

De Hoofdstelling van de Algebra

Tá scéilín agam

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

NWD, 28 maart 2026, 09:00–10:00

Outline

Formulering/Geschiedenis

d'Alembert

Gauss/Ostrovski

Argand

Leeswerk

Hoe luidt “De Hoofdstelling van de Algebra”?

De eerste formulering ooit staat in *Invention nouvelle en l’algèbre* uit 1629

Hoe luidt “De Hoofdstelling van de Algebra”?

De eerste formulering ooit staat in *Invention nouvelle en l’algèbre* uit 1629; hierin schreef Albert Girard (1595–1632)

Hoe luidt “De Hoofdstelling van de Algebra”?

De eerste formulering ooit staat in *Invention nouvelle en l’algèbre* uit 1629; hierin schreef Albert Girard (1595–1632)

II. Theoreme.

**Toutes les equations d’algebre reçoivent autant de solutions , que la
denomi-**

**denomination de la plus haute quantité le demonstre , excepté les incom-
plettes : & la premiere faction des solutions est esgale au nombre du pre-
mier meslé, la seconde faction des mesmes, est esgale au nombre du
deuxiesme meslé; la troisieme, au troisieme , & tousjours ainsi, telle-
ment que la derniere faction est esgale à la fermeture, & ce selon les si-
gnes qui se peuvent remarquer en l’ordre alternatif.**

Hoe luidt “De Hoofdstelling van de Algebra”?

De eerste formulering ooit staat in *Invention nouvelle en l’algèbre* uit 1629; hierin schreef Albert Girard (1595–1632)

II. Theoreme.

Toutes les equations d’algebre reçoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes: & la premiere faction des solutions est esgale au nombre du premier meslé, la seconde faction des mesmes, est esgale au nombre du deuxiesme meslé; la troisieme, au troisieme, & tousjours ainsi, tellement que la derniere faction est esgale à la fermeture, & ce selon les signes qui se peuvent remarquer en l’ordre alternatif.

We zijn dus drie jaar te vroeg ...

Albert Girard

Aan de voorbeelden is te zien dat Girard aan reële vergelijkingen dacht.

Albert Girard

Aan de voorbeelden is te zien dat Girard aan reële vergelijkingen dacht.
Maar hij liet “solutions qui sont impossibles” toe, want:

Albert Girard

Aan de voorbeelden is te zien dat Girard aan reële vergelijkingen dacht.

Maar hij liet “solutions qui sont impossibles” toe, want:

1. de algemene regel moet geldig zijn;

Albert Girard

Aan de voorbeelden is te zien dat Girard aan reële vergelijkingen dacht.

Maar hij liet “solutions qui sont impossibles” toe, want:

1. de algemene regel moet geldig zijn;
2. we moeten zeker zijn dat we geen oplossingen missen;

Albert Girard

Aan de voorbeelden is te zien dat Girard aan reële vergelijkingen dacht.

Maar hij liet “solutions qui sont impossibles” toe, want:

1. de algemene regel moet geldig zijn;
2. we moeten zeker zijn dat we geen oplossingen missen; en
3. de regel is nuttig

Albert Girard

Aan de voorbeelden is te zien dat Girard aan reële vergelijkingen dacht.

Maar hij liet “solutions qui sont impossibles” toe, want:

1. de algemene regel moet geldig zijn;
2. we moeten zeker zijn dat we geen oplossingen missen; en
3. de regel is nuttig

Nuttig?

Albert Girard

Aan de voorbeelden is te zien dat Girard aan reële vergelijkingen dacht.

Maar hij liet “solutions qui sont impossibles” toe, want:

1. de algemene regel moet geldig zijn;
2. we moeten zeker zijn dat we geen oplossingen missen; en
3. de regel is nuttig

Nuttig? Er staat meer in de formulering dan je misschien denkt.

Albert Girard

Bekijk

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - (x_1x_2x_3)$$

Albert Girard

Bekijk

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - (x_1x_2x_3)$$

De coëfficiënten van de vergelijking zijn dus uit te drukken in de oplossingen.

Albert Girard

Bekijk

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - (x_1x_2x_3)$$

De coëfficiënten van de vergelijking zijn dus uit te drukken in de oplossingen.

De 'factions' die Girard noemde zijn $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, en $x_1x_2x_3$.

Albert Girard

Bekijk

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - (x_1x_2x_3)$$

De coëfficiënten van de vergelijking zijn dus uit te drukken in de oplossingen.

De 'factions' die Girard noemde zijn $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, en $x_1x_2x_3$.

En zoals hij schrijft: die zijn dus altemnerend

Albert Girard

Bekijk

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - (x_1x_2x_3)$$

De coëfficiënten van de vergelijking zijn dus uit te drukken in de oplossingen.

De 'factions' die Girard noemde zijn $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, en $x_1x_2x_3$.

En zoals hij schrijft: die zijn dus altemnerend ("en l'ordre alternatif")

Albert Girard

Bekijk

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - (x_1x_2x_3)$$

De coëfficiënten van de vergelijking zijn dus uit te drukken in de oplossingen.

De 'factions' die Girard noemde zijn $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, en $x_1x_2x_3$.

En zoals hij schrijft: die zijn dus alternerend ("en l'ordre alternatif") gelijk aan de coëfficiënten van de lagere machten van x .

Albert Girard

Bekijk

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - (x_1x_2x_3)$$

De coëfficiënten van de vergelijking zijn dus uit te drukken in de oplossingen.

De 'factions' die Girard noemde zijn $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, en $x_1x_2x_3$.

En zoals hij schrijft: die zijn dus alternerend ("en l'ordre alternatif") gelijk aan de coëfficiënten van de lagere machten van x .

In een heleboel voorbeelden liet hij zien hoe dit te gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen.

Albert Girard

Voorbeeld

Neem deze klassieker: $x^3 = 15x + 4$, of $x^3 + 0x^2 - 15x - 4 = 0$.

Albert Girard

Voorbeeld

Neem deze klassieker: $x^3 = 15x + 4$, of $x^3 + 0x^2 - 15x - 4 = 0$.

Dus $x_1 + x_2 + x_3 =$

Albert Girard

Voorbeeld

Neem deze klassieker: $x^3 = 15x + 4$, of $x^3 + 0x^2 - 15x - 4 = 0$.

Dus $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

Albert Girard

Voorbeeld

Neem deze klassieker: $x^3 = 15x + 4$, of $x^3 + 0x^2 - 15x - 4 = 0$.

Dus $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 =$

Albert Girard

Voorbeeld

Neem deze klassieker: $x^3 = 15x + 4$, of $x^3 + 0x^2 - 15x - 4 = 0$.

Dus $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -15$

Albert Girard

Voorbeeld

Neem deze klassieker: $x^3 = 15x + 4$, of $x^3 + 0x^2 - 15x - 4 = 0$.

Dus $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -15$, en $x_1x_2x_3 =$

Albert Girard

Voorbeeld

Neem deze klassieker: $x^3 = 15x + 4$, of $x^3 + 0x^2 - 15x - 4 = 0$.

Dus $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -15$, en $x_1x_2x_3 = 4$.

Albert Girard

Voorbeeld

Neem deze klassieker: $x^3 = 15x + 4$, of $x^3 + 0x^2 - 15x - 4 = 0$.

Dus $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -15$, en $x_1x_2x_3 = 4$.

Iedereen ziet de oplossing $x_1 =$

Albert Girard

Voorbeeld

Neem deze klassieker: $x^3 = 15x + 4$, of $x^3 + 0x^2 - 15x - 4 = 0$.

Dus $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -15$, en $x_1x_2x_3 = 4$.

Iedereen ziet de oplossing $x_1 = 4$.

Voorbeeld

Neem deze klassieker: $x^3 = 15x + 4$, of $x^3 + 0x^2 - 15x - 4 = 0$.

Dus $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -15$, en $x_1x_2x_3 = 4$.

Iedereen ziet de oplossing $x_1 = 4$.

Invullen in de facties: $4 + x_2 + x_3 = 0$ en $4x_2x_3 = 4$ dus

Voorbeeld

Neem deze klassieker: $x^3 = 15x + 4$, of $x^3 + 0x^2 - 15x - 4 = 0$.

Dus $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -15$, en $x_1x_2x_3 = 4$.

Iedereen ziet de oplossing $x_1 = 4$.

Invullen in de facties: $4 + x_2 + x_3 = 0$ en $4x_2x_3 = 4$ dus x_2 en x_3 zijn oplossingen van $x^2 + 4x + 1 = 0$.

Albert Girard

Voorbeeld

Neem deze klassieker: $x^3 = 15x + 4$, of $x^3 + 0x^2 - 15x - 4 = 0$.

Dus $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -15$, en $x_1x_2x_3 = 4$.

Iedereen ziet de oplossing $x_1 = 4$.

Invullen in de facties: $4 + x_2 + x_3 = 0$ en $4x_2x_3 = 4$ dus x_2 en x_3 zijn oplossingen van $x^2 + 4x + 1 = 0$.

Opgave voor bij de lunch

Los op $x^4 - 4x + 3 = 0$.

Leibniz en anderen

Vroegen zich af, bij het primitiveren van rationale functies, of elk reëel polynoom te ontbinden is in reële irreducibele factoren van graad één en twee.

Leibniz en anderen

Vroegen zich af, bij het primitiveren van rationale functies, of elk reëel polynoom te ontbinden is in reële irreducibele factoren van graad één en twee.

(Dat waren nog eens tijden

Leibniz en anderen

Vroegen zich af, bij het primitiveren van rationale functies, of elk reëel polynoom te ontbinden is in reële irreducibele factoren van graad één en twee.

(Dat waren nog eens tijden: $\int \frac{1}{(x^3+x^2+x+1)^2} dx = \dots$)

Leibniz en anderen

Vroegen zich af, bij het primitiveren van rationale functies, of elk reëel polynoom te ontbinden is in reële irreducibele factoren van graad één en twee.

(Dat waren nog eens tijden: $\int \frac{1}{(x^3+x^2+x+1)^2} dx = \dots$)

Leibniz dacht overigens van niet:

$$\begin{aligned} X^4 + a^4 &= (X^2 - a^2 i)(X^2 + a^2 i) \\ &= (X + a\sqrt{i})(X - a\sqrt{i})(X + a\sqrt{-i})(X - a\sqrt{-i}) \end{aligned}$$

Leibniz en anderen

Vroegen zich af, bij het primitiveren van rationale functies, of elk reëel polynoom te ontbinden is in reële irreducibele factoren van graad één en twee.

(Dat waren nog eens tijden: $\int \frac{1}{(x^3+x^2+x+1)^2} dx = \dots$)

Leibniz dacht overigens van niet:

$$\begin{aligned} X^4 + a^4 &= (X^2 - a^2 i)(X^2 + a^2 i) \\ &= (X + a\sqrt{i})(X - a\sqrt{i})(X + a\sqrt{-i})(X - a\sqrt{-i}) \end{aligned}$$

En daar zijn geen tweedegraadsfactoren uit te halen.

Leibniz en anderen

Vroegen zich af, bij het primitiveren van rationale functies, of elk reëel polynoom te ontbinden is in reële irreducibele factoren van graad één en twee.

(Dat waren nog eens tijden: $\int \frac{1}{(x^3+x^2+x+1)^2} dx = \dots$)

Leibniz dacht overigens van niet:

$$\begin{aligned} X^4 + a^4 &= (X^2 - a^2 i)(X^2 + a^2 i) \\ &= (X + a\sqrt{i})(X - a\sqrt{i})(X + a\sqrt{-i})(X - a\sqrt{-i}) \end{aligned}$$

En daar zijn geen tweedegraadsfactoren uit te halen.

Hoewel ...

Leibniz

..., met behulp van $\sqrt{i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i)$ en $\sqrt{-i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - i)$ kom je een heel eind.

Leibniz

..., met behulp van $\sqrt{i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i)$ en $\sqrt{-i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - i)$ kom je een heel eind.
Want dan zie je, bijvoorbeeld, dat

$$(X + a\sqrt{i})(X + a\sqrt{-i})$$

Leibniz

..., met behulp van $\sqrt{i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i)$ en $\sqrt{-i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - i)$ kom je een heel eind.
Want dan zie je, bijvoorbeeld, dat

$$(X + a\sqrt{i})(X + a\sqrt{-i}) = X^2 + a\sqrt{2}X + a^2$$

Leibniz

..., met behulp van $\sqrt{i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i)$ en $\sqrt{-i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - i)$ kom je een heel eind.
Want dan zie je, bijvoorbeeld, dat

$$(X + a\sqrt{i})(X + a\sqrt{-i}) = X^2 + a\sqrt{2}X + a^2$$

Opgave

Doe dit zonder complexe getallen

Leibniz

..., met behulp van $\sqrt{i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i)$ en $\sqrt{-i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - i)$ kom je een heel eind.
Want dan zie je, bijvoorbeeld, dat

$$(X + a\sqrt{i})(X + a\sqrt{-i}) = X^2 + a\sqrt{2}X + a^2$$

Opgave

Doe dit zonder complexe getallen (Hint: bekijk $(X^2 + a^2)^2$).

Het is dezelfde vraag

De twee formuleringen zeggen hetzelfde.

Het is dezelfde vraag

De twee formuleringen zeggen hetzelfde.

Girards formulering laat ons een polynoom in eerstegraadsfactoren ontbinden.

Het is dezelfde vraag

De twee formuleringen zeggen hetzelfde.

Girards formulering laat ons een polynoom in eerstegraadsfactoren ontbinden.

Maar als p reëel is en $p(\zeta) = 0$, dan geldt ook $p(\bar{\zeta}) = 0$.

Het is dezelfde vraag

De twee formuleringen zeggen hetzelfde.

Girards formulering laat ons een polynoom in eerstegraadsfactoren ontbinden.

Maar als p reëel is en $p(\zeta) = 0$, dan geldt ook $p(\bar{\zeta}) = 0$.

Dan is $(x - \zeta)(x - \bar{\zeta}) = x^2 - (\zeta + \bar{\zeta})x + \zeta \cdot \bar{\zeta}$ een (reëel irreducibele) tweedegraadsfactor van p .

Het is dezelfde vraag

De twee formuleringen zeggen hetzelfde.

Girards formulering laat ons een polynoom in eerstegraadsfactoren ontbinden.

Maar als p reëel is en $p(\zeta) = 0$, dan geldt ook $p(\bar{\zeta}) = 0$.

Dan is $(x - \zeta)(x - \bar{\zeta}) = x^2 - (\zeta + \bar{\zeta})x + \zeta \cdot \bar{\zeta}$ een (reëel irreducibele) tweedegraadsfactor van p .

Omgekeerd: als p te ontbinden is in (irreducibele reële) eerste- en tweedegraadsfactoren

Het is dezelfde vraag

De twee formuleringen zeggen hetzelfde.

Girards formulering laat ons een polynoom in eerstegraadsfactoren ontbinden.

Maar als p reëel is en $p(\zeta) = 0$, dan geldt ook $p(\bar{\zeta}) = 0$.

Dan is $(x - \zeta)(x - \bar{\zeta}) = x^2 - (\zeta + \bar{\zeta})x + \zeta \cdot \bar{\zeta}$ een (reëel irreducibele) tweedegraadsfactor van p .

Omgekeerd: als p te ontbinden is in (irreducibele reële) eerste- en tweedegraadsfactoren dan zijn die tweedegraadsfactoren via kwadraat afsplitsen verder te ontbinden in twee complexe factoren

Het is dezelfde vraag

De twee formuleringen zeggen hetzelfde.

Girards formulering laat ons een polynoom in eerstegraadsfactoren ontbinden.

Maar als p reëel is en $p(\zeta) = 0$, dan geldt ook $p(\bar{\zeta}) = 0$.

Dan is $(x - \zeta)(x - \bar{\zeta}) = x^2 - (\zeta + \bar{\zeta})x + \zeta \cdot \bar{\zeta}$ een (reëel irreducibele) tweedegraadsfactor van p .

Omgekeerd: als p te ontbinden is in (irreducibele reële) eerste- en tweedegraadsfactoren dan zijn die tweedegraadsfactoren via kwadraat afsplitsen verder te ontbinden in twee complexe factoren en krijgen we zo net zoveel oplossingen als de graad van p groot is.

Euler

Stelling

Elk reëel polynoom is te ontbinden in eerste- en tweedegraadsfactoren.

Euler

Stelling

Elk reëel polynoom is te ontbinden in eerste- en tweedegraadsfactoren.

Bernoulli gaf een tegenvoorbeeld: $X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 4X + 4$

Euler

Stelling

Elk reëel polynoom is te ontbinden in eerste- en tweedegraadsfactoren.

Bernoulli gaf een tegenvoorbeeld: $X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 4X + 4$, met nulpunten

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2 + i\sqrt{3}}$$

Euler

Stelling

Elk reëel polynoom is te ontbinden in eerste- en tweedegraadsfactoren.

Bernoulli gaf een tegenvoorbeeld: $X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 4X + 4$, met nulpunten

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2 + i\sqrt{3}} \text{ en } x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2 - i\sqrt{3}}$$

Euler

Stelling

Elk reëel polynoom is te ontbinden in eerste- en tweedegraadsfactoren.

Bernoulli gaf een tegenvoorbeeld: $X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 4X + 4$, met nulpunten

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2 + i\sqrt{3}} \text{ en } x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2 - i\sqrt{3}}$$

Euler maakte hier korte metten mee

Euler

Stelling

Elk reëel polynoom is te ontbinden in eerste- en tweedegraadsfactoren.

Bernoulli gaf een tegenvoorbeeld: $X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 4X + 4$, met nulpunten

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2 + i\sqrt{3}} \text{ en } x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2 - i\sqrt{3}}$$

Euler maakte hier korte metten mee: $(X - x_1)(X - x_3)$ en $(X - x_2)(X - x_4)$ zijn reëel.

Euler

Stelling

Elk reëel polynoom is te ontbinden in eerste- en tweedegraadsfactoren.

Bernoulli gaf een tegenvoorbeeld: $X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 4X + 4$, met nulpunten

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2 + i\sqrt{3}} \text{ en } x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2 - i\sqrt{3}}$$

Euler maakte hier korte metten mee: $(X - x_1)(X - x_3)$ en $(X - x_2)(X - x_4)$ zijn reëel.

Opgave

Werk dit uit.

Euler

Stelling

Elk reëel polynoom is te ontbinden in eerste- en tweedegraadsfactoren.

Bernoulli gaf een tegenvoorbeeld: $X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 4X + 4$, met nulpunten

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2 + i\sqrt{3}} \text{ en } x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2 - i\sqrt{3}}$$

Euler maakte hier korte metten mee: $(X - x_1)(X - x_3)$ en $(X - x_2)(X - x_4)$ zijn reëel.

Opgave

Werk dit uit.

Euler's bewijs was onvolledig.

Interpretatie van de stelling

Het was een beetje hinken op twee benen:

Interpretatie van de stelling

Het was een beetje hinken op twee benen:

De oplosformules gaven, voorlopig tot en met graad 4, oplossingen van de vergelijkingen

Interpretatie van de stelling

Het was een beetje hinken op twee benen:

De oplosformules gaven, voorlopig tot en met graad 4, oplossingen van de vergelijkingen (formele oplossingen).

Interpretatie van de stelling

Het was een beetje hinken op twee benen:

De oplosformules gaven, voorlopig tot en met graad 4, oplossingen van de vergelijkingen (formele oplossingen).

Maar voor de ontbindingen waren echte complexe oplossingen nodig.

Interpretatie van de stelling

Het was een beetje hinken op twee benen:

De oplosformules gaven, voorlopig tot en met graad 4, oplossingen van de vergelijkingen (formele oplossingen).

Maar voor de ontbindingen waren echte complexe oplossingen nodig.

Bernoulli had (nog) niet door dat $\sqrt{2 + i\sqrt{3}}$ als een complex getal te schrijven is

Interpretatie van de stelling

Het was een beetje hinken op twee benen:

De oplosformules gaven, voorlopig tot en met graad 4, oplossingen van de vergelijkingen (formele oplossingen).

Maar voor de ontbindingen waren echte complexe oplossingen nodig.

Bernoulli had (nog) niet door dat $\sqrt{2 + i\sqrt{3}}$ als een complex getal te schrijven is; Euler wel.

En complexe vergelijkingen?

De complexe formulering volgt uit de reële.

En complexe vergelijkingen?

De complexe formulering volgt uit de reële.

Zeg $p(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$.

En complexe vergelijkingen?

De complexe formulering volgt uit de reële.

Zeg $p(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$.

Schrijf $\bar{p}(z) = z^3 + \bar{\alpha}z^2 + \bar{\beta}z + \bar{\gamma}$ en maak hiermee

En complexe vergelijkingen?

De complexe formulering volgt uit de reële.

Zeg $p(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$.

Schrijf $\bar{p}(z) = z^3 + \bar{\alpha}z^2 + \bar{\beta}z + \bar{\gamma}$ en maak hiermee

$$\begin{aligned} q(z) &= p(z) \cdot \bar{p}(z) \\ &= z^6 + (\alpha + \bar{\alpha})z^5 + (\beta + \bar{\beta} + \alpha \cdot \bar{\alpha})z^4 + (\gamma + \bar{\gamma} + \alpha \cdot \bar{\beta} + \bar{\alpha} \cdot \beta)z^3 \\ &\quad + (\alpha \cdot \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \cdot \gamma + \beta \cdot \bar{\beta})z^2 + (\beta \cdot \bar{\gamma} + \bar{\beta} \cdot \gamma)z + \gamma \cdot \bar{\gamma} \end{aligned}$$

En complexe vergelijkingen?

De complexe formulering volgt uit de reële.

Zeg $p(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$.

Schrijf $\bar{p}(z) = z^3 + \bar{\alpha}z^2 + \bar{\beta}z + \bar{\gamma}$ en maak hiermee

$$\begin{aligned} q(z) &= p(z) \cdot \bar{p}(z) \\ &= z^6 + (\alpha + \bar{\alpha})z^5 + (\beta + \bar{\beta} + \alpha \cdot \bar{\alpha})z^4 + (\gamma + \bar{\gamma} + \alpha \cdot \bar{\beta} + \bar{\alpha} \cdot \beta)z^3 \\ &\quad + (\alpha \cdot \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \cdot \gamma + \beta \cdot \bar{\beta})z^2 + (\beta \cdot \bar{\gamma} + \bar{\beta} \cdot \gamma)z + \gamma \cdot \bar{\gamma} \end{aligned}$$

Dan is $q(z)$ een reëel polynoom.

En complexe vergelijkingen?

De complexe formulering volgt uit de reële.

Zeg $p(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$.

Schrijf $\bar{p}(z) = z^3 + \bar{\alpha}z^2 + \bar{\beta}z + \bar{\gamma}$ en maak hiermee

$$\begin{aligned} q(z) &= p(z) \cdot \bar{p}(z) \\ &= z^6 + (\alpha + \bar{\alpha})z^5 + (\beta + \bar{\beta} + \alpha \cdot \bar{\alpha})z^4 + (\gamma + \bar{\gamma} + \alpha \cdot \bar{\beta} + \bar{\alpha} \cdot \beta)z^3 \\ &\quad + (\alpha \cdot \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \cdot \gamma + \beta \cdot \bar{\beta})z^2 + (\beta \cdot \bar{\gamma} + \bar{\beta} \cdot \gamma)z + \gamma \cdot \bar{\gamma} \end{aligned}$$

Dan is $q(z)$ een reëel polynoom.

Als nu $q(\zeta) = 0$ dan geldt $p(\zeta) = 0$

En complexe vergelijkingen?

De complexe formulering volgt uit de reële.

Zeg $p(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$.

Schrijf $\bar{p}(z) = z^3 + \bar{\alpha}z^2 + \bar{\beta}z + \bar{\gamma}$ en maak hiermee

$$\begin{aligned} q(z) &= p(z) \cdot \bar{p}(z) \\ &= z^6 + (\alpha + \bar{\alpha})z^5 + (\beta + \bar{\beta} + \alpha \cdot \bar{\alpha})z^4 + (\gamma + \bar{\gamma} + \alpha \cdot \bar{\beta} + \bar{\alpha} \cdot \beta)z^3 \\ &\quad + (\alpha \cdot \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \cdot \gamma + \beta \cdot \bar{\beta})z^2 + (\beta \cdot \bar{\gamma} + \bar{\beta} \cdot \gamma)z + \gamma \cdot \bar{\gamma} \end{aligned}$$

Dan is $q(z)$ een reëel polynoom.

Als nu $q(\zeta) = 0$ dan geldt $p(\zeta) = 0$ of $\bar{p}(\zeta) = 0$

En complexe vergelijkingen?

De complexe formulering volgt uit de reële.

Zeg $p(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$.

Schrijf $\bar{p}(z) = z^3 + \bar{\alpha}z^2 + \bar{\beta}z + \bar{\gamma}$ en maak hiermee

$$\begin{aligned} q(z) &= p(z) \cdot \bar{p}(z) \\ &= z^6 + (\alpha + \bar{\alpha})z^5 + (\beta + \bar{\beta} + \alpha \cdot \bar{\alpha})z^4 + (\gamma + \bar{\gamma} + \alpha \cdot \bar{\beta} + \bar{\alpha} \cdot \beta)z^3 \\ &\quad + (\alpha \cdot \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \cdot \gamma + \beta \cdot \bar{\beta})z^2 + (\beta \cdot \bar{\gamma} + \bar{\beta} \cdot \gamma)z + \gamma \cdot \bar{\gamma} \end{aligned}$$

Dan is $q(z)$ een reëel polynoom.

Als nu $q(\zeta) = 0$ dan geldt $p(\zeta) = 0$ (klaar!) of $\bar{p}(\zeta) = 0$

En complexe vergelijkingen?

De complexe formulering volgt uit de reële.

Zeg $p(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$.

Schrijf $\bar{p}(z) = z^3 + \bar{\alpha}z^2 + \bar{\beta}z + \bar{\gamma}$ en maak hiermee

$$\begin{aligned} q(z) &= p(z) \cdot \bar{p}(z) \\ &= z^6 + (\alpha + \bar{\alpha})z^5 + (\beta + \bar{\beta} + \alpha \cdot \bar{\alpha})z^4 + (\gamma + \bar{\gamma} + \alpha \cdot \bar{\beta} + \bar{\alpha} \cdot \beta)z^3 \\ &\quad + (\alpha \cdot \bar{\gamma} + \bar{\alpha} \cdot \gamma + \beta \cdot \bar{\beta})z^2 + (\beta \cdot \bar{\gamma} + \bar{\beta} \cdot \gamma)z + \gamma \cdot \bar{\gamma} \end{aligned}$$

Dan is $q(z)$ een reëel polynoom.

Als nu $q(\zeta) = 0$ dan geldt $p(\zeta) = 0$ (klaar!) of $\bar{p}(\zeta) = 0$ (ook klaar: $p(\bar{\zeta}) = 0$!).

Outline

Formulering/Geschiedenis
d'Alembert

Gauss/Ostrovski

Argand

Leeswerk

Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783)

Deze gaf in 1746 een bewijs van de reële versie, in een artikel over het primitiveren van rationale en algebraïsche functies: *Recherches sur le calcul intégral*.

Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783)

Deze gaf in 1746 een bewijs van de reële versie, in een artikel over het primitiveren van rationale en algebraïsche functies: *Recherches sur le calcul intégral*.

Eerst iets opbiechten

Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783)

Deze gaf in 1746 een bewijs van de reële versie, in een artikel over het primitiveren van rationale en algebraïsche functies: *Recherches sur le calcul intégral*.

Eerst iets opbiechten: het bewijs verloopt **niet** zoals geschetst in de samenvatting.

Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783)

Deze gaf in 1746 een bewijs van de reële versie, in een artikel over het primitiveren van rationale en algebraïsche functies: *Recherches sur le calcul intégral*.

Eerst iets opbiechten: het bewijs verloopt **niet** zoals geschetst in de samenvatting.

Die 'kennis' kwam uit de tweede hand.

Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783)

Deze gaf in 1746 een bewijs van de reële versie, in een artikel over het primitiveren van rationale en algebraïsche functies: *Recherches sur le calcul intégral*.

Eerst iets opbiechten: het bewijs verloopt **niet** zoals geschetst in de samenvatting.

Die 'kennis' kwam uit de tweede hand.

Wijze les: lees altijd de originele bron.

Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783)

Deze gaf in 1746 een bewijs van de reële versie, in een artikel over het primitiveren van rationale en algebraïsche functies: *Recherches sur le calcul intégral*.

Eerst iets opbiechten: het bewijs verloopt **niet** zoals geschetst in de samenvatting.

Die 'kennis' kwam uit de tweede hand.

Wijze les: lees altijd de originele bron.

Het bewijs maakte impliciet gebruik van een gevolg van de Hoofdstelling dat pas in 1851 door Puisseux werd bewezen.

Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783)

Deze gaf in 1746 een bewijs van de reële versie, in een artikel over het primitiveren van rationale en algebraïsche functies: *Recherches sur le calcul intégral*.

Eerst iets opbiechten: het bewijs verloopt **niet** zoals geschetst in de samenvatting.

Die 'kennis' kwam uit de tweede hand.

Wijze les: lees altijd de originele bron.

Het bewijs maakte impliciet gebruik van een gevolg van de Hoofdstelling dat pas in 1851 door Puisieux werd bewezen.

Maar zelfs dan valt er nog wel wat op het bewijs af te dingen.

Outline

Formulering/Geschiedenis
d'Alembert

Gauss/Ostrovski

Argand

Leeswerk

Gauss en de hoofdstelling

Carl Friedrich Gauss promoveerde in 1799 *in absentia* in Helmstedt bij Pfaff op een proefschrift met daarin een bewijs van de Hoofdstelling

Gauss en de hoofdstelling

Carl Friedrich Gauss promoveerde in 1799 *in absentia* in Helmstedt bij Pfaff op een proefschrift met daarin een bewijs van de Hoofdstelling: *Demonstratio nova theorematibus omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. (Nieuw bewijs van de stelling dat elke algebraïsche, rationale, gehele functie van één veranderlijke in reële factoren van de eerste en tweede graad ontbonden kan worden.)

Gauss en de hoofdstelling

Carl Friedrich Gauss promoveerde in 1799 *in absentia* in Helmstedt bij Pfaff op een proefschrift met daarin een bewijs van de Hoofdstelling: *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. (Nieuw bewijs van de stelling dat elke algebraïsche, rationale, gehele functie van één veranderlijke in reële factoren van de eerste en tweede graad ontbonden kan worden.)

Daarin besprak hij eerst eerdere bewijzen van deze stelling en bekritiseerde deze stevig; geen enkel bewijs kon uiteindelijk door de beugel.

Gauss en de hoofdstelling

Carl Friedrich Gauss promoveerde in 1799 *in absentia* in Helmstedt bij Pfaff op een proefschrift met daarin een bewijs van de Hoofdstelling: *Demonstratio nova theorematum omnium functionum algebraicarum rationalium integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. (Nieuw bewijs van de stelling dat elke algebraïsche, rationale, gehele functie van één veranderlijke in reële factoren van de eerste en tweede graad ontbonden kan worden.)

Daarin besprak hij eerst eerdere bewijzen van deze stelling en bekritiseerde deze stevig; geen enkel bewijs kon uiteindelijk door de beugel.

In het tweede deel presenteerde hij zijn eigen bewijs.

Het bewijs, wat gemoderniseerd

Gauss bekeek

$$X = z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \text{etc} + Kzz + Lz + M$$

Het bewijs, wat gemoderniseerd

Gauss bekeek

$$X = z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \text{etc} + Kzz + Lz + M$$

(heel lang bleef het zz in plaats van z^2).

Het bewijs, wat gemoderniseerd

Gauss bekeek

$$X = z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \text{etc} + Kzz + Lz + M$$

(heel lang bleef het zz in plaats van z^2).

Door $z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ in te vullen kunnen we de reële en imaginaire delen schrijven als

Het bewijs, wat gemoderniseerd

Gauss bekeek

$$X = z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \text{etc} + Kzz + Lz + M$$

(heel lang bleef het zz in plaats van z^2).

Door $z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ in te vullen kunnen we de reële en imaginaire delen schrijven als

$$U = r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \text{etc} + Lr \cos \varphi + M$$

Het bewijs, wat gemoderniseerd

Gauss bekeek

$$X = z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \text{etc} + Kzz + Lz + M$$

(heel lang bleef het zz in plaats van z^2).

Door $z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ in te vullen kunnen we de reële en imaginaire delen schrijven als

$$U = r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \text{etc} + Lr \cos \varphi + M$$

en

$$T = r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1} \sin(m-1)\varphi + \text{etc} + Lr \sin \varphi$$

Het bewijs, wat gemoderniseerd

Gauss bekeek

$$X = z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \text{etc} + Kzz + Lz + M$$

(heel lang bleef het zz in plaats van z^2).

Door $z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ in te vullen kunnen we de reële en imaginaire delen schrijven als

$$U = r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \text{etc} + Lr \cos \varphi + M$$

en

$$T = r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1} \sin(m-1)\varphi + \text{etc} + Lr \sin \varphi$$

We laten zien dat $X = 0$ een oplossing heeft door te laten zien dat het stelsel $\{U = 0, T = 0\}$ een oplossing heeft.

Het bewijs

We bekijken het voorbeeld dat Gauss gebruikte voor een paar plaatjes:

$$X = z^4 - 2z^2 + 3z + 10$$

Het bewijs

We bekijken het voorbeeld dat Gauss gebruikte voor een paar plaatjes:

$$X = z^4 - 2z^2 + 3z + 10$$

dus met

$$U = r^4 \cos 4\varphi - 2r^2 \cos 2\varphi + 3r \cos \varphi + 10$$

Het bewijs

We bekijken het voorbeeld dat Gauss gebruikte voor een paar plaatjes:

$$X = z^4 - 2z^2 + 3z + 10$$

dus met

$$U = r^4 \cos 4\varphi - 2r^2 \cos 2\varphi + 3r \cos \varphi + 10$$

en

$$T = r^4 \sin 4\varphi - 2r^2 \sin 2\varphi + 3r \sin \varphi$$

Het bewijs

We bekijken het voorbeeld dat Gauss gebruikte voor een paar plaatjes:

$$X = z^4 - 2z^2 + 3z + 10$$

dus met

$$U = r^4 \cos 4\varphi - 2r^2 \cos 2\varphi + 3r \cos \varphi + 10$$

en

$$T = r^4 \sin 4\varphi - 2r^2 \sin 2\varphi + 3r \sin \varphi$$

We bekijken de ligging van de krommen gegeven door $U = 0$ en $T = 0$.

Het bewijs, stap 1

We snijden de krommen met cirkels om 0 met grote straal.

Het bewijs, stap 1

We snijden de krommen met cirkels om 0 met grote straal.

In dat geval kunnen we de vergelijkingen door r delen en houden we

$$\cos 4\varphi - 2r^{-2}2 \cos 2\varphi + 3r^{-3} \cos \varphi + 10r^{-4} = 0$$

Het bewijs, stap 1

We snijden de krommen met cirkels om 0 met grote straal.

In dat geval kunnen we de vergelijkingen door r delen en houden we

$$\cos 4\varphi - 2r^{-2}2 \cos 2\varphi + 3r^{-3} \cos \varphi + 10r^{-4} = 0$$

en

$$\sin 4\varphi - 2r^{-2} \sin 2\varphi + 3r^{-3} \sin \varphi = 0$$

over.

Het bewijs, stap 1

We snijden de krommen met cirkels om 0 met grote straal.

In dat geval kunnen we de vergelijkingen door r delen en houden we

$$\cos 4\varphi - 2r^{-2}2 \cos 2\varphi + 3r^{-3} \cos \varphi + 10r^{-4} = 0$$

en

$$\sin 4\varphi - 2r^{-2} \sin 2\varphi + 3r^{-3} \sin \varphi = 0$$

over.

Neem de straal oneindig groot, dan krijgen we

$$\cos 4\varphi = 0 \text{ en } \sin 4\varphi = 0$$

Het bewijs, stap 1

We snijden de krommen met cirkels om 0 met grote straal.

In dat geval kunnen we de vergelijkingen door r delen en houden we

$$\cos 4\varphi - 2r^{-2}2 \cos 2\varphi + 3r^{-3} \cos \varphi + 10r^{-4} = 0$$

en

$$\sin 4\varphi - 2r^{-2} \sin 2\varphi + 3r^{-3} \sin \varphi = 0$$

over.

Neem de straal oneindig groot, dan krijgen we

$$\cos 4\varphi = 0 \text{ en } \sin 4\varphi = 0$$

NB Dit zijn aparte vergelijkingen.

Het bewijs, stap 1

De kromme gegeven door $U = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\cos 4\varphi = 0$

Het bewijs, stap 1

De kromme gegeven door $U = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\cos 4\varphi = 0$, dat zijn dus $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \dots, \frac{15\pi}{8}$.

Het bewijs, stap 1

De kromme gegeven door $U = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\cos 4\varphi = 0$, dat zijn dus $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \dots, \frac{15\pi}{8}$.

De kromme gegeven door $T = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\sin 4\varphi = 0$

Het bewijs, stap 1

De kromme gegeven door $U = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\cos 4\varphi = 0$, dat zijn dus $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \dots, \frac{15\pi}{8}$.

De kromme gegeven door $T = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\sin 4\varphi = 0$, dat zijn dus $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{7\pi}{4}$.

Het bewijs, stap 1

De kromme gegeven door $U = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\cos 4\varphi = 0$, dat zijn dus $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \dots, \frac{15\pi}{8}$.

De kromme gegeven door $T = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\sin 4\varphi = 0$, dat zijn dus $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{7\pi}{4}$.

Belangrijke opmerking: die snijpunten liggen om en om

Het bewijs, stap 1

De kromme gegeven door $U = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\cos 4\varphi = 0$, dat zijn dus $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \dots, \frac{15\pi}{8}$.

De kromme gegeven door $T = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\sin 4\varphi = 0$, dat zijn dus $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{7\pi}{4}$.

Belangrijke opmerking: die snijpunten liggen om en om, tussen elk tweetal snijpunten met $U = 0$ ligt een snijpunt met $T = 0$ en omgekeerd.

Het bewijs, stap 1

De kromme gegeven door $U = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\cos 4\varphi = 0$, dat zijn dus $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \dots, \frac{15\pi}{8}$.

De kromme gegeven door $T = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\sin 4\varphi = 0$, dat zijn dus $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{7\pi}{4}$.

Belangrijke opmerking: die snijpunten liggen om en om, tussen elk tweetal snijpunten met $U = 0$ ligt een snijpunt met $T = 0$ en omgekeerd.

Gauss bewees vervolgens dat dit om-en-omgedrag zich ook voordoet als de straal R van de cirkel groot genoeg is.

Het bewijs, stap 1

De kromme gegeven door $U = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\cos 4\varphi = 0$, dat zijn dus $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \dots, \frac{15\pi}{8}$.

De kromme gegeven door $T = 0$ snijdt de cirkel met straal oneindig in acht punten, die horen bij de oplossingen van $\sin 4\varphi = 0$, dat zijn dus $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{7\pi}{4}$.

Belangrijke opmerking: die snijpunten liggen om en om, tussen elk tweetal snijpunten met $U = 0$ ligt een snijpunt met $T = 0$ en omgekeerd.

Gauss bewees vervolgens dat dit om-en-omgedrag zich ook voordoet als de straal R van de cirkel groot genoeg is.

Opgave

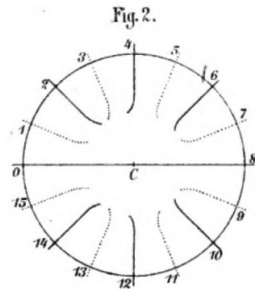
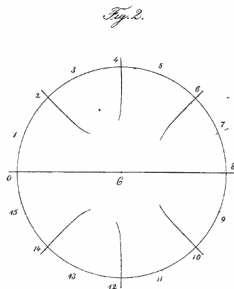
Ga na dat dit voor ons voorbeeld al geldt als $R \geq 15$.

Het bewijs, stap 1

Hier zijn twee plaatjes (van Gauss) die dit illustreren:

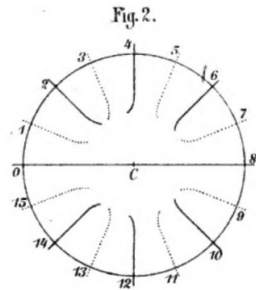
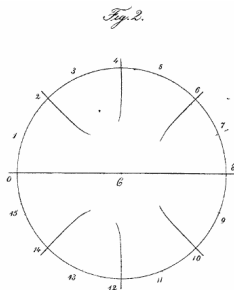
Het bewijs, stap 1

Hier zijn twee plaatjes (van Gauss) die dit illustreren:



Het bewijs, stap 1

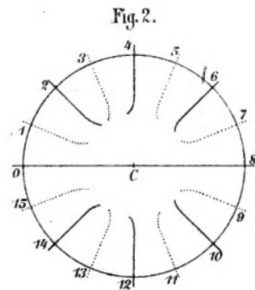
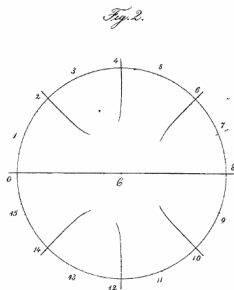
Hier zijn twee plaatjes (van Gauss) die dit illustreren:



Links uit de Verzamelde Werken (Band III)

Het bewijs, stap 1

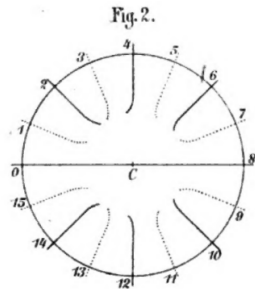
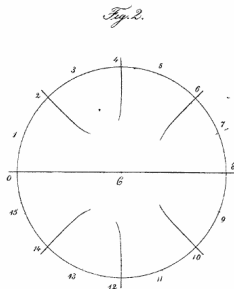
Hier zijn twee plaatjes (van Gauss) die dit illustreren:



Links uit de Verzamelde Werken (Band III); rechts uit een heruitgave (in het Duits) van de vier bewijzen die Gauss van de hoofdstelling gegeven heeft.

Het bewijs, stap 1

Hier zijn twee plaatjes (van Gauss) die dit illustreren:

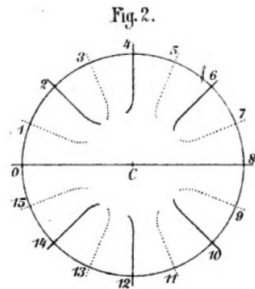
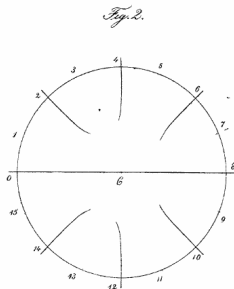


Links uit de Verzamelde Werken (Band III); rechts uit een heruitgave (in het Duits) van de vier bewijzen die Gauss van de hoofdstelling gegeven heeft.

In de tekst (Latijn en Duits) staat dat $U = 0$ gestippeld getekend is en $T = 0$ doorgetrokken.

Het bewijs, stap 1

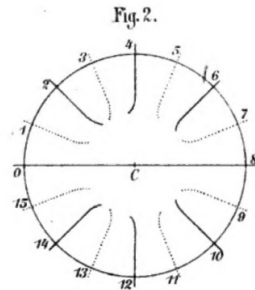
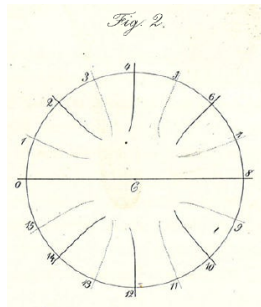
Hier zijn twee plaatjes (van Gauss) die dit illustreren:



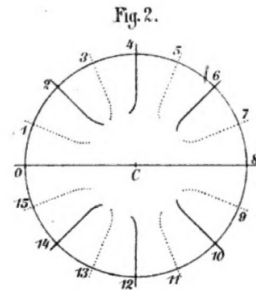
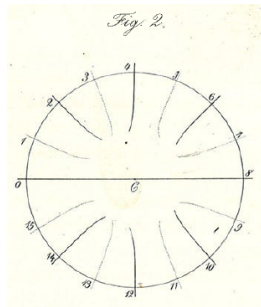
Links uit de Verzamelde Werken (Band III); rechts uit een heruitgave (in het Duits) van de vier bewijzen die Gauss van de hoofdstelling gegeven heeft.

In de tekst (Latijn en Duits) staat dat $U = 0$ gestippeld getekend is en $T = 0$ doorgetrokken. Dat is in de verzamelde werken dus niet helemaal gelukt.

Het bewijs, de plaatjes

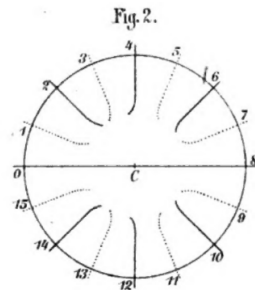
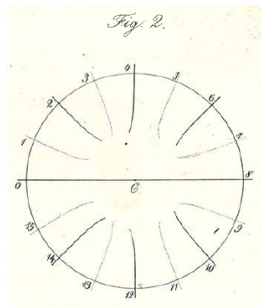


Het bewijs, de plaatjes



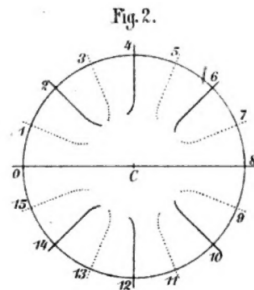
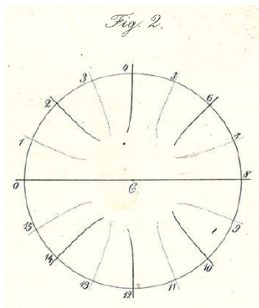
Merk op

Het bewijs, de plaatjes



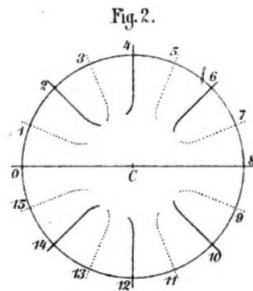
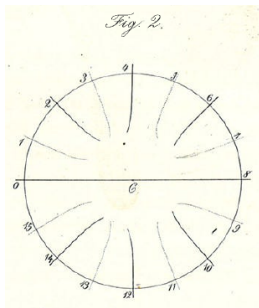
Merk op: de positieve x-as wijst naar links, zie de 0

Het bewijs, de plaatjes



Merk op: de positieve x-as wijst naar links, zie de 0; en Gauss laat φ met de klok mee groeien.

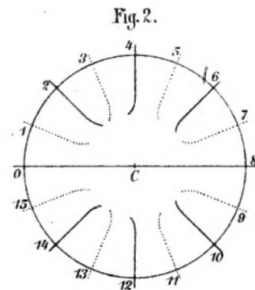
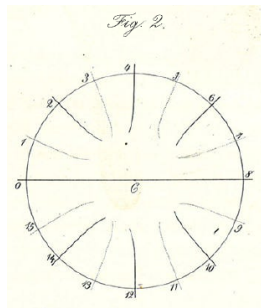
Het bewijs, de plaatjes



Merk op: de positieve x -as wijst naar links, zie de 0; en Gauss laat φ met de klok mee groeien.

De x -as hoort bij de grafiek van $T = 0$ ($\varphi = 0$ en $\varphi = \pi$).

Het bewijs, de plaatjes

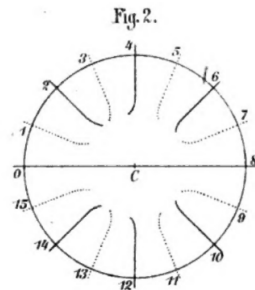
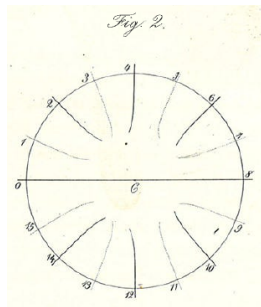


Merk op: de positieve x -as wijst naar links, zie de 0; en Gauss laat φ met de klok mee groeien.

De x -as hoort bij de grafiek van $T = 0$ ($\varphi = 0$ en $\varphi = \pi$).

De punten met oneven nummer liggen op $U = 0$

Het bewijs, de plaatjes



Merk op: de positieve x -as wijst naar links, zie de 0; en Gauss laat φ met de klok mee groeien.

De x -as hoort bij de grafiek van $T = 0$ ($\varphi = 0$ en $\varphi = \pi$).

De punten met oneven nummer liggen op $U = 0$, en de punten met even nummer liggen op $T = 0$.

Het bewijs, stap 2

Wat we zien is dat de krommen bepaald door $U = 0$ en $T = 0$ uit losse stukken (Gauss noemt ze takken) bestaan.

Het bewijs, stap 2

Wat we zien is dat de krommen bepaald door $U = 0$ en $T = 0$ uit losse stukken (Gauss noemt ze takken) bestaan.

Gauss: uit de hogere meetkunde is bekend dat een tak van een algebraïsche kromme die een cirkel binnenkomt deze ook weer moet verlaten.

Het bewijs, stap 2

Wat we zien is dat de krommen bepaald door $U = 0$ en $T = 0$ uit losse stukken (Gauss noemt ze takken) bestaan.

Gauss: uit de hogere meetkunde is bekend dat een tak van een algebraïsche kromme die een cirkel binnenkomt deze ook weer moet verlaten.

Dit heeft tot gevolg dat elk oneven nummer door een tak van $U = 0$ met een oneven nummer verbonden is.

Het bewijs, stap 2

Wat we zien is dat de krommen bepaald door $U = 0$ en $T = 0$ uit losse stukken (Gauss noemt ze takken) bestaan.

Gauss: uit de hogere meetkunde is bekend dat een tak van een algebraïsche kromme die een cirkel binnenkomt deze ook weer moet verlaten.

Dit heeft tot gevolg dat elk oneven nummer door een tak van $U = 0$ met een oneven nummer verbonden is.

Evenzo is elk even nummer door een tak van $T = 0$ met een ander even nummer verbonden.

Het bewijs, stap 2

Wat we zien is dat de krommen bepaald door $U = 0$ en $T = 0$ uit losse stukken (Gauss noemt ze takken) bestaan.

Gauss: uit de hogere meetkunde is bekend dat een tak van een algebraïsche kromme die een cirkel binnenkomt deze ook weer moet verlaten.

Dit heeft tot gevolg dat elk oneven nummer door een tak van $U = 0$ met een oneven nummer verbonden is.

Evenzo is elk even nummer door een tak van $T = 0$ met een ander even nummer verbonden.

Eén verbinding is zeker: 0 is met 8 verbonden door de x -as.

Het bewijs, stap 3

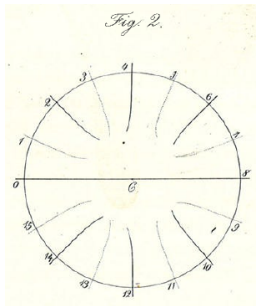
Nu rest nog te bewijzen dat er takken van respectievelijk $U = 0$ en $T = 0$ zijn die elkaar snijden.

Het bewijs, stap 3

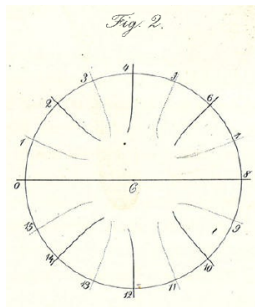
Nu rest nog te bewijzen dat er takken van respectievelijk $U = 0$ en $T = 0$ zijn die elkaar snijden.

Gauss: uit het ongerijmde, stel de takken snijden elkaar niet.

Het bewijs, stap 3



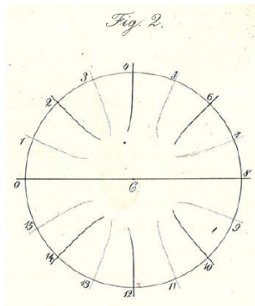
Het bewijs, stap 3



Opgave

Beredeneer, uitgaande van de veronderstelling, dat als in ons voorbeeld 1 met k verbonden is en 2 met l dat dan $l < k < 8$.

Het bewijs, stap 3

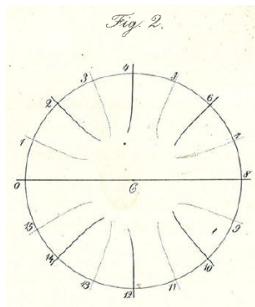


Opgave

Beredeneer, uitgaande van de veronderstelling, dat als in ons voorbeeld 1 met k verbonden is en 2 met l dat dan $l < k < 8$.

Leid hieruit af dat 1 met 3 verbonden is

Het bewijs, stap 3

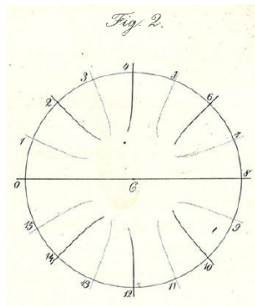


Opgave

Beredeneer, uitgaande van de veronderstelling, dat als in ons voorbeeld 1 met k verbonden is en 2 met l dat dan $l < k < 8$.

Leid hieruit af dat 1 met 3 verbonden is, of 2 met 4

Het bewijs, stap 3

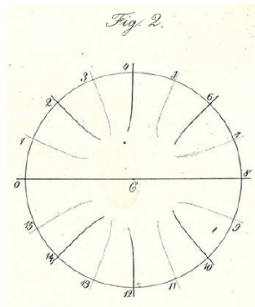


Opgave

Beredeneer, uitgaande van de veronderstelling, dat als in ons voorbeeld 1 met k verbonden is en 2 met l dat dan $l < k < 8$.

Leid hieruit af dat 1 met 3 verbonden is, of 2 met 4, of 3 met 5.

Het bewijs, stap 3



Opgave

Beredeneer, uitgaande van de veronderstelling, dat als in ons voorbeeld 1 met k verbonden is en 2 met l dat dan $l < k < 8$.

Leid hieruit af dat 1 met 3 verbonden is, of 2 met 4, of 3 met 5.

Alle gevallen leiden tot een tegenspraak.

De krommen

Hier zijn de krommen $U = 0$ en $T = 0$ zoals, waarschijnlijk, geschetst door Gauss.

De krommen

Hier zijn de krommen $U = 0$ en $T = 0$ zoals, waarschijnlijk, geschetst door Gauss.

Fig. 4.

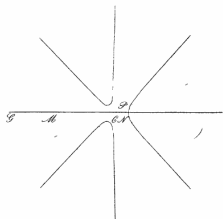
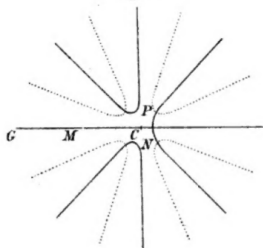
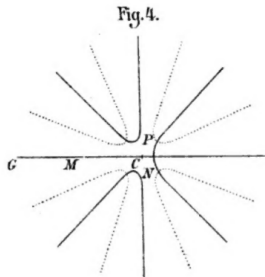
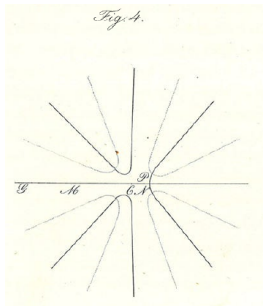


Fig. 4.



De krommen

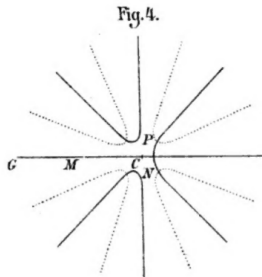
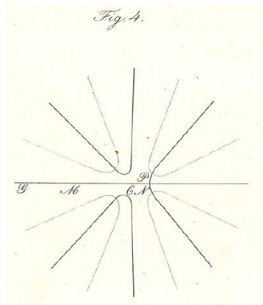
Hier zijn de krommen $U = 0$ en $T = 0$ zoals, waarschijnlijk, geschetst door Gauss.



NB Dit is dus gespiegeld ten opzichte van onze versie.

De krommen

Hier zijn de krommen $U = 0$ en $T = 0$ zoals, waarschijnlijk, geschetst door Gauss.



NB Dit is dus gespiegeld ten opzichte van onze versie.

De plaatjes laten duidelijk zien dat de gegeven vierdegraadsvergelijking inderdaad vier complexe oplossingen heeft.

Deugt het bewijs?

In 1920 schreef Ostrovski een artikel *Über den ersten und vierten Gaussischen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra* en begon dit met het volgende

Deugt het bewijs?

In 1920 schreef Ostrovski een artikel *Über den ersten und vierten Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra* en begon dit met het volgende:

Während die im ersten Teil der GAUSS'schen *Dissertation* (1799, Werke III, S. 1) enthaltene Besprechung der früheren Beweisversuche des Fundamentalsatzes der Algebra sich durch ganz ausserordentliche Sorgfalt auszeichnet, fällt daneben der im zweiten Teil entwickelte Beweis dieses Satzes etwas ab. Nicht etwa, weil dieser Beweis in geometrischer Einkleidung vorgetragen wird, sondern, weil bei ihm Eigenschaften der algebraischen Kurven verwendet werden, die weder in der *Dissertation* selbst, noch in der vorgauss'schen Literatur bewiesen sind.

Deugt het bewijs?

In 1920 schreef Ostrovski een artikel *Über den ersten und vierten Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra* en begon dit met het volgende:

Während die im ersten Teil der GAUSS'schen *Dissertation* (1799, Werke III, S. 1) enthaltene Besprechung der früheren Beweisversuche des Fundamentalsatzes der Algebra sich durch ganz ausserordentliche Sorgfalt auszeichnet, fällt daneben der im zweiten Teil entwickelte Beweis dieses Satzes etwas ab. Nicht etwa, weil dieser Beweis in geometrischer Einkleidung vorgetragen wird, sondern, weil bei ihm Eigenschaften der algebraischen Kurven verwendet werden, die weder in der *Dissertation* selbst, noch in der vorgauss'schen Literatur bewiesen sind.

Gauss was dus heel zorgvuldig bij het bespreken/bekritiseren van eerdere bewijzen maar die zorgvuldigheid valt in zijn eigen bewijs tegen:

Deugt het bewijs?

In 1920 schreef Ostrovski een artikel *Über den ersten und vierten Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra* en begon dit met het volgende:

Während die im ersten Teil der GAUSS'schen *Dissertation* (1799, Werke III, S. 1) enthaltene Besprechung der früheren Beweisversuche des Fundamentalsatzes der Algebra sich durch ganz ausserordentliche Sorgfalt auszeichnet, fällt daneben der im zweiten Teil entwickelte Beweis dieses Satzes etwas ab. Nicht etwa, weil dieser Beweis in geometrischer Einkleidung vorgetragen wird, sondern, weil bei ihm Eigenschaften der algebraischen Kurven verwendet werden, die weder in der *Dissertation* selbst, noch in der vorgauss'schen Literatur bewiesen sind.

Gauss was dus heel zorgvuldig bij het bespreken/bekritisieren van eerdere bewijzen maar die zorgvuldigheid valt in zijn eigen bewijs tegen: hij gebruikte stellingen die noch door hemzelf noch door voorgangers bewezen waren.

Deugt het bewijs?

Het gaat om de bewering dat een tak die een begrensd gebied ingaat ook weer uitgaat.

Deugt het bewijs?

Het gaat om de bewering dat een tak die een begrensd gebied ingaat ook weer uitgaat.

Gauss schreef zelf:

“... voorzover ik weet heeft niemand dit ooit in twijfel getrokken. Toch zal ik, als iemand dat eist, bij andere gelegenheid een boven alle twijfel verheven bewijs leveren”.

Deugt het bewijs?

Het gaat om de bewering dat een tak die een begrensd gebied ingaat ook weer uitgaat.

Gauss schreef zelf:

“... voorzover ik weet heeft niemand dit ooit in twijfel getrokken. Toch zal ik, als iemand dat eist, bij andere gelegenheid een boven alle twijfel verheven bewijs leveren”.

Het kostte Ostrovski zo'n tien bladzijden zo'n bewijs te geven, met gebruik van analytische begrippen die pas veel later na het werk van Gauss ontwikkeld werden.

Deugt het bewijs?

Het gaat om de bewering dat een tak die een begrensd gebied ingaat ook weer uitgaat.

Gauss schreef zelf:

“... voorzover ik weet heeft niemand dit ooit in twijfel getrokken. Toch zal ik, als iemand dat eist, bij andere gelegenheid een boven alle twijfel verheven bewijs leveren”.

Het kostte Ostrovski zo'n tien bladzijden zo'n bewijs te geven, met gebruik van analytische begrippen die pas veel later na het werk van Gauss ontwikkeld werden.

Bewijzen als dit van Gauss zetten Bolzano aan tot een bewijs van de Tussenwaardstelling in *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.*

Deugt het bewijs?

Het gaat om de bewering dat een tak die een begrensde gebied ingaat ook weer uitgaat.

Gauss schreef zelf:

“... voorzover ik weet heeft niemand dit ooit in twijfel getrokken. Toch zal ik, als iemand dat eist, bij andere gelegenheid een boven alle twijfel verheven bewijs leveren”.

Het kostte Ostrovski zo'n tien bladzijden zo'n bewijs te geven, met gebruik van analytische begrippen die pas veel later na het werk van Gauss ontwikkeld werden.

Bewijzen als dit van Gauss zetten Bolzano aan tot een bewijs van de Tussenwaardstelling in *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*.

Net als Gauss begon hij met bewijzen van, onder andere, de hoofdstelling te bekritisieren omdat die neerkwamen op “het is meetkundig duidelijk dat ...”.

Outline

Formulering/Geschiedenis
d'Alembert

Gauss/Ostrovski

Argand

Leeswerk

Jean-Robert Argand (1768–1822)

Argand gaf in 1814/15 een bewijs van de complexe versie in *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse*.

Jean-Robert Argand (1768–1822)

Argand gaf in 1814/15 een bewijs van de complexe versie in *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse*.

Hij gaf eerst een korte samenvatting van hoe in het platte vlak een optelling en vermenigvuldiging te definiëren

Jean-Robert Argand (1768–1822)

Argand gaf in 1814/15 een bewijs van de complexe versie in *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse*.

Hij gaf eerst een korte samenvatting van hoe in het platte vlak een optelling en vermenigvuldiging te definiëren; dat had hij eerder al uitgebreid gedaan in *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques*

Jean-Robert Argand (1768–1822)

Argand gaf in 1814/15 een bewijs van de complexe versie in *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse*.

Hij gaf eerst een korte samenvatting van hoe in het platte vlak een optelling en vermenigvuldiging te definiëren; dat had hij eerder al uitgebreid gedaan in *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques*

Daarna volgde het bewijs, met aan het eind

Jean-Robert Argand (1768–1822)

Argand gaf in 1814/15 een bewijs van de complexe versie in *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse*.

Hij gaf eerst een korte samenvatting van hoe in het platte vlak een optelling en vermenigvuldiging te definiëren; dat had hij eerder al uitgebreid gedaan in *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques*

Daarna volgde het bewijs, met aan het eind:

J'

Jean-Robert Argand (1768–1822)

Argand gaf in 1814/15 een bewijs van de complexe versie in *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse*.

Hij gaf eerst een korte samenvatting van hoe in het platte vlak een optelling en vermenigvuldiging te definiëren; dat had hij eerder al uitgebreid gedaan in *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques*

Daarna volgde het bewijs, met aan het eind:

J'inviterai le lecteur à tracer une figure, pour suivre cette démonstration. En y appliquant les principes fondamentaux très-simples, rappelés ci-dessus, on verra qu'à l'exception du développement (A), qui suppose un calcul algébrique, tous les autres raisonnemens se font, pour ainsi dire, à vue, sans avoir besoin d'aucun effort d'attention.

Laten we dat dan maar vanaf het begin doen.

Een meetkundige aanpak

We hebben (in de notatie van Argand, iets gemoderniseerd)

$$p(z) = z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \cdots + fz + g$$

Een meetkundige aanpak

We hebben (in de notatie van Argand, iets gemoderniseerd)

$$p(z) = z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \dots + fz + g$$

(kennelijk is 8 willekeurig genoeg).

Een meetkundige aanpak

We hebben (in de notatie van Argand, iets gemoderniseerd)

$$p(z) = z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \dots + fz + g$$

(kennelijk is 8 willekeurig genoeg).

Als we de rekenkunde in het platte vlak volgen stelt, voor elke z , de waarde $p(z)$ een lijnstuk $\overline{KP}$ voor.

Een meetkundige aanpak

We hebben (in de notatie van Argand, iets gemoderniseerd)

$$p(z) = z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \dots + fz + g$$

(kennelijk is 8 willekeurig genoeg).

Als we de rekenkunde in het platte vlak volgen stelt, voor elke z , de waarde $p(z)$ een lijnstuk $\overline{KP}$ voor.

We moeten dus laten zien dat z zó bepaald kan worden dat K en P samenvallen.

Een meetkundige aanpak

We hebben (in de notatie van Argand, iets gemoderniseerd)

$$p(z) = z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \dots + fz + g$$

(kennelijk is 8 willekeurig genoeg).

Als we de rekenkunde in het platte vlak volgen stelt, voor elke z , de waarde $p(z)$ een lijnstuk $\overline{KP}$ voor.

We moeten dus laten zien dat z zó bepaald kan worden dat K en P samenvallen.

Als dit niet mogelijk is dan is de lengte KP van $\overline{KP}$ altijd ongelijk aan 0.

Een meetkundige aanpak

We hebben (in de notatie van Argand, iets gemoderniseerd)

$$p(z) = z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \dots + fz + g$$

(kennelijk is 8 willekeurig genoeg).

Als we de rekenkunde in het platte vlak volgen stelt, voor elke z , de waarde $p(z)$ een lijnstuk $\overline{KP}$ voor.

We moeten dus laten zien dat z zó bepaald kan worden dat K en P samenvallen.

Als dit niet mogelijk is dan is de lengte KP van $\overline{KP}$ altijd ongelijk aan 0.

Onder al die lijnstukken is er één (of meer) waarvan de lengte minimaal is.

Een meetkundige aanpak

We hebben (in de notatie van Argand, iets gemoderniseerd)

$$p(z) = z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \dots + fz + g$$

(kennelijk is 8 willekeurig genoeg).

Als we de rekenkunde in het platte vlak volgen stelt, voor elke z , de waarde $p(z)$ een lijnstuk $\overline{KP}$ voor.

We moeten dus laten zien dat z zó bepaald kan worden dat K en P samenvallen.

Als dit niet mogelijk is dan is de lengte KP van $\overline{KP}$ altijd ongelijk aan 0.

Onder al die lijnstukken is er één (of meer) waarvan de lengte minimaal is.

Zeg ζ is zó dat $|p(\zeta)|$ minimaal is

Een meetkundige aanpak

We hebben (in de notatie van Argand, iets gemoderniseerd)

$$p(z) = z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \dots + fz + g$$

(kennelijk is 8 willekeurig genoeg).

Als we de rekenkunde in het platte vlak volgen stelt, voor elke z , de waarde $p(z)$ een lijnstuk $\overline{KP}$ voor.

We moeten dus laten zien dat z zó bepaald kan worden dat K en P samenvallen.

Als dit niet mogelijk is dan is de lengte KP van $\overline{KP}$ altijd ongelijk aan 0.

Onder al die lijnstukken is er één (of meer) waarvan de lengte minimaal is.

Zeg ζ is zó dat $|p(\zeta)|$ minimaal is, dus voor geen enkele z geldt $|p(\zeta + z)| < |p(\zeta)|$.

Een beetje algebra

Argand noemde een “developpement (A), qui suppose un calcul algébrique”.

Een beetje algebra

Argand noemde een “developpement (A), qui suppose un calcul algébrique”.
Dat is het herschrijven van $p(\zeta + z)$ in machten van z

Een beetje algebra

Argand noemde een “developpement (A), qui suppose un calcul algébrique”.

Dat is het herschrijven van $p(\zeta + z)$ in machten van z : schrijf $p(\zeta + z)$ helemaal uit en haal de machten van z buiten de haakjes.

Een beetje algebra

Argand noemde een “developpement (A), qui suppose un calcul algébrique”.

Dat is het herschrijven van $p(\zeta + z)$ in machten van z : schrijf $p(\zeta + z)$ helemaal uit en haal de machten van z buiten de haakjes.

Opgave

Doe dit met een zelfgekozen polynoom p en complex getal ζ .

(Hint: werk elke macht $(\zeta + z)^k$ uit volgens het binomium van Newton.)

Een beetje algebra

Argand noemde een “developpement (A), qui suppose un calcul algébrique”.

Dat is het herschrijven van $p(\zeta + z)$ in machten van z : schrijf $p(\zeta + z)$ helemaal uit en haal de machten van z buiten de haakjes.

Opgave

Doe dit met een zelfgekozen polynoom p en complex getal ζ .

(Hint: werk elke macht $(\zeta + z)^k$ uit volgens het binomium van Newton.)

Het resultaat

Een beetje algebra

Argand noemde een “developpement (A), qui suppose un calcul algébrique”.

Dat is het herschrijven van $p(\zeta + z)$ in machten van z : schrijf $p(\zeta + z)$ helemaal uit en haal de machten van z buiten de haakjes.

Opgave

Doe dit met een zelfgekozen polynoom p en complex getal ζ .

(Hint: werk elke macht $(\zeta + z)^k$ uit volgens het binomium van Newton.)

Het resultaat:

$$(A) \quad y_{(\zeta+z)} = y_{\zeta} + \{nz^{n-1} + (n-1)z^{n-2} + \dots + f\}i + \left\{\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} z^2 + \dots\right\}i^2 + \dots \\ \dots + (nz + a)i^{n-1} + i^n.$$

Een beetje algebra

Iets overzichtelijker

Een beetje algebra

Iets overzichtelijker:

$$p(\zeta + z) = p(\zeta) + p'(\zeta)z + \frac{1}{2}p''(\zeta)z^2 + \cdots + z^n$$

Een beetje algebra

Iets overzichtelijker:

$$p(\zeta + z) = p(\zeta) + p'(\zeta)z + \frac{1}{2}p''(\zeta)z^2 + \cdots + z^n$$

Argand schreef daarna alleen de termen ongelijk aan 0 op

Een beetje algebra

Iets overzichtelijker:

$$p(\zeta + z) = p(\zeta) + p'(\zeta)z + \frac{1}{2}p''(\zeta)z^2 + \cdots + z^n$$

Argand schreef daarna alleen de termen ongelijk aan 0 op:

$$p(\zeta + z) = p(\zeta) + Rz^r + Sz^s + \cdots + Vz^v + z^n$$

Een beetje algebra

Iets overzichtelijker:

$$p(\zeta + z) = p(\zeta) + p'(\zeta)z + \frac{1}{2}p''(\zeta)z^2 + \cdots + z^n$$

Argand schreef daarna alleen de termen ongelijk aan 0 op:

$$p(\zeta + z) = p(\zeta) + Rz^r + Sz^s + \cdots + Vz^v + z^n$$

In het meest extreme geval houden we dus $p(\zeta) + z^n$ over.

Weer meetkunde

Herinner: $\overline{KP} = p(\zeta)$.

Weer meetkunde

Herinner: $\overline{KP} = p(\zeta)$.

Argand voegde hieraan toe:

$$\overline{PA} = Rz^r, \overline{AB} = Sz^s, \dots, \overline{FG} = Vz^v, \overline{GH} = z^n$$

Weer meetkunde

Herinner: $\overline{KP} = p(\zeta)$.

Argand voegde hieraan toe:

$$\overline{PA} = Rz^r, \overline{AB} = Sz^s, \dots, \overline{FG} = Vz^v, \overline{GH} = z^n$$

en dus ook

$$KP = |p(\zeta)|, PA = |Rz^r|, AB = |Sz^s|, \dots, FG = |Vz^v|, GH = |z^n|$$

Weer meetkunde

Herinner: $\overline{KP} = p(\zeta)$.

Argand voegde hieraan toe:

$$\overline{PA} = Rz^r, \overline{AB} = Sz^s, \dots, \overline{FG} = Vz^v, \overline{GH} = z^n$$

en dus ook

$$KP = |p(\zeta)|, PA = |Rz^r|, AB = |Sz^s|, \dots, FG = |Vz^v|, GH = |z^n|$$

Dus $p(\zeta + z)$ wordt gerepresenteerd door het gebroken lijnstuk $\overline{KPAB \dots FGH}$

Weer meetkunde

Herinner: $\overline{KP} = p(\zeta)$.

Argand voegde hieraan toe:

$$\overline{PA} = Rz^r, \overline{AB} = Sz^s, \dots, \overline{FG} = Vz^v, \overline{GH} = z^n$$

en dus ook

$$KP = |p(\zeta)|, PA = |Rz^r|, AB = |Sz^s|, \dots, FG = |Vz^v|, GH = |z^n|$$

Dus $p(\zeta + z)$ wordt gerepresenteerd door het gebroken lijnstuk $\overline{KPAB \dots FGH}$, en dus ook door $\overline{KH}$.

Weer meetkunde

Herinner: $\overline{KP} = p(\zeta)$.

Argand voegde hieraan toe:

$$\overline{PA} = Rz^r, \overline{AB} = Sz^s, \dots, \overline{FG} = Vz^v, \overline{GH} = z^n$$

en dus ook

$$KP = |p(\zeta)|, PA = |Rz^r|, AB = |Sz^s|, \dots, FG = |Vz^v|, GH = |z^n|$$

Dus $p(\zeta + z)$ wordt gerepresenteerd door het gebroken lijnstuk $\overline{KPAB \dots FGH}$, en dus ook door $\overline{KH}$.

Het doel is nu te bewijzen dat het mogelijk is dat $KH < KP$, en hiermee een tegenspraak te bereiken.

Weer meetkunde

Hoe doen we dat?

Weer meetkunde

Hoe doen we dat?

Aan de hand van een voorbeeld: $p(z) = (3 + 4i) + (1 + i)z^2 + (3 + i)z^4 + 5z^6 + z^7$.

Weer meetkunde

Hoe doen we dat?

Aan de hand van een voorbeeld: $p(z) = (3 + 4i) + (1 + i)z^2 + (3 + i)z^4 + 5z^6 + z^7$.
(Voor het gemak alvast $\zeta = 0$ genomen.)

Weer meetkunde

Hoe doen we dat?

Aan de hand van een voorbeeld: $p(z) = (3 + 4i) + (1 + i)z^2 + (3 + i)z^4 + 5z^6 + z^7$.

(Voor het gemak alvast $\zeta = 0$ genomen.)

Dus $\overline{KP} = 3 + 4i$, $\overline{PA} = (1 + i)z^2$, $\overline{AB} = (3 + i)z^4$, $\overline{BG} = 5z^6$, en $\overline{GH} = z^7$.

Weer meetkunde

Hoe doen we dat?

Aan de hand van een voorbeeld: $p(z) = (3 + 4i) + (1 + i)z^2 + (3 + i)z^4 + 5z^6 + z^7$.
(Voor het gemak alvast $\zeta = 0$ genomen.)

Dus $\overline{KP} = 3 + 4i$, $\overline{PA} = (1 + i)z^2$, $\overline{AB} = (3 + i)z^4$, $\overline{BG} = 5z^6$, en $\overline{GH} = z^7$.

Argand nam een (willekeurige) z en bekeek de resulterende lijnstukken $\overline{KP}$ en $\overline{PA}$.

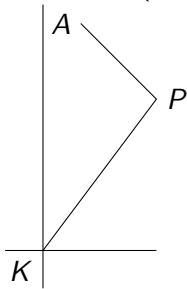
Weer meetkunde

Hoe doen we dat?

Aan de hand van een voorbeeld: $p(z) = (3 + 4i) + (1 + i)z^2 + (3 + i)z^4 + 5z^6 + z^7$.
(Voor het gemak alvast $\zeta = 0$ genomen.)

Dus $\overline{KP} = 3 + 4i$, $\overline{PA} = (1 + i)z^2$, $\overline{AB} = (3 + i)z^4$, $\overline{BG} = 5z^6$, en $\overline{GH} = z^7$.

Argand nam een (willekeurige) z en bekeek de resulterende lijnstukken $\overline{KP}$ en $\overline{PA}$.



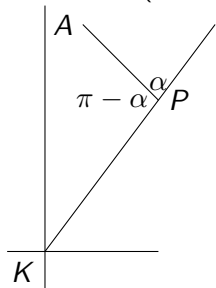
Weer meetkunde

Hoe doen we dat?

Aan de hand van een voorbeeld: $p(z) = (3 + 4i) + (1 + i)z^2 + (3 + i)z^4 + 5z^6 + z^7$.
(Voor het gemak alvast $\zeta = 0$ genomen.)

Dus $\overline{KP} = 3 + 4i$, $\overline{PA} = (1 + i)z^2$, $\overline{AB} = (3 + i)z^4$, $\overline{BG} = 5z^6$, en $\overline{GH} = z^7$.

Argand nam een (willekeurige) z en bekeek de resulterende lijnstukken $\overline{KP}$ en $\overline{PA}$.



Trek $\overline{KP}$ een stukje door.

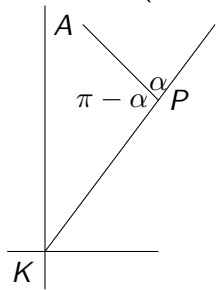
Weer meetkunde

Hoe doen we dat?

Aan de hand van een voorbeeld: $p(z) = (3 + 4i) + (1 + i)z^2 + (3 + i)z^4 + 5z^6 + z^7$.
(Voor het gemak alvast $\zeta = 0$ genomen.)

Dus $\overline{KP} = 3 + 4i$, $\overline{PA} = (1 + i)z^2$, $\overline{AB} = (3 + i)z^4$, $\overline{BG} = 5z^6$, en $\overline{GH} = z^7$.

Argand nam een (willekeurige) z en bekeek de resulterende lijnstukken $\overline{KP}$ en $\overline{PA}$.



Trek $\overline{KP}$ een stukje door.

Als we $\overline{PA}$ over $\pi - \alpha$ draaien wijst deze
tegengesteld aan $\overline{KP}$.

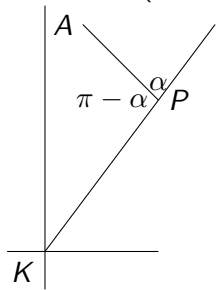
Weer meetkunde

Hoe doen we dat?

Aan de hand van een voorbeeld: $p(z) = (3 + 4i) + (1 + i)z^2 + (3 + i)z^4 + 5z^6 + z^7$.
(Voor het gemak alvast $\zeta = 0$ genomen.)

Dus $\overline{KP} = 3 + 4i$, $\overline{PA} = (1 + i)z^2$, $\overline{AB} = (3 + i)z^4$, $\overline{BG} = 5z^6$, en $\overline{GH} = z^7$.

Argand nam een (willekeurige) z en bekeek de resulterende lijnstukken $\overline{KP}$ en $\overline{PA}$.



Trek $\overline{KP}$ een stukje door.

Als we $\overline{PA}$ over $\pi - \alpha$ draaien wijst deze
tegengesteld aan $\overline{KP}$.

Dan ligt A op $\overline{PK}$, of het verlengde daarvan.

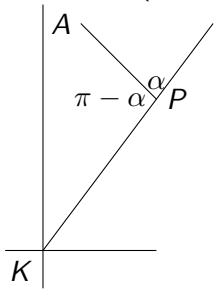
Weer meetkunde

Hoe doen we dat?

Aan de hand van een voorbeeld: $p(z) = (3 + 4i) + (1 + i)z^2 + (3 + i)z^4 + 5z^6 + z^7$.
(Voor het gemak alvast $\zeta = 0$ genomen.)

Dus $\overline{KP} = 3 + 4i$, $\overline{PA} = (1 + i)z^2$, $\overline{AB} = (3 + i)z^4$, $\overline{BG} = 5z^6$, en $\overline{GH} = z^7$.

Argand nam een (willekeurige) z en bekeek de resulterende lijnstukken $\overline{KP}$ en $\overline{PA}$.



Trek $\overline{KP}$ een stukje door.

Als we $\overline{PA}$ over $\pi - \alpha$ draaien wijst deze
tegengesteld aan $\overline{KP}$.

Dan ligt A op $\overline{PK}$, of het verlengde daarvan.

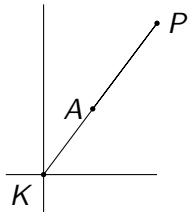
Dan doen we door onze z over $(\pi - \alpha)/2$ te draaien.

Weer meetkunde

We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:

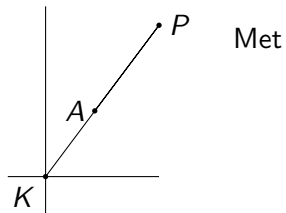
Weer meetkunde

We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:



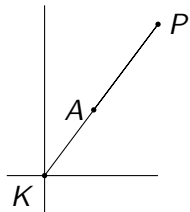
Weer meetkunde

We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:



Weer meetkunde

We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:

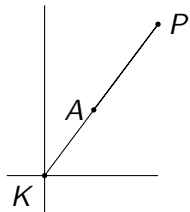


Met

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7},$$

Weer meetkunde

We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:



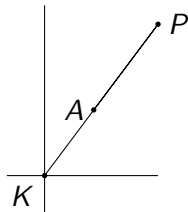
Met

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7},$$

krijg je zelfs $A = K$.

Weer meetkunde

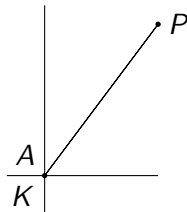
We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:



Met

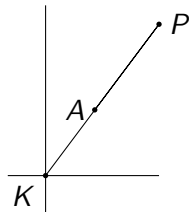
$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7},$$

krijg je zelfs $A = K$.



Weer meetkunde

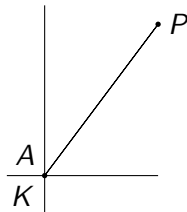
We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:



Met

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7},$$

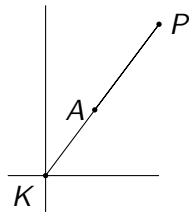
krijg je zelfs $A = K$.



Argand deed het algemeen en nam z zó dat $p(\zeta) + Rz^r = 0$.

Weer meetkunde

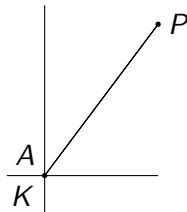
We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:



Met

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7},$$

krijg je zelfs $A = K$.

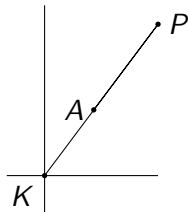


Argand deed het algemeen en nam z zó dat $p(\zeta) + Rz^r = 0$.

Want het was

Weer meetkunde

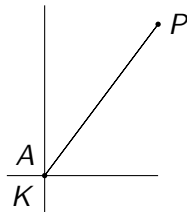
We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:



Met

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7},$$

krijg je zelfs $A = K$.

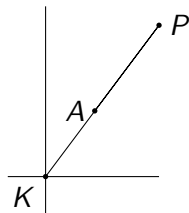


Argand deed het algemeen en nam z zó dat $p(\zeta) + Rz^r = 0$.

Want het was (en is nog steeds)

Weer meetkunde

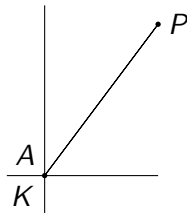
We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:



Met

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7},$$

krijg je zelfs $A = K$.

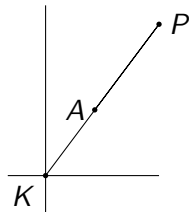


Argand deed het algemeen en nam z zó dat $p(\zeta) + Rz^r = 0$.

Want het was (en is nog steeds) duidelijk hoe je zo'n vergelijking met de modulus-argumentmethode oplost.

Weer meetkunde

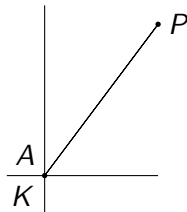
We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:



Met

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7},$$

krijg je zelfs $A = K$.



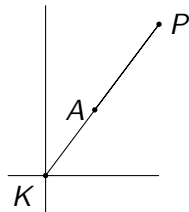
Argand deed het algemeen en nam z zó dat $p(\zeta) + Rz^r = 0$.

Want het was (en is nog steeds) duidelijk hoe je zo'n vergelijking met de modulus-argumentmethode oplost.

Dus, in het algemeen krijgen we dan $\overline{KPKB \dots FGH}$.

Weer meetkunde

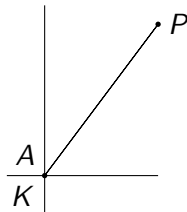
We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:



Met

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7},$$

krijg je zelfs $A = K$.



Argand deed het algemeen en nam z zó dat $p(\zeta) + Rz^r = 0$.

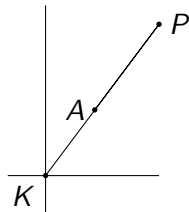
Want het was (en is nog steeds) duidelijk hoe je zo'n vergelijking met de modulus-argumentmethode oplost.

Dus, in het algemeen krijgen we dan $\overline{KPKB \dots FGH}$.

Wat hebben we daar aan?

Weer meetkunde

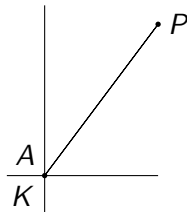
We kunnen dus z zo nemen dat $\overline{KPABGH}$ zo begint:



Met

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7},$$

krijg je zelfs $A = K$.



Argand deed het algemeen en nam z zó dat $p(\zeta) + Rz^r = 0$.

Want het was (en is nog steeds) duidelijk hoe je zo'n vergelijking met de modulus-argumentmethode oplost.

Dus, in het algemeen krijgen we dan $\overline{KPKB \dots FGH}$.

Wat hebben we daar aan?

Nou ...

Weer meetkunde

... op zich niet veel, want

$$\rho \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7} \right)$$

Weer meetkunde

... op zich niet veel, want

$$p \left(-\frac{1}{2} \sqrt{5\sqrt{2} - 7} + \frac{i}{2} \sqrt{5\sqrt{2} + 7} \right)$$

is gelijk aan

$$\frac{365\sqrt{2} \sqrt{5\sqrt{2} - 7}}{8} + 84\sqrt{5\sqrt{2} - 7} - \frac{675}{4} + i \left(-\frac{275}{4} + \frac{(-805\sqrt{2} - 1054) \sqrt{5\sqrt{2} - 7}}{8} \right)$$

Weer meetkunde

... op zich niet veel, want

$$p \left(-\frac{1}{2} \sqrt{5\sqrt{2} - 7} + \frac{i}{2} \sqrt{5\sqrt{2} + 7} \right)$$

is gelijk aan

$$\frac{365\sqrt{2} \sqrt{5\sqrt{2} - 7}}{8} + 84\sqrt{5\sqrt{2} - 7} - \frac{675}{4} + i \left(-\frac{275}{4} + \frac{(-805\sqrt{2} - 1054) \sqrt{5\sqrt{2} - 7}}{8} \right)$$

en dat is, afgerond, $-129,1557954 - 141,8091434i$.

Weer meetkunde

... op zich niet veel, want

$$\rho \left(-\frac{1}{2} \sqrt{5\sqrt{2} - 7} + \frac{i}{2} \sqrt{5\sqrt{2} + 7} \right)$$

is gelijk aan

$$\frac{365\sqrt{2} \sqrt{5\sqrt{2} - 7}}{8} + 84\sqrt{5\sqrt{2} - 7} - \frac{675}{4} + i \left(-\frac{275}{4} + \frac{(-805\sqrt{2} - 1054) \sqrt{5\sqrt{2} - 7}}{8} \right)$$

en dat is, afgerond, $-129,1557954 - 141,8091434i$.

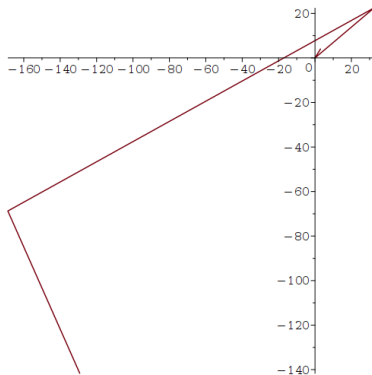
Met een veel te grote modulus dus.

Weer meetkunde

Hier is het gebroken lijnstuk $\overline{KPABGH}$ voor $z_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7}$.

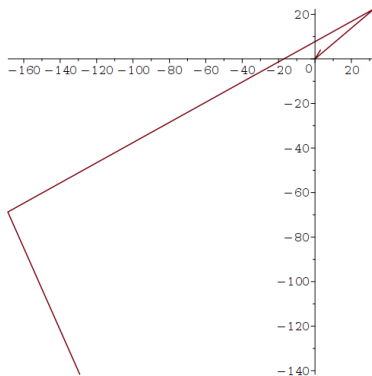
Weer meetkunde

Hier is het gebroken lijnstuk $\overline{KPABGH}$ voor $z_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7}$.



Weer meetkunde

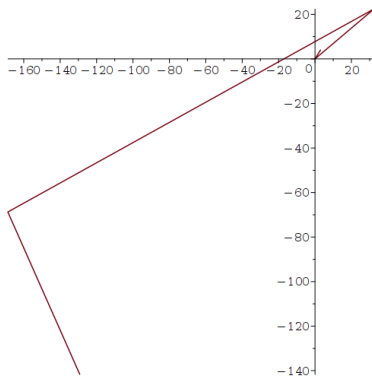
Hier is het gebroken lijnstuk $\overline{KPABGH}$ voor $z_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7}$.



We gaan variëren: we maken z_0 wat kleiner.

Weer meetkunde

Hier is het gebroken lijnstuk $\overline{KPABGH}$ voor $z_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{5\sqrt{2}-7} + \frac{i}{2}\sqrt{5\sqrt{2}+7}$.



We gaan variëren: we maken z_0 wat kleiner.

We zetten $z = tz_0$ en laten t lopen van 1 richting 0.

Weer meetkunde

$$t = \frac{9}{10}$$

$$t = \frac{8}{10}$$

$$t = \frac{7}{10}$$

$$t = \frac{6}{10}$$

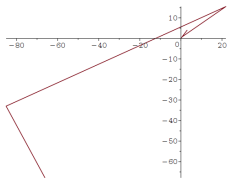
Weer meetkunde

$$t = \frac{9}{10}$$

$$t = \frac{8}{10}$$

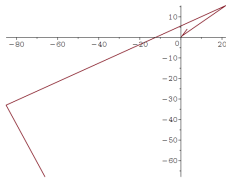
$$t = \frac{7}{10}$$

$$t = \frac{6}{10}$$

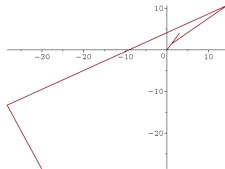


Weer meetkunde

$$t = \frac{9}{10}$$



$$t = \frac{8}{10}$$

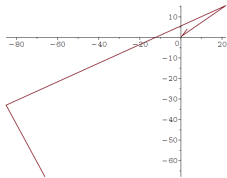


$$t = \frac{7}{10}$$

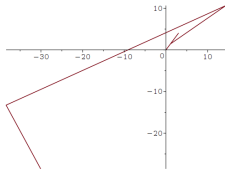
$$t = \frac{6}{10}$$

Weer meetkunde

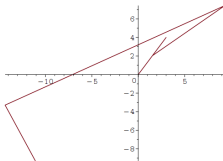
$$t = \frac{9}{10}$$



$$t = \frac{8}{10}$$



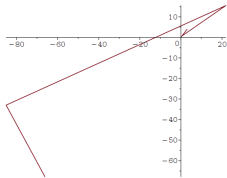
$$t = \frac{7}{10}$$



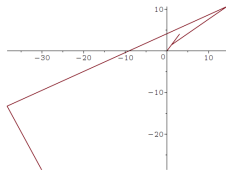
$$t = \frac{6}{10}$$

Weer meetkunde

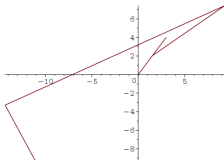
$$t = \frac{9}{10}$$



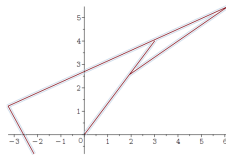
$$t = \frac{8}{10}$$



$$t = \frac{7}{10}$$

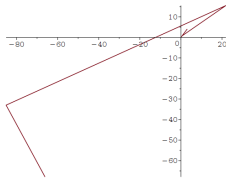


$$t = \frac{6}{10}$$

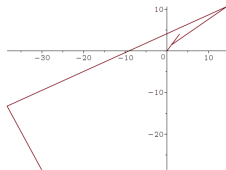


Weer meetkunde

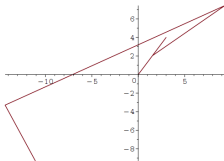
$$t = \frac{9}{10}$$



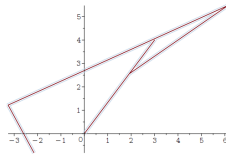
$$t = \frac{8}{10}$$



$$t = \frac{7}{10}$$



$$t = \frac{6}{10}$$



$$t = \frac{5}{10}$$

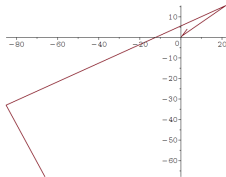
$$t = \frac{4}{10}$$

$$t = \frac{3}{10}$$

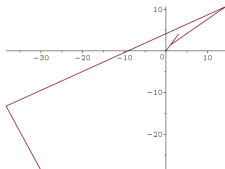
$$t = \frac{2}{10}$$

Weer meetkunde

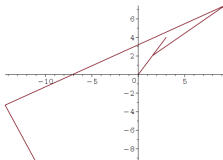
$$t = \frac{9}{10}$$



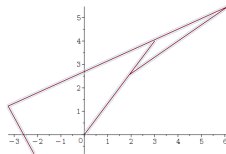
$$t = \frac{8}{10}$$



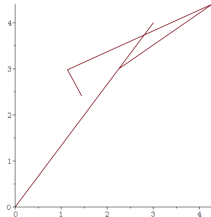
$$t = \frac{7}{10}$$



$$t = \frac{6}{10}$$



$$t = \frac{5}{10}$$



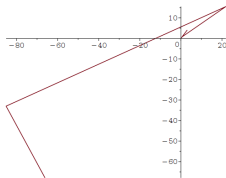
$$t = \frac{4}{10}$$

$$t = \frac{3}{10}$$

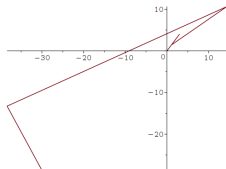
$$t = \frac{3}{10}$$

Weer meetkunde

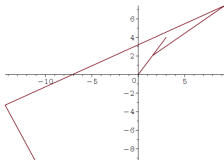
$$t = \frac{9}{10}$$



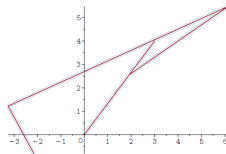
$$t = \frac{8}{10}$$



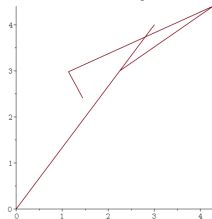
$$t = \frac{7}{10}$$



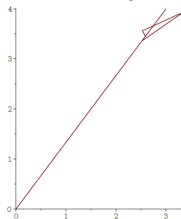
$$t = \frac{6}{10}$$



$$t = \frac{5}{10}$$



$$t = \frac{4}{10}$$

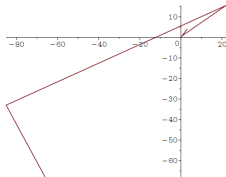


$$t = \frac{3}{10}$$

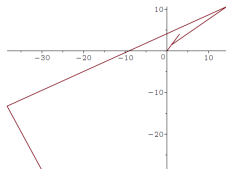
$$t = \frac{3}{10}$$

Weer meetkunde

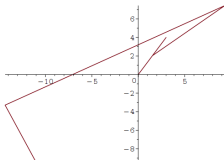
$$t = \frac{9}{10}$$



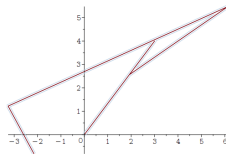
$$t = \frac{8}{10}$$



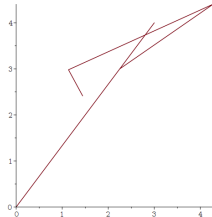
$$t = \frac{7}{10}$$



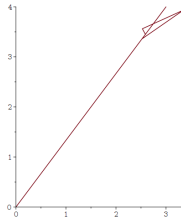
$$t = \frac{6}{10}$$



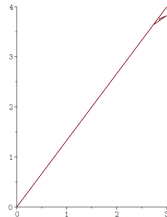
$$t = \frac{5}{10}$$



$$t = \frac{4}{10}$$



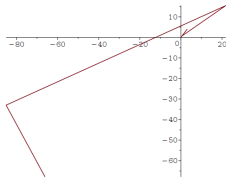
$$t = \frac{3}{10}$$



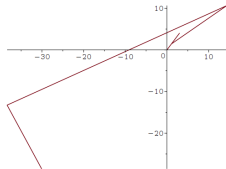
$$t = \frac{3}{10}$$

Weer meetkunde

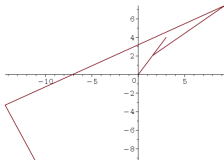
$$t = \frac{9}{10}$$



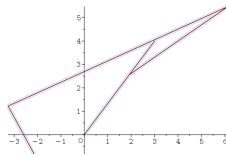
$$t = \frac{8}{10}$$



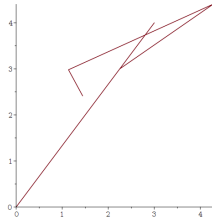
$$t = \frac{7}{10}$$



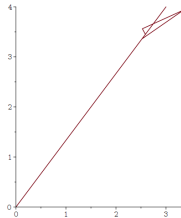
$$t = \frac{6}{10}$$



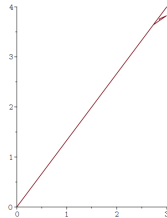
$$t = \frac{5}{10}$$



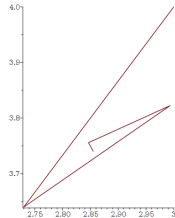
$$t = \frac{4}{10}$$



$$t = \frac{3}{10}$$



$$t = \frac{3}{10}$$



Even terugkijken

In de plaatjes worden de gebroken lijnstukken steeds kleiner.

Even terugkijken

In de plaatjes worden de gebroken lijnstukken steeds kleiner.

Het laatste plaatje (tweede met $t = \frac{3}{10}$) vergelijkt $\overline{ABGH}$ met $\overline{PA}$.

Even terugkijken

In de plaatjes worden de gebroken lijnstukken steeds kleiner.

Het laatste plaatje (tweede met $t = \frac{3}{10}$) vergelijkt $\overline{ABGH}$ met $\overline{PA}$.

Dat stuk blijft de hele tijd binnen de cirkel om A met straal AP en dus ook binnen de cirkel om K met straal KP .

Even terugkijken

In de plaatjes worden de gebroken lijnstukken steeds kleiner.

Het laatste plaatje (tweede met $t = \frac{3}{10}$) vergelijkt $\overline{ABGH}$ met $\overline{PA}$.

Dat stuk blijft de hele tijd binnen de cirkel om A met straal AP en dus ook binnen de cirkel om K met straal KP .

Conclusie: voor $z = \frac{3}{10}z_0$ geldt $KH < KP$.

Even terugkijken

In de plaatjes worden de gebroken lijnstukken steeds kleiner.

Het laatste plaatje (tweede met $t = \frac{3}{10}$) vergelijkt $\overline{ABGH}$ met $\overline{PA}$.

Dat stuk blijft de hele tijd binnen de cirkel om A met straal AP en dus ook binnen de cirkel om K met straal KP .

Conclusie: voor $z = \frac{3}{10}z_0$ geldt $KH < KP$.

We hebben onze tegenspraak bereikt: de aanname dat het minimum $|p(\zeta)|$ ongelijk aan nul is is dus fout.

Voor alle zekerheid toch even rekenen

We kunnen het ook met behulp van de driehoeksongelijkheid doen.

Voor alle zekerheid toch even rekenen

We kunnen het ook met behulp van de driehoeksongelijkheid doen.

In ons geval geldt $|z_0| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{2}}}$. En dus:

$$\blacktriangleright PA = |(1+i)(tz_0)^2| = \sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} t^2 = 5t^2,$$

Voor alle zekerheid toch even rekenen

We kunnen het ook met behulp van de driehoeksongelijkheid doen.

In ons geval geldt $|z_0| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{2}}}$. En dus:

$$\blacktriangleright PA = |(1+i)(tz_0)^2| = \sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} t^2 = 5t^2,$$

$$\blacktriangleright AB = |(3+i)(tz_0)^4| = \sqrt{10} \cdot \frac{25}{2} t^4 = \frac{5^2 \sqrt{5}}{\sqrt{2}} t^4,$$

Voor alle zekerheid toch even rekenen

We kunnen het ook met behulp van de driehoeksongelijkheid doen.

In ons geval geldt $|z_0| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{2}}}$. En dus:

- ▶ $PA = |(1 + i)(tz_0)^2| = \sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} t^2 = 5t^2,$
- ▶ $AB = |(3 + i)(tz_0)^4| = \sqrt{10} \cdot \frac{25}{2} t^4 = \frac{5^2 \sqrt{5}}{\sqrt{2}} t^4,$
- ▶ $BG = |5(tz_0)^6| = 5 \cdot \frac{5^3}{2\sqrt{2}} t^6 = \frac{5^4}{2\sqrt{2}} t^6,$

Voor alle zekerheid toch even rekenen

We kunnen het ook met behulp van de driehoeksongelijkheid doen.

In ons geval geldt $|z_0| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{2}}}$. En dus:

- ▶ $PA = |(1 + i)(tz_0)^2| = \sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} t^2 = 5t^2,$
- ▶ $AB = |(3 + i)(tz_0)^4| = \sqrt{10} \cdot \frac{25}{2} t^4 = \frac{5^2 \sqrt{5}}{\sqrt{2}} t^4,$
- ▶ $BG = |5(tz_0)^6| = 5 \cdot \frac{5^3}{2\sqrt{2}} t^6 = \frac{5^4}{2\sqrt{2}} t^6,$ en
- ▶ $GH = |(tz_0)^7| = \frac{5^3 \sqrt{5}}{2\sqrt{2\sqrt{2}}} t^7.$

Voor alle zekerheid toch even rekenen

We kunnen het ook met behulp van de driehoeksongelijkheid doen.

In ons geval geldt $|z_0| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{2}}}$. En dus:

- ▶ $PA = |(1+i)(tz_0)^2| = \sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} t^2 = 5t^2,$
- ▶ $AB = |(3+i)(tz_0)^4| = \sqrt{10} \cdot \frac{25}{2} t^4 = \frac{5^2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} t^4,$
- ▶ $BG = |5(tz_0)^6| = 5 \cdot \frac{5^3}{2\sqrt{2}} t^6 = \frac{5^4}{2\sqrt{2}} t^6,$ en
- ▶ $GH = |(tz_0)^7| = \frac{5^3\sqrt{5}}{2\sqrt{2\sqrt{2}}} t^7.$

En dus:

$$AH \leq AB + BG + GH = \left(\frac{5^2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} t^2 + \frac{5^4}{2\sqrt{2}} t^4 + \frac{5^3\sqrt{5}}{2\sqrt{2\sqrt{2}}} t^5 \right) \cdot t^2$$

en ...

Voor alle zekerheid toch even rekenen

... als we t klein genoeg nemen geldt

Voor alle zekerheid toch even rekenen

... als we t klein genoeg nemen geldt

$$\frac{5^2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}t^2 + \frac{5^4}{2\sqrt{2}}t^4 + \frac{5^3\sqrt{5}}{2\sqrt{2\sqrt{2}}}t^5 < 5$$

Voor alle zekerheid toch even rekenen

... als we t klein genoeg nemen geldt

$$\frac{5^2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}t^2 + \frac{5^4}{2\sqrt{2}}t^4 + \frac{5^3\sqrt{5}}{2\sqrt{2\sqrt{2}}}t^5 < 5$$

en daarmee

$$AH < 5t^2 = AP$$

Voor alle zekerheid toch even rekenen

... als we t klein genoeg nemen geldt

$$\frac{5^2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}t^2 + \frac{5^4}{2\sqrt{2}}t^4 + \frac{5^3\sqrt{5}}{2\sqrt{2\sqrt{2}}}t^5 < 5$$

en daarmee

$$AH < 5t^2 = AP$$

en dus ook

$$KH \leq KA + KH < KA + AP = KP$$

Voor alle zekerheid toch even rekenen

... als we t klein genoeg nemen geldt

$$\frac{5^2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}t^2 + \frac{5^4}{2\sqrt{2}}t^4 + \frac{5^3\sqrt{5}}{2\sqrt{2\sqrt{2}}}t^5 < 5$$

en daarmee

$$AH < 5t^2 = AP$$

en dus ook

$$KH \leq KA + KH < KA + AP = KP$$

als gewenst.

Voor alle zekerheid toch even rekenen

... als we t klein genoeg nemen geldt

$$\frac{5^2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}t^2 + \frac{5^4}{2\sqrt{2}}t^4 + \frac{5^3\sqrt{5}}{2\sqrt{2\sqrt{2}}}t^5 < 5$$

en daarmee

$$AH < 5t^2 = AP$$

en dus ook

$$KH \leq KA + KH < KA + AP = KP$$

als gewenst.

Opgave

Ga na dat $t = \frac{1}{5}$ zeker klein genoeg is.

Algemeen

Argand maakte er weinig woorden aan vuil

Algemeen

Argand maakte er weinig woorden aan vuil: als we t maar klein genoeg nemen krijgen we

$$|R(tz_0)^r| > |S(tz_0)^s| + \cdots + |V(tz_0)^v| + |(tz_0)^n|$$

Algemeen

Argand maakte er weinig woorden aan vuil: als we t maar klein genoeg nemen krijgen we

$$|R(tz_0)^r| > |S(tz_0)^s| + \cdots + |V(tz_0)^v| + |(tz_0)^n|$$

want de exponenten $s, \dots, v, n$ zijn groter dan r .

Algemeen

Argand maakte er weinig woorden aan vuil: als we t maar klein genoeg nemen krijgen we

$$|R(tz_0)^r| > |S(tz_0)^s| + \cdots + |V(tz_0)^v| + |(tz_0)^n|$$

want de exponenten $s, \dots, v, n$ zijn groter dan r .

En dat geeft de ongelijkheid

$$PA > AB + \cdots + FG + GH$$

Algemeen

Argand maakte er weinig woorden aan vuil: als we t maar klein genoeg nemen krijgen we

$$|R(tz_0)^r| > |S(tz_0)^s| + \cdots + |V(tz_0)^v| + |(tz_0)^n|$$

want de exponenten $s, \dots, v, n$ zijn groter dan r .

En dat geeft de ongelijkheid

$$PA > AB + \cdots + FG + GH$$

Het punt H ligt binnen de cirkel om A met straal AP

Algemeen

Argand maakte er weinig woorden aan vuil: als we t maar klein genoeg nemen krijgen we

$$|R(tz_0)^r| > |S(tz_0)^s| + \cdots + |V(tz_0)^v| + |(tz_0)^n|$$

want de exponenten $s, \dots, v, n$ zijn groter dan r .

En dat geeft de ongelijkheid

$$PA > AB + \cdots + FG + GH$$

Het punt H ligt binnen de cirkel om A met straal AP , en het volgt uit de eerste beginselen van de meetkunde

Algemeen

Argand maakte er weinig woorden aan vuil: als we t maar klein genoeg nemen krijgen we

$$|R(tz_0)^r| > |S(tz_0)^s| + \cdots + |V(tz_0)^v| + |(tz_0)^n|$$

want de exponenten $s, \dots, v, n$ zijn groter dan r .

En dat geeft de ongelijkheid

$$PA > AB + \cdots + FG + GH$$

Het punt H ligt binnen de cirkel om A met straal AP , en het volgt uit de eerste beginselen van de meetkunde, omdat K op het verlengde van de straal PA ligt en aan de kant van A

Algemeen

Argand maakte er weinig woorden aan vuil: als we t maar klein genoeg nemen krijgen we

$$|R(tz_0)^r| > |S(tz_0)^s| + \cdots + |V(tz_0)^v| + |(tz_0)^n|$$

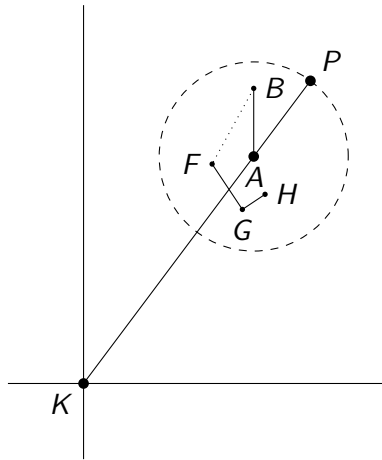
want de exponenten $s, \dots, v, n$ zijn groter dan r .

En dat geeft de ongelijkheid

$$PA > AB + \cdots + FG + GH$$

Het punt H ligt binnen de cirkel om A met straal AP , en het volgt uit de eerste beginselen van de meetkunde, omdat K op het verlengde van de straal PA ligt en aan de kant van A , dat $KH < KP$.

Algemeen



Outline

Formulering/Geschiedenis
d'Alembert

Gauss/Ostrovski

Argand

Leeswerk

Meer lezen?

Op

`fa.ewi.tudelft.nl/~hart`

zal ik deze slides zetten, met links naar oorspronkelijk materiaal.