Tellen

Tá scéilín agam

K. P. Hart

Faculty EEMCS
TU Delft

Delft, 16-9-2015

Dingen om te tellen

- afbeeldingen
- injecties
- surjecties
- bijecties
- deelverzamelingen van diverse pluimage

Wat notatie

Afkorting: $\mathbf{n} = \{1, \ldots, n\}$
$|X|$: het aantal elementen van X
$\mathcal{P}(X)$: machtsverzameling, alle deelverzamelingen van X
$[X]^k$: de deelverzamelingen van X met k elementen

Afbeeldingen tellen

Alle afbeeldingen van $\mathbf{k}$ naar $\mathbf{n}$.

Makkelijk: voor elke $i \in \mathbf{k}$ één $j \in \mathbf{n}$ kiezen, onafhankelijk van elkaar, dus

n^k afbeeldingen

Delft University of Technology

Deelverzamelingen, I

Hoeveel deelverzamelingen heeft **k**?

Even veel als er afbeeldingen van **k** naar **2** zijn!

$f \mapsto \{i : f(i) = 1\}$ is een bijectie

Dus 2^k deelverzamelingen

Injecties

Hoeveel injecties van **k** naar **n**?

Als $k > n$ dan 0 injecties.

Als $k \leqslant n$ dan

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$$

injecties van **k** naar **n**

Delft University of Technology

Bijecties

In het bijzonder

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 1$$

bijecties van **n** naar zichzelf.

Notatie: $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$
Spreek uit: n-faculteit

Er zijn iets meer dan 160 eerstejaars; op hoeveel manieren kunnen jullie straks lootjes trekken bij Sinterklaas?
Meer dan 160! en dat is meer dan $0{,}47 \times 10^{285}$.
En hoe vaak gaat het goed? (Trekt niemand zichzelf?)

Delft University of Technology

Voorbeeld: Lotto

Kans op alle zes goed bij de lotto: zes uit 45 getallen kiezen.

Hoeveel mogelijke trekkingen? $45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40$

Hoeveel (voor jou) gunstige trekkingen? $6!$

Bijecties van $\mathbf{6}$ naar $\mathbf{6}$

$6! = 720$ en

$45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40 > 40^6 = 2^{12} \times 10^6 > 4 \times 10^9$

Wat vind je van die kans?

Delft University of Technology

Deelverzamelingen, II

Lotto gaat niet om de volgorde van de balletje maar om de *verzameling* van de balletjes (of de getallen).

Het aantal trekkingen kunnen we schrijven als

$$\frac{45!}{39!}$$

Het aantal verzamelingen van zes getallen is dan

$$\frac{45!}{6! \times 39!}$$

delen door 6! om de volgordes weg te werken.

TU Delft
Delft University of Technology

Deelverzamelingen, II

Algemeen: het aantal injecties van **k** naar **n** kunnen we schrijven als

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

het aantal deelverzamelingen van **n** met k elementen is dus

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

door $k!$ delen, het aantal volgordes.

Binomiaalcoëfficiënten

We noteren

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

spreek uit: n-boven-k of n-kies-k.

Deze getallen heten *binomiaalcoëfficiënten* en ze duiken bij veel telproblemen op.

$[\mathbf{n}]^k$ heeft dus $\binom{n}{k}$ elementen.

Delft University of Technology

Eigenschappen

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (als $0 \leqslant k \leqslant n$)

Vul in, of kijk naar families als

- $[\mathbf{n}]^0$ en $[\mathbf{n}]^n$,
- $[\mathbf{n}]^1$ en $[\mathbf{n}]^{n-1}$, en, algemeen
- $[\mathbf{n}]^k$ en $[\mathbf{n}]^{n-k}$ (maak er een bijectie tussen).

Delft University of Technology

Belangrijke eigenschap:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

(als $1 \leqslant k \leqslant n$).

Bewijs: schrijf uit, of onderzoek het verband tussen
$[\mathbf{n+1}]^k$ enerzijds, en
$[\mathbf{n}]^{k-1}$ en $[\mathbf{n}]^k$ anderzijds

Gevolg: de breuk $\binom{n}{k}$ is een natuurlijk getal.

Bewonder nu in het dictaat de driehoek van Pascal

Binomium van Newton

Heel nuttige gelijkheid:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

(bewijs in dictaat)

Hier kun je mooi mee spelen:

Wat krijg je als $x = y = 1$?

Wat krijg je als $x = 1$ en $y = -1$?

En wat als $x = 2$ en $y = 1$?

Delft University of Technology

Surjecties tellen

Het aantal surjecties van **n** naar **k** is gelijk aan ...

Dit is niet zo makkelijk als de andere tellingen

Eerst maar een notatie: $\left|{n \atop k}\right|$ is het aantal surjecties van **n** naar **k**

Makkelijk geval: $\left|{n \atop 1}\right| = 1$ (er is maar één afbeelding)

Nog een makkelijk geval: $\left|{n \atop n}\right| = n!$ (surjecties zijn bijectief)

Iets minder makkelijk: $\left|{n \atop 2}\right| = 2^n - 2$
(precies twee niet-surjectieve afbeeldingen)

Hoe zou de algemene formule eruit zien?

Aanpak

Tel de niet-surjectieve afbeeldingen en trek dat aantal van het totaal, en dat is k^n, af.

Voor $j \in \mathbf{k}$ schrijven we $E(j) = \{f : j \notin f[\mathbf{n}]\}$.

We moeten dus $E(1) \cup E(2) \cup \cdots \cup E(k)$ tellen.

Delft University of Technology

Stap 1

Stap 1: neem $\left|E(1)\right| + \left|E(2)\right| + \cdots + \left|E(k)\right|$,
dat is gelijk aan

$$k \times (k-1)^n$$

Als $k = 4$ krijgen we dus
$\left|E(1)\right| + \left|E(2)\right| + \left|E(3)\right| + \left|E(4)\right| = 4 \times 3^n$

Hier is dubbel geteld (elke f in $E(1) \cap E(2)$ is ten minste twee keer geteld), dus . . .

Delft University of Technology

Stap 2

$\ldots$ trekken we voor elk tweetal i en j met $i < j$ het aantal $\left|E(i) \cap E(j)\right|$ weer af.

Er geldt $\left|E(i) \cap E(j)\right| = (k-2)^n$ en er zijn $\binom{k}{2}$ tweetallen, dus we trekken in totaal

$$\binom{k}{2}(k-2)^n$$

van $k \cdot (k-1)^n$ af.

Als $k = 4$ is dat dus $\binom{4}{2}2^n$ (en $\binom{4}{2} = 6$)

De stand is nu $4 \cdot 3^n - \binom{4}{2} \cdot 2^n$.

Stap 3

Maar als $f \in E(1) \cap E(2) \cap E(3)$ dan is f zeker drie keer meegeteld, bij $E(1)$, $E(2)$ en $E(3)$, en ook zeker drie keer weggestreept: bij $E(1) \cap E(2)$, $E(1) \cap E(3)$ en $E(2) \cap E(3)$, dus moeten we alle drie-bij-driedoorsneden weer meetellen:

Dat zijn er $\binom{k}{3}$ en elk heeft $(k-3)^n$ elementen.

We tellen dus

$$\binom{k}{3}(k-3)^n$$

op bij $k \cdot (k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n$

In het geval $k = 4$ is de stand nu $4 \cdot 3^n - \binom{4}{2} \cdot 2^n + \binom{4}{3} \cdot 1^n$

Stap 3a

In het geval $k = 4$ zijn we nu klaar: als f niet surjectief is dan zit hij

- in precies één $E(i)$ en is hij één keer geteld, in stap 1, of
- in precies twee $E(i)$s, dan is hij in stap 1 twee keer meegeteld, en in stap 2 één keer weggestreept, en dus één keer geteld, of
- in precies drie $E(i)$s, dan is hij drie keer meegeteld, drie keer weggestreept, en nog één keer meegeteld

Omdat $E(1) \cap E(2) \cap E(3) \cap E(4) = \emptyset$ hebben we elke niet-surjectieve f in $4 \cdot 3^n - \binom{4}{2} \cdot 2^n + \binom{4}{3} \cdot 1^n$ precies één keer meegeteld

Het aantal surjecties van **n** naar **4** is dus

$$4^n - 4 \cdot 3^n + \binom{4}{2} 2^n - \binom{4}{3} 1^n$$

omdat $\binom{4}{0} = 1$ en $\binom{4}{1} = 4$ kunnen we ook schrijven

$$\left|\begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix}\right| = \sum_{l=0}^{4} (-1)^l \binom{4}{l} (4-l)^n$$

(om de formule mooi te maken hebben we nog $\binom{4}{4} \cdot 0^n$ als laatste term toegevoegd)

Delft University of Technology

Verdere stappen

In het algemeen zetten we het meetellen en wegstrepen voort, op de oneven stappen meetellen en op de even stappen wegstrepen, we vinden dan

$$\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}(k-l)^n$$

niet-surjectieve functies en de volgende formule voor het aantal surjecties van **n** naar **k**:

$$\sum_{l=0}^{k}(-1)^{l}\binom{k}{l}(k-l)^n$$

(weer met een extra $(-1)^k\binom{k}{k}\cdot 0^n$ aan het eind)

Delft University of Technology

Het principe van Inclusie-Exclusie

Achter de berekening van $\left|{n \atop k}\right|$ zit het *Principe van Inclusie-Exclusie* (of ook wel de *Zeefformule*).

Dat principe zegt dat je een vereniging van de vorm

$$E(1) \cup E(2) \cup \cdots \cup E(n)$$

systematisch kunt tellen door eerst $\bigl|E(1)\bigr| + \bigl|E(2)\bigr| + \cdots + \bigl|E(n)\bigr|$ te nemen,
dan alle $\bigl|E(i) \cap E(j)\bigr|$ voor $1 \leqslant i < j \leqslant n$ af te trekken,
dan alle $\bigl|E(i) \cap E(j) \cap E(k)\bigr|$ voor $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ op te tellen,
... enzovoort

Het principe van Inclusie-Exclusie

Dit werkt het mooist als er regelmaat in die doorsneden zit, zoals bij ons probleem: alle l-bij-l-doorsneden waren even groot, namelijk $(k-l)^n$, en hun aantal was $\binom{k}{l}$.

Dat zorgde voor een mooie formule.

Dat gebeurt ook bij het Sinterklaasprobleem: hoeveel van de manieren om lootjes te trekken hebben de eigenschap dat niemand zichzelf trekt?

Bestudeer de bladzijden over inclusie-exclusie goed; de notatie die daar gebruikt wordt komt in latere opgaven weer terug.

Ballen in dozen

Een veelgebruikt telmodel: verdeel ballen over genummerde dozen.

Twee situaties:
alle ballen verschillend, of
alle ballen identiek.

We gaan uit van k ballen en n dozen.

Verschillende ballen

Verdeling maak niet uit: komt neer op functies van **k** naar **n** (bal i in doos $f(i)$)

Ten hoogste één bal per doos: injecties

Ten minste één bal per doos: surjecties

Delft University of Technology

Identieke ballen

Ten hoogste één bal per doos: kies k dozen uit n

Ten minste één bal per doos: stop in elke doos één bal en verdeel de rest, $k - n$, willekeurig

Dus moeten we nog de 'willekeurige' verdelingen tellen.

Identieke ballen, willekeurig

Zet de dozen op een rij tegen elkaar aan en stel de gezamenlijke wanden voor als streepjes:

$$\bullet \mid \bullet\bullet \mid \quad \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet$$

Hier: negen ballen in vijf dozen.
We hebben hier $9 + (5 - 1) = 13$ symbolen, waarvan 9 ballen en $5 - 1 = 4$ strepen.
Het aantal mogelijke rijtjes is dus $\binom{13}{9} = \binom{13}{4}$,
kies 9 plaatsen voor de ballen
(of 4 plaatsen voor de streepjes).

Delft University of Technology

Identieke ballen, willekeurig

In het algemeen: k ballen en $n-1$ streepjes.
Dus $k+n-1$ posities, waarvan k voor de ballen en $n-1$ voor de streepjes.
We krijgen dus

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

mogelijke 'willekeurige' verdelingen.
En als overal ten minste één bal in moet vervangen we k door $k-n$, er komt

$$\binom{k-1}{n-1} = \binom{k-1}{k-n}$$

Identieke ballen, willekeurig, toepassing

Op hoeveel manieren kan je 11 schrijven als $x + y + z$ met

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ en $z \geqslant 0$

$x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ en $z \geqslant 1$

NB $(4, 3, 4)$ is een andere oplossing dan $(4, 4, 3)$.