meer dan 160 eerstejaars; op hoeveel manieren kunnen jullie straks lootjes trekken bij Sinterklaas?

Bijecties

In het bijzonder

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 1$$

bijecties van $\mathbf{n}$ naar zichzelf.

Notatie: $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$
Spreek uit: n-faculteit

Er zijn iets meer dan 160 eerstejaars; op hoeveel manieren kunnen jullie straks lootjes trekken bij Sinterklaas?
Meer dan 160! en dat is meer dan $0{,}47 \times 10^{285}$.

Bijecties

In het bijzonder

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 1$$

bijecties van $\mathbf{n}$ naar zichzelf.

Notatie: $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$
Spreek uit: n-faculteit

Er zijn iets meer dan 160 eerstejaars; op hoeveel manieren kunnen jullie straks lootjes trekken bij Sinterklaas?
Meer dan 160! en dat is meer dan $0{,}47 \times 10^{285}$.
En hoe vaak gaat het goed? (Trekt niemand zichzelf?)

Voorbeeld: Lotto

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Delft University of Technology

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Hoeveel mogelijke trekkingen?

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Hoeveel mogelijke trekkingen? $45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40$

Voorbeeld: Lotto

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Hoeveel mogelijke trekkingen? $45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40$

Hoeveel (voor jou) gunstige trekkingen?

Voorbeeld: Lotto

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Hoeveel mogelijke trekkingen? $45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40$

Hoeveel (voor jou) gunstige trekkingen? $6!$

Delft University of Technology

Voorbeeld: Lotto

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Hoeveel mogelijke trekkingen? $45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40$

Hoeveel (voor jou) gunstige trekkingen? $6!$

Bijecties van $\mathbf{6}$ naar $\mathbf{6}$

Voorbeeld: Lotto

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Hoeveel mogelijke trekkingen? $45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40$

Hoeveel (voor jou) gunstige trekkingen? $6!$

Bijecties van **6** naar **6**

$6! = 720$ en

Voorbeeld: Lotto

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Hoeveel mogelijke trekkingen? $45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40$

Hoeveel (voor jou) gunstige trekkingen? $6!$

Bijecties van $\mathbf{6}$ naar $\mathbf{6}$

$6! = 720$ en

$45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40$

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Hoeveel mogelijke trekkingen? $45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40$

Hoeveel (voor jou) gunstige trekkingen? $6!$

Bijecties van **6** naar **6**

$6! = 720$ en

$45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40 > 40^6$

TU Delft
Delft University of Technology

Voorbeeld: Lotto

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Hoeveel mogelijke trekkingen? $45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40$

Hoeveel (voor jou) gunstige trekkingen? $6!$

Bijecties van $\mathbf{6}$ naar $\mathbf{6}$

$6! = 720$ en

$45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40 > 40^6 = 2^{12} \times 10^6$

Voorbeeld: Lotto

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Hoeveel mogelijke trekkingen? $45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40$

Hoeveel (voor jou) gunstige trekkingen? $6!$

Bijecties van $\mathbf{6}$ naar $\mathbf{6}$

$6! = 720$ en

$45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40 > 40^6 = 2^{12} \times 10^6 > 4 \times 10^9$

Delft University of Technology

Voorbeeld: Lotto

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Hoeveel mogelijke trekkingen? $45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40$

Hoeveel (voor jou) gunstige trekkingen? $6!$

Bijecties van $\mathbf{6}$ naar $\mathbf{6}$

$6! = 720$ en

$45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40 > 40^6 = 2^{12} \times 10^6 > 4 \times 10^9$

Wat vind je van die kans?

Lotto gaat niet om de volgorde van de balletje

Deelverzamelingen, II

Lotto gaat niet om de volgorde van de balletje maar om de *verzameling* van de balletjes (of de getallen).

Deelverzamelingen, II

Lotto gaat niet om de volgorde van de balletje maar om de *verzameling* van de balletjes (of de getallen).

Het aantal trekkingen kunnen we schrijven als

$$\frac{45!}{39!}$$

Delft University of Technology

Lotto gaat niet om de volgorde van de balletje maar om de *verzameling* van de balletjes (of de getallen).

Het aantal trekkingen kunnen we schrijven als

$$\frac{45!}{39!}$$

Het aantal verzamelingen van zes getallen is dan

Deelverzamelingen, II

Lotto gaat niet om de volgorde van de balletje maar om de *verzameling* van de balletjes (of de getallen).

Het aantal trekkingen kunnen we schrijven als

$$\frac{45!}{39!}$$

Het aantal verzamelingen van zes getallen is dan

$$\frac{45!}{6! \times 39!}$$

Deelverzamelingen, II

Lotto gaat niet om de volgorde van de balletje maar om de *verzameling* van de balletjes (of de getallen).

Het aantal trekkingen kunnen we schrijven als

$$\frac{45!}{39!}$$

Het aantal verzamelingen van zes getallen is dan

$$\frac{45!}{6! \times 39!}$$

delen door 6! om de volgordes weg te werken.

Delft University of Technology

Algemeen: het aantal injecties van **k** naar **n** kunnen we schrijven als

Deelverzamelingen, II

Algemeen: het aantal injecties van **k** naar **n** kunnen we schrijven als

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Algemeen: het aantal injecties van **k** naar **n** kunnen we schrijven als

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

het aantal deelverzamelingen van **n** met k elementen is dus

Deelverzamelingen, II

Algemeen: het aantal injecties van **k** naar **n** kunnen we schrijven als

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

het aantal deelverzamelingen van **n** met k elementen is dus

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Algemeen: het aantal injecties van **k** naar **n** kunnen we schrijven als

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

het aantal deelverzamelingen van **n** met k elementen is dus

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

door $k!$ delen, het aantal volgordes.

Binomiaalcoëfficiënten

We noteren

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Delft University of Technology

Binomiaalcoëfficiënten

We noteren

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

spreek uit: n-boven-k of n-kies-k.

Delft University of Technology

We noteren

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

spreek uit: n-boven-k of n-kies-k.

Deze getallen heten *binomiaalcoëfficiënten* en ze duiken bij veel telproblemen op.

Binomiaalcoëfficiënten

We noteren

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

spreek uit: n-boven-k of n-kies-k.

Deze getallen heten *binomiaalcoëfficiënten* en ze duiken bij veel telproblemen op.

$[\mathbf{n}]^k$ heeft dus $\binom{n}{k}$ elementen.

TU Delft
Delft University of Technology

Eigenschappen

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Delft University of Technology

Eigenschappen

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

Eigenschappen

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (als $0 \leqslant k \leqslant n$)

Delft University of Technology

Eigenschappen

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (als $0 \leqslant k \leqslant n$)

Vul in, of kijk naar families als

- $[\mathbf{n}]^0$ en $[\mathbf{n}]^n$

Delft University of Technology

Eigenschappen

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (als $0 \leqslant k \leqslant n$)

Vul in, of kijk naar families als

- $[\mathbf{n}]^0$ en $[\mathbf{n}]^n$,
- $[\mathbf{n}]^1$ en $[\mathbf{n}]^{n-1}$, en

Delft University of Technology

Eigenschappen

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (als $0 \leqslant k \leqslant n$)

Vul in, of kijk naar families als

- $[\mathbf{n}]^0$ en $[\mathbf{n}]^n$,
- $[\mathbf{n}]^1$ en $[\mathbf{n}]^{n-1}$, en, algemeen
- $[\mathbf{n}]^k$ en $[\mathbf{n}]^{n-k}$

Delft University of Technology

Eigenschappen

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (als $0 \leqslant k \leqslant n$)

Vul in, of kijk naar families als

- $[\mathbf{n}]^0$ en $[\mathbf{n}]^n$,
- $[\mathbf{n}]^1$ en $[\mathbf{n}]^{n-1}$, en, algemeen
- $[\mathbf{n}]^k$ en $[\mathbf{n}]^{n-k}$ (maak er een bijectie tussen).

Delft University of Technology

Eigenschappen

Belangrijke eigenschap:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(als $1 \leqslant k \leqslant n$).

Belangrijke eigenschap:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(als $1 \leqslant k \leqslant n$).

Bewijs: schrijf uit

Eigenschappen

Belangrijke eigenschap:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(als $1 \leqslant k \leqslant n$).

Bewijs: schrijf uit, of onderzoek het verband tussen

Delft University of Technology

Eigenschappen

Belangrijke eigenschap:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(als $1 \leqslant k \leqslant n$).

Bewijs: schrijf uit, of onderzoek het verband tussen $[\mathbf{n+1}]^k$ enerzijds

Delft University of Technology

Eigenschappen

Belangrijke eigenschap:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(als $1 \leqslant k \leqslant n$).

Bewijs: schrijf uit, of onderzoek het verband tussen
$[\mathbf{n+1}]^k$ enerzijds, en
$[\mathbf{n}]^{k-1}$ en $[\mathbf{n}]^k$ anderzijds

Eigenschappen

Belangrijke eigenschap:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(als $1 \leqslant k \leqslant n$).

Bewijs: schrijf uit, of onderzoek het verband tussen
$[\mathbf{n+1}]^k$ enerzijds, en
$[\mathbf{n}]^{k-1}$ en $[\mathbf{n}]^k$ anderzijds

Gevolg: de breuk $\binom{n}{k}$ is een natuurlijk getal.

Eigenschappen

Belangrijke eigenschap:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(als $1 \leqslant k \leqslant n$).

Bewijs: schrijf uit, of onderzoek het verband tussen
$[\mathbf{n+1}]^k$ enerzijds, en
$[\mathbf{n}]^{k-1}$ en $[\mathbf{n}]^k$ anderzijds

Gevolg: de breuk $\binom{n}{k}$ is een natuurlijk getal.

Bewonder nu in het dictaat de driehoek van Pascal

Delft University of Technology

Heel nuttige gelijkheid:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Binomium van Newton

Heel nuttige gelijkheid:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

(bewijs in dictaat)

Binomium van Newton

Heel nuttige gelijkheid:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

(bewijs in dictaat)

Hier kun je mooi mee spelen:

Delft University of Technology

Binomium van Newton

Heel nuttige gelijkheid:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

(bewijs in dictaat)

Hier kun je mooi mee spelen:

Wat krijg je als $x = y = 1$?

Delft University of Technology

Binomium van Newton

Heel nuttige gelijkheid:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

(bewijs in dictaat)

Hier kun je mooi mee spelen:

Wat krijg je als $x = y = 1$?

Wat krijg je als $x = 1$ en $y = -1$?

Delft University of Technology

Binomium van Newton

Heel nuttige gelijkheid:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

(bewijs in dictaat)

Hier kun je mooi mee spelen:

Wat krijg je als $x = y = 1$?

Wat krijg je als $x = 1$ en $y = -1$?

En wat als $x = 2$ en $y = 1$?

Delft University of Technology

Het aantal surjecties van $\mathbf{n}$ naar $\mathbf{k}$ is gelijk aan ...

Surjecties tellen

Het aantal surjecties van **n** naar **k** is gelijk aan . . .

Dit is niet zo makkelijk als de andere tellingen

Delft University of Technology

Surjecties tellen

Het aantal surjecties van $\mathbf{n}$ naar $\mathbf{k}$ is gelijk aan ...

Dit is niet zo makkelijk als de andere tellingen

Eerst maar een notatie: $\left|{n \atop k}\right|$ is het aantal surjecties van $\mathbf{n}$ naar $\mathbf{k}$

Delft University of Technology

Surjecties tellen

Het aantal surjecties van **n** naar **k** is gelijk aan ...

Dit is niet zo makkelijk als de andere tellingen

Eerst maar een notatie: $\left|{n \atop k}\right|$ is het aantal surjecties van **n** naar **k**

Makkelijk geval: $\left|{n \atop 1}\right| =$

Delft University of Technology

Surjecties tellen

Het aantal surjecties van **n** naar **k** is gelijk aan ...

Dit is niet zo makkelijk als de andere tellingen

Eerst maar een notatie: $\left|{n \atop k}\right|$ is het aantal surjecties van **n** naar **k**

Makkelijk geval: $\left|{n \atop 1}\right| = 1$

Surjecties tellen

Het aantal surjecties van **n** naar **k** is gelijk aan ...

Dit is niet zo makkelijk als de andere tellingen

Eerst maar een notatie: $\left|{n \atop k}\right|$ is het aantal surjecties van **n** naar **k**

Makkelijk geval: $\left|{n \atop 1}\right| = 1$ (er is maar één afbeelding)

Delft University of Technology

Het aantal surjecties van **n** naar **k** is gelijk aan ...

Dit is niet zo makkelijk als de andere tellingen

Eerst maar een notatie: $\left|{n \atop k}\right|$ is het aantal surjecties van **n** naar **k**

Makkelijk geval: $\left|{n \atop 1}\right| = 1$ (er is maar één afbeelding)

Nog een makkelijk geval: $\left|{n \atop n}\right|$

Delft University of Technology

Surjecties tellen

Het aantal surjecties van **n** naar **k** is gelijk aan ...

Dit is niet zo makkelijk als de andere tellingen

Eerst maar een notatie: $\left|{n \atop k}\right|$ is het aantal surjecties van **n** naar **k**

Makkelijk geval: $\left|{n \atop 1}\right| = 1$ (er is maar één afbeelding)

Nog een makkelijk geval: $\left|{n \atop n}\right| = n!$

Delft University of Technology

Het aantal surjecties van **n** naar **k** is gelijk aan ...

Dit is niet zo makkelijk als de andere tellingen

Eerst maar een notatie: $\left|{n \atop k}\right|$ is het aantal surjecties van **n** naar **k**

Makkelijk geval: $\left|{n \atop 1}\right| = 1$ (er is maar één afbeelding)

Nog een makkelijk geval: $\left|{n \atop n}\right| = n!$ (surjecties zijn bijectief)

Het aantal surjecties van **n** naar **k** is gelijk aan ...

Dit is niet zo makkelijk als de andere tellingen

Eerst maar een notatie: $\left|{n \atop k}\right|$ is het aantal surjecties van **n** naar **k**

Makkelijk geval: $\left|{n \atop 1}\right| = 1$ (er is maar één afbeelding)

Nog een makkelijk geval: $\left|{n \atop n}\right| = n!$ (surjecties zijn bijectief)

Iets minder makkelijk: $\left|{n \atop 2}\right| = 2^n - 2$

Delft University of Technology

Het aantal surjecties van **n** naar **k** is gelijk aan …

Dit is niet zo makkelijk als de andere tellingen

Eerst maar een notatie: $\left|{n \atop k}\right|$ is het aantal surjecties van **n** naar **k**

Makkelijk geval: $\left|{n \atop 1}\right| = 1$ (er is maar één afbeelding)

Nog een makkelijk geval: $\left|{n \atop n}\right| = n!$ (surjecties zijn bijectief)

Iets minder makkelijk: $\left|{n \atop 2}\right| = 2^n - 2$
(precies twee niet-surjectieve afbeeldingen)

Surjecties tellen

Het aantal surjecties van **n** naar **k** is gelijk aan ...

Dit is niet zo makkelijk als de andere tellingen

Eerst maar een notatie: $\left|{n \atop k}\right|$ is het aantal surjecties van **n** naar **k**

Makkelijk geval: $\left|{n \atop 1}\right| = 1$ (er is maar één afbeelding)

Nog een makkelijk geval: $\left|{n \atop n}\right| = n!$ (surjecties zijn bijectief)

Iets minder makkelijk: $\left|{n \atop 2}\right| = 2^n - 2$
(precies twee niet-surjectieve afbeeldingen)

Hoe zou de algemene formule eruit zien?

Aanpak

Tel de niet-surjectieve afbeeldingen en trek dat aantal van het totaal, en dat is k^n, af.

Delft University of Technology

Aanpak

Tel de niet-surjectieve afbeeldingen en trek dat aantal van het totaal, en dat is k^n, af.

Voor $j \in \mathbf{k}$ schrijven we $E(j) = \{f : j \notin f[\mathbf{n}]\}$.

Tel de niet-surjectieve afbeeldingen en trek dat aantal van het totaal, en dat is k^n, af.

Voor $j \in \mathbf{k}$ schrijven we $E(j) = \{f : j \notin f[\mathbf{n}]\}$.

We moeten dus $E(1) \cup E(2) \cup \cdots \cup E(k)$ tellen.

Stap 1

Stap 1: neem $\left|E(1)\right| + \left|E(2)\right| + \cdots + \left|E(k)\right|$

Delft University of Technology

Stap 1: neem $|E(1)| + |E(2)| + \cdots + |E(k)|$,
dat is gelijk aan

$$k \times (k-1)^n$$

Stap 1: neem $|E(1)| + |E(2)| + \cdots + |E(k)|$,
dat is gelijk aan

$$k \times (k-1)^n$$

Als $k = 4$ krijgen we dus
$|E(1)| + |E(2)| + |E(3)| + |E(4)| = 4 \times 3^n$

Stap 1: neem $\left|E(1)\right| + \left|E(2)\right| + \cdots + \left|E(k)\right|$,
dat is gelijk aan

$$k \times (k-1)^n$$

Als $k = 4$ krijgen we dus
$\left|E(1)\right| + \left|E(2)\right| + \left|E(3)\right| + \left|E(4)\right| = 4 \times 3^n$

Hier is dubbel geteld (elke f in $E(1) \cap E(2)$ is ten minste twee keer geteld), dus . . .

... trekken we voor elk tweetal i en j met $i < j$ het aantal $\bigl|E(i) \cap E(j)\bigr|$ weer af.

Stap 2

… trekken we voor elk tweetal i en j met $i < j$ het aantal $\left|E(i) \cap E(j)\right|$ weer af.

Er geldt $\left|E(i) \cap E(j)\right| = (k-2)^n$ en er zijn $\binom{k}{2}$ tweetallen, dus we trekken in totaal

$$\binom{k}{2}(k-2)^n$$

van $k \cdot (k-1)^n$ af.

Delft University of Technology

Stap 2

... trekken we voor elk tweetal i en j met $i < j$ het aantal $\bigl|E(i) \cap E(j)\bigr|$ weer af.

Er geldt $\bigl|E(i) \cap E(j)\bigr| = (k-2)^n$ en er zijn $\binom{k}{2}$ tweetallen, dus we trekken in totaal

$$\binom{k}{2}(k-2)^n$$

van $k \cdot (k-1)^n$ af.

Als $k = 4$ is dat dus $\binom{4}{2}2^n$ (en $\binom{4}{2} = 6$)

Delft University of Technology

Stap 2

... trekken we voor elk tweetal i en j met $i < j$ het aantal $\bigl|E(i) \cap E(j)\bigr|$ weer af.

Er geldt $\bigl|E(i) \cap E(j)\bigr| = (k-2)^n$ en er zijn $\binom{k}{2}$ tweetallen, dus we trekken in totaal

$$\binom{k}{2}(k-2)^n$$

van $k \cdot (k-1)^n$ af.

Als $k = 4$ is dat dus $\binom{4}{2}2^n$ (en $\binom{4}{2} = 6$)

De stand is nu $4 \cdot 3^n - \binom{4}{2} \cdot 2^n$.

Delft University of Technology

Stap 3

Maar als $f \in E(1) \cap E(2) \cap E(3)$ dan is f zeker drie keer meegeteld

Maar als $f \in E(1) \cap E(2) \cap E(3)$ dan is f zeker drie keer meegeteld, bij $E(1)$, $E(2)$ en $E(3)$

Stap 3

Maar als $f \in E(1) \cap E(2) \cap E(3)$ dan is f zeker drie keer meegeteld, bij $E(1)$, $E(2)$ en $E(3)$, en ook zeker drie keer weggestreept

Stap 3

Maar als $f \in E(1) \cap E(2) \cap E(3)$ dan is f zeker drie keer meegeteld, bij $E(1)$, $E(2)$ en $E(3)$, en ook zeker drie keer weggestreept: bij $E(1) \cap E(2)$, $E(1) \cap E(3)$ en $E(2) \cap E(3)$

Delft University of Technology

Maar als $f \in E(1) \cap E(2) \cap E(3)$ dan is f zeker drie keer meegeteld, bij $E(1)$, $E(2)$ en $E(3)$, en ook zeker drie keer weggestreept: bij $E(1) \cap E(2)$, $E(1) \cap E(3)$ en $E(2) \cap E(3)$, dus moeten we alle drie-bij-driedoorsneden weer meetellen

Stap 3

Maar als $f \in E(1) \cap E(2) \cap E(3)$ dan is f zeker drie keer meegeteld, bij $E(1)$, $E(2)$ en $E(3)$, en ook zeker drie keer weggestreept: bij $E(1) \cap E(2)$, $E(1) \cap E(3)$ en $E(2) \cap E(3)$, dus moeten we alle drie-bij-driedoorsneden weer meetellen:

Delft University of Technology

Stap 3

Maar als $f \in E(1) \cap E(2) \cap E(3)$ dan is f zeker drie keer meegeteld, bij $E(1)$, $E(2)$ en $E(3)$, en ook zeker drie keer weggestreept: bij $E(1) \cap E(2)$, $E(1) \cap E(3)$ en $E(2) \cap E(3)$, dus moeten we alle drie-bij-driedoorsneden weer meetellen:

Dat zijn er $\binom{k}{3}$ en elk heeft $(k-3)^n$ elementen.

Delft University of Technology

Maar als $f \in E(1) \cap E(2) \cap E(3)$ dan is f zeker drie keer meegeteld, bij $E(1)$, $E(2)$ en $E(3)$, en ook zeker drie keer weggestreept: bij $E(1) \cap E(2)$, $E(1) \cap E(3)$ en $E(2) \cap E(3)$, dus moeten we alle drie-bij-driedoorsneden weer meetellen:

Dat zijn er $\binom{k}{3}$ en elk heeft $(k-3)^n$ elementen.

We tellen dus

$$\binom{k}{3}(k-3)^n$$

op bij $k \cdot (k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n$

Stap 3

Maar als $f \in E(1) \cap E(2) \cap E(3)$ dan is f zeker drie keer meegeteld, bij $E(1)$, $E(2)$ en $E(3)$, en ook zeker drie keer weggestreept: bij $E(1) \cap E(2)$, $E(1) \cap E(3)$ en $E(2) \cap E(3)$, dus moeten we alle drie-bij-driedoorsneden weer meetellen:

Dat zijn er $\binom{k}{3}$ en elk heeft $(k-3)^n$ elementen.

We tellen dus

$$\binom{k}{3}(k-3)^n$$

op bij $k \cdot (k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n$

In het geval $k = 4$ is de stand nu $4 \cdot 3^n - \binom{4}{2} \cdot 2^n + \binom{4}{3} \cdot 1^n$

TUDelft
Delft University of Technology

Stap 3a

In het geval $k = 4$ zijn we nu klaar: als f niet surjectief is dan zit hij

- in precies één $E(i)$ en is hij één keer geteld, in stap 1, of

In het geval $k = 4$ zijn we nu klaar: als f niet surjectief is dan zit hij

- in precies één $E(i)$ en is hij één keer geteld, in stap 1, of
- in precies twee $E(i)$s

In het geval $k = 4$ zijn we nu klaar: als f niet surjectief is dan zit hij

- in precies één $E(i)$ en is hij één keer geteld, in stap 1, of
- in precies twee $E(i)$s, dan is hij in stap 1 twee keer meegeteld, en in stap 2 één keer weggestreept

In het geval $k = 4$ zijn we nu klaar: als f niet surjectief is dan zit hij

- in precies één $E(i)$ en is hij één keer geteld, in stap 1, of
- in precies twee $E(i)$s, dan is hij in stap 1 twee keer meegeteld, en in stap 2 één keer weggestreept, en dus één keer geteld,

Delft University of Technology

In het geval $k = 4$ zijn we nu klaar: als f niet surjectief is dan zit hij

- in precies één $E(i)$ en is hij één keer geteld, in stap 1, of
- in precies twee $E(i)$s, dan is hij in stap 1 twee keer meegeteld, en in stap 2 één keer weggestreept, en dus één keer geteld, of
- in precies drie $E(i)$s

In het geval $k = 4$ zijn we nu klaar: als f niet surjectief is dan zit hij

- in precies één $E(i)$ en is hij één keer geteld, in stap 1, of
- in precies twee $E(i)$s, dan is hij in stap 1 twee keer meegeteld, en in stap 2 één keer weggestreept, en dus één keer geteld, of
- in precies drie $E(i)$s, dan is hij drie keer meegeteld

Delft University of Technology

Stap 3a

In het geval $k = 4$ zijn we nu klaar: als f niet surjectief is dan zit hij

- in precies één $E(i)$ en is hij één keer geteld, in stap 1, of
- in precies twee $E(i)$s, dan is hij in stap 1 twee keer meegeteld, en in stap 2 één keer weggestreept, en dus één keer geteld, of
- in precies drie $E(i)$s, dan is hij drie keer meegeteld, drie keer weggestreept

In het geval $k = 4$ zijn we nu klaar: als f niet surjectief is dan zit hij

- in precies één $E(i)$ en is hij één keer geteld, in stap 1, of
- in precies twee $E(i)$s, dan is hij in stap 1 twee keer meegeteld, en in stap 2 één keer weggestreept, en dus één keer geteld, of
- in precies drie $E(i)$s, dan is hij drie keer meegeteld, drie keer weggestreept, en nog één keer meegeteld

Stap 3a

In het geval $k = 4$ zijn we nu klaar: als f niet surjectief is dan zit hij

- in precies één $E(i)$ en is hij één keer geteld, in stap 1, of
- in precies twee $E(i)$s, dan is hij in stap 1 twee keer meegeteld, en in stap 2 één keer weggestreept, en dus één keer geteld, of
- in precies drie $E(i)$s, dan is hij drie keer meegeteld, drie keer weggestreept, en nog één keer meegeteld

Omdat $E(1) \cap E(2) \cap E(3) \cap E(4) = \emptyset$ hebben we elke niet-surjectieve f in $4 \cdot 3^n - \binom{4}{2} \cdot 2^n + \binom{4}{3} \cdot 1^n$ precies één keer meegeteld

Delft University of Technology

Stap 3a

Het aantal surjecties van **n** naar **4** is dus

$$4^n - 4 \cdot 3^n + \binom{4}{2} 2^n - \binom{4}{3} 1^n$$

Stap 3a

Het aantal surjecties van **n** naar **4** is dus

$$4^n - 4 \cdot 3^n + \binom{4}{2} 2^n - \binom{4}{3} 1^n$$

omdat $\binom{4}{0} = 1$ en $\binom{4}{1} = 4$ kunnen we ook schrijven

Delft University of Technology

Stap 3a

Het aantal surjecties van **n** naar **4** is dus

$$4^n - 4 \cdot 3^n + \binom{4}{2} 2^n - \binom{4}{3} 1^n$$

omdat $\binom{4}{0} = 1$ en $\binom{4}{1} = 4$ kunnen we ook schrijven

$$\left|\begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix}\right| = \sum_{l=0}^{4} (-1)^l \binom{4}{l} (4 - l)^n$$

Delft University of Technology

Stap 3a

Het aantal surjecties van **n** naar **4** is dus

$$4^n - 4\cdot 3^n + \binom{4}{2}2^n - \binom{4}{3}1^n$$

omdat $\binom{4}{0} = 1$ en $\binom{4}{1} = 4$ kunnen we ook schrijven

$$\left|\begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix}\right| = \sum_{l=0}^{4}(-1)^l\binom{4}{l}(4-l)^n$$

(om de formule mooi te maken hebben we nog $\binom{4}{4}\cdot 0^n$ als laatste term toegevoegd)

Delft University of Technology

In het algemeen zetten we het meetellen en wegstrepen voort, op de oneven stappen meetellen en op de even stappen wegstrepen

In het algemeen zetten we het meetellen en wegstrepen voort, op de oneven stappen meetellen en op de even stappen wegstrepen, we vinden dan

$$\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}(k-l)^n$$

niet-surjectieve functies

In het algemeen zetten we het meetellen en wegstrepen voort, op de oneven stappen meetellen en op de even stappen wegstrepen, we vinden dan

$$\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}(k-l)^n$$

niet-surjectieve functies en de volgende formule voor het aantal surjecties van **n** naar **k**

Verdere stappen

In het algemeen zetten we het meetellen en wegstrepen voort, op de oneven stappen meetellen en op de even stappen wegstrepen, we vinden dan

$$\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}(k-l)^n$$

niet-surjectieve functies en de volgende formule voor het aantal surjecties van $\mathbf{n}$ naar $\mathbf{k}$:

$$\sum_{l=0}^{k}(-1)^{l}\binom{k}{l}(k-l)^n$$

Delft University of Technology

In het algemeen zetten we het meetellen en wegstrepen voort, op de oneven stappen meetellen en op de even stappen wegstrepen, we vinden dan

$$\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}(k-l)^n$$

niet-surjectieve functies en de volgende formule voor het aantal surjecties van **n** naar **k**:

$$\sum_{l=0}^{k}(-1)^{l}\binom{k}{l}(k-l)^n$$

(weer met een extra $(-1)^k\binom{k}{k}\cdot 0^n$ aan het eind)

Achter de berekening van $\left|{n \atop k}\right|$ zit het *Principe van Inclusie-Exclusie* (of ook wel de *Zeefformule*).

Achter de berekening van $\left|{n \atop k}\right|$ zit het *Principe van Inclusie-Exclusie* (of ook wel de *Zeefformule*).

Dat principe zegt dat je een vereniging van de vorm

$$E(1) \cup E(2) \cup \cdots \cup E(n)$$

systematisch kunt tellen door eerst $\bigl|E(1)\bigr| + \bigl|E(2)\bigr| + \cdots + \bigl|E(n)\bigr|$ te nemen

Achter de berekening van $\left|{n \atop k}\right|$ zit het *Principe van Inclusie-Exclusie* (of ook wel de *Zeefformule*).

Dat principe zegt dat je een vereniging van de vorm

$$E(1) \cup E(2) \cup \cdots \cup E(n)$$

systematisch kunt tellen door eerst $\bigl|E(1)\bigr| + \bigl|E(2)\bigr| + \cdots + \bigl|E(n)\bigr|$ te nemen,
dan alle $\bigl|E(i) \cap E(j)\bigr|$ voor $1 \leqslant i < j \leqslant n$ af te trekken,

Achter de berekening van $\left|{n \atop k}\right|$ zit het *Principe van Inclusie-Exclusie* (of ook wel de *Zeefformule*).

Dat principe zegt dat je een vereniging van de vorm

$$E(1) \cup E(2) \cup \cdots \cup E(n)$$

systematisch kunt tellen door eerst $\bigl|E(1)\bigr| + \bigl|E(2)\bigr| + \cdots + \bigl|E(n)\bigr|$ te nemen,
dan alle $\bigl|E(i) \cap E(j)\bigr|$ voor $1 \leqslant i < j \leqslant n$ af te trekken,
dan alle $\bigl|E(i) \cap E(j) \cap E(k)\bigr|$ voor $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ op te tellen

Achter de berekening van $\left|{n \atop k}\right|$ zit het *Principe van Inclusie-Exclusie* (of ook wel de *Zeefformule*).

Dat principe zegt dat je een vereniging van de vorm

$$E(1) \cup E(2) \cup \cdots \cup E(n)$$

systematisch kunt tellen door eerst $\bigl|E(1)\bigr| + \bigl|E(2)\bigr| + \cdots + \bigl|E(n)\bigr|$ te nemen,
dan alle $\bigl|E(i) \cap E(j)\bigr|$ voor $1 \leqslant i < j \leqslant n$ af te trekken,
dan alle $\bigl|E(i) \cap E(j) \cap E(k)\bigr|$ voor $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ op te tellen,
... enzovoort

Delft University of Technology

Dit werkt het mooist als er regelmaat in die doorsneden zit

Dit werkt het mooist als er regelmaat in die doorsneden zit, zoals bij ons probleem: alle l-bij-l-doorsneden waren even groot

Delft University of Technology

Dit werkt het mooist als er regelmaat in die doorsneden zit, zoals bij ons probleem: alle l-bij-l-doorsneden waren even groot, namelijk $(k-l)^n$

Dit werkt het mooist als er regelmaat in die doorsneden zit, zoals bij ons probleem: alle l-bij-l-doorsneden waren even groot, namelijk $(k-l)^n$, en hun aantal was $\binom{k}{l}$.

Delft University of Technology

Dit werkt het mooist als er regelmaat in die doorsneden zit, zoals bij ons probleem: alle l-bij-l-doorsneden waren even groot, namelijk $(k-l)^n$, en hun aantal was $\binom{k}{l}$.

Dat zorgde voor een mooie formule.

Dit werkt het mooist als er regelmaat in die doorsneden zit, zoals bij ons probleem: alle l-bij-l-doorsneden waren even groot, namelijk $(k-l)^n$, en hun aantal was $\binom{k}{l}$.

Dat zorgde voor een mooie formule.

Dat gebeurt ook bij het Sinterklaasprobleem: hoeveel van de manieren om lootjes te trekken hebben de eigenschap dat niemand zichzelf trekt?

Dit werkt het mooist als er regelmaat in die doorsneden zit, zoals bij ons probleem: alle l-bij-l-doorsneden waren even groot, namelijk $(k-l)^n$, en hun aantal was $\binom{k}{l}$.

Dat zorgde voor een mooie formule.

Dat gebeurt ook bij het Sinterklaasprobleem: hoeveel van de manieren om lootjes te trekken hebben de eigenschap dat niemand zichzelf trekt?

Bestudeer de bladzijden over inclusie-exclusie goed; de notatie die daar gebruikt wordt komt in latere opgaven weer terug.

Een veelgebruikt telmodel: verdeel ballen over genummerde dozen.

Een veelgebruikt telmodel: verdeel ballen over genummerde dozen.

Twee situaties

Een veelgebruikt telmodel: verdeel ballen over genummerde dozen.

Twee situaties:
alle ballen verschillend

Een veelgebruikt telmodel: verdeel ballen over genummerde dozen.

Twee situaties:
alle ballen verschillend, of
alle ballen identiek.

Een veelgebruikt telmodel: verdeel ballen over genummerde dozen.

Twee situaties:
alle ballen verschillend, of
alle ballen identiek.

We gaan uit van k ballen en n dozen.

Verschillende ballen

Verdeling maak niet uit

Verschillende ballen

Verdeling maak niet uit: komt neer op functies van $\mathbf{k}$ naar $\mathbf{n}$

Verdeling maak niet uit: komt neer op functies van **k** naar **n** (bal i in doos $f(i)$)

Verdeling maak niet uit: komt neer op functies van **k** naar **n** (bal i in doos $f(i)$)

Ten hoogste één bal per doos

Verschillende ballen

Verdeling maak niet uit: komt neer op functies van **k** naar **n** (bal i in doos $f(i)$)

Ten hoogste één bal per doos: injecties

Delft University of Technology

Verschillende ballen

Verdeling maak niet uit: komt neer op functies van **k** naar **n** (bal i in doos $f(i)$)

Ten hoogste één bal per doos: injecties

Ten minste één bal per doos

TU Delft
Delft University of Technology

Verschillende ballen

Verdeling maak niet uit: komt neer op functies van **k** naar **n** (bal i in doos $f(i)$)

Ten hoogste één bal per doos: injecties

Ten minste één bal per doos: surjecties

Identieke ballen

Ten hoogste één bal per doos

Delft University of Technology

Identieke ballen

Ten hoogste één bal per doos: kies k dozen uit n

TUDelft

Delft University of Technology

Ten hoogste één bal per doos: kies k dozen uit n

Ten minste één bal per doos

Identieke ballen

Ten hoogste één bal per doos: kies k dozen uit n

Ten minste één bal per doos: stop in elke doos één bal

Identieke ballen

Ten hoogste één bal per doos: kies k dozen uit n

Ten minste één bal per doos: stop in elke doos één bal en verdeel de rest, $k - n$, willekeurig

Delft University of Technology

Identieke ballen

Ten hoogste één bal per doos: kies k dozen uit n

Ten minste één bal per doos: stop in elke doos één bal en verdeel de rest, $k - n$, willekeurig

Dus moeten we nog de 'willekeurige' verdelingen tellen.

Identieke ballen, willekeurig

Zet de dozen op een rij tegen elkaar aan en stel de gezamenlijke wanden voor als streepjes:

$$\bullet \mid \bullet\bullet \mid \quad \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet$$

Hier: negen ballen in vijf dozen.

Identieke ballen, willekeurig

Zet de dozen op een rij tegen elkaar aan en stel de gezamenlijke wanden voor als streepjes:

$$\bullet \mid \bullet\bullet \mid \; \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet$$

Hier: negen ballen in vijf dozen.
We hebben hier $9 + (5 - 1) = 13$ symbolen, waarvan 9 ballen en $5 - 1 = 4$ strepen.

Delft University of Technology

Identieke ballen, willekeurig

Zet de dozen op een rij tegen elkaar aan en stel de gezamenlijke wanden voor als streepjes:

$$\bullet \mid \bullet\bullet \mid \; \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet$$

Hier: negen ballen in vijf dozen.
We hebben hier $9 + (5 - 1) = 13$ symbolen, waarvan 9 ballen en $5 - 1 = 4$ strepen.
Het aantal mogelijke rijtjes is dus $\binom{13}{9} = \binom{13}{4}$

TU Delft
Delft University of Technology

Identieke ballen, willekeurig

Zet de dozen op een rij tegen elkaar aan en stel de gezamenlijke wanden voor als streepjes:

$$\bullet \mid \bullet\bullet \mid \; \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet$$

Hier: negen ballen in vijf dozen.
We hebben hier $9 + (5 - 1) = 13$ symbolen, waarvan 9 ballen en $5 - 1 = 4$ strepen.
Het aantal mogelijke rijtjes is dus $\binom{13}{9} = \binom{13}{4}$,
kies 9 plaatsen voor de ballen

Identieke ballen, willekeurig

Zet de dozen op een rij tegen elkaar aan en stel de gezamenlijke wanden voor als streepjes:

$$\bullet \mid \bullet\bullet \mid \; \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet$$

Hier: negen ballen in vijf dozen.
We hebben hier $9+(5-1)=13$ symbolen, waarvan 9 ballen en $5-1=4$ strepen.
Het aantal mogelijke rijtjes is dus $\binom{13}{9}=\binom{13}{4}$,
kies 9 plaatsen voor de ballen
(of 4 plaatsen voor de streepjes).

Delft University of Technology

In het algemeen: k ballen en $n-1$ streepjes.

Identieke ballen, willekeurig

In het algemeen: k ballen en $n-1$ streepjes.
Dus $k+n-1$ posities

Delft University of Technology

In het algemeen: k ballen en $n-1$ streepjes.
Dus $k+n-1$ posities, waarvan k voor de ballen en $n-1$ voor de streepjes.

Identieke ballen, willekeurig

In het algemeen: k ballen en $n-1$ streepjes.
Dus $k+n-1$ posities, waarvan k voor de ballen en $n-1$ voor de streepjes.
We krijgen dus

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

mogelijke 'willekeurige' verdelingen.

Identieke ballen, willekeurig

In het algemeen: k ballen en $n-1$ streepjes.
Dus $k+n-1$ posities, waarvan k voor de ballen en $n-1$ voor de streepjes.
We krijgen dus

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

mogelijke 'willekeurige' verdelingen.
En als overal ten minste één bal in moet vervangen we k door $k-n$

Identieke ballen, willekeurig

In het algemeen: k ballen en $n-1$ streepjes.
Dus $k+n-1$ posities, waarvan k voor de ballen en $n-1$ voor de streepjes.
We krijgen dus

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

mogelijke ‘willekeurige’ verdelingen.
En als overal ten minste één bal in moet vervangen we k door $k-n$, er komt

$$\binom{k-1}{n-1} = \binom{k-1}{k-n}$$

Delft University of Technology

Op hoeveel manieren kan je 11 schrijven als $x + y + z$ met

Op hoeveel manieren kan je 11 schrijven als $x + y + z$ met

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ en $z \geqslant 0$

Op hoeveel manieren kan je 11 schrijven als $x + y + z$ met

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ en $z \geqslant 0$

$x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ en $z \geqslant 1$

Op hoeveel manieren kan je 11 schrijven als $x + y + z$ met

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ en $z \geqslant 0$

$x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ en $z \geqslant 1$

NB $(4, 3, 4)$ is een andere oplossing dan $(4, 4, 3)$.