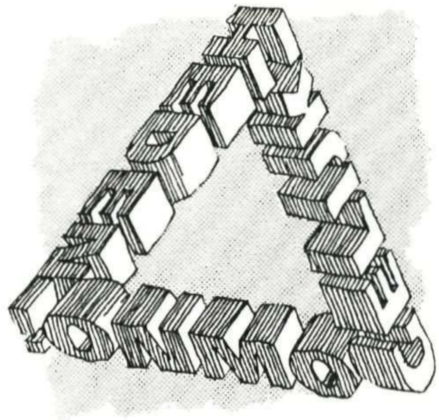
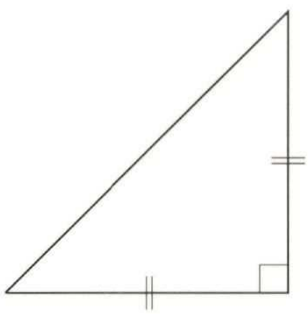


Dit is het eerste artikel in een reeks over wiskundige onmogelijkheden. Een wiskundige onmogelijkheid is een *bewijsbare* onmogelijkheid; uit een waterdichte redenering moet blijken dat iets echt niet kan. In dit artikel laten we zien dat $\sqrt{2}$ geen breuk van twee gehele getallen kan zijn.

• Wortel 2 is niet rationaal

Klaas Pieter Hart

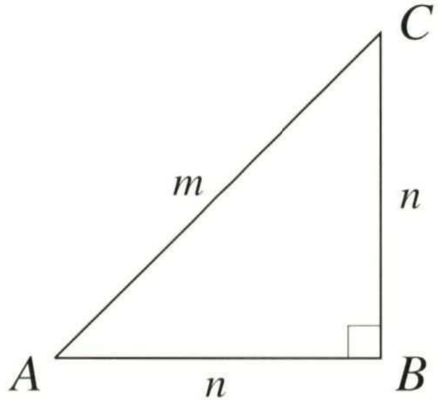
De Pythagoreërs (zie pagina 9: *Pythagoras op het Internet*) dachten dat relaties tussen veel dingen in het universum uitgedrukt konden worden in gehele getallen. Het motto van hun school was "Alles is getal". In moderne wiskundige terminologie dachten de Pythagoreërs dat elk getal een breuk van twee gehele getallen was. Zo'n breuk heet een *rationaal getal*.
De Pythagoreërs bestudeerden de volgende gelijkbenige driehoek:



Wegens de stelling van Pythagoras is de verhouding tussen de schuine zijde en de rechthoekszijde gelijk aan $\sqrt{2}$. Op een gegeven moment ontdekten de Pythagoreërs dat deze verhouding niet de breuk van twee gehele getallen kan zijn. Kortom, $\sqrt{2}$ is *niet rationaal*. Deze ontdekking was een grote schok voor de Pythagoreërs. Het verhaal gaat dat degene die het ontdekte door de broederschap vermoord werd. Dat $\sqrt{2}$ niet een breuk van twee gehele getallen is, laten we in dit artikel op twee manieren zien, op een meetkundige manier en op een algebraïsche (rekenkundige) manier. In beide gevallen gaan we *bewijzen* dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is door een gedachtenexperiment te doen: we nemen aan dat $\sqrt{2}$ wèl rationaal is. Met behulp van een logische redenering leiden we hieruit een tegenspraak (een wiskundige onwaarheid) af. Daaruit concluderen we dat we in ons experiment een foute aanname gedaan hebben, dat wil zeggen, dat $\sqrt{2}$ niet rationaal is. Dit heet een *bewijs uit het ongerijmde*.

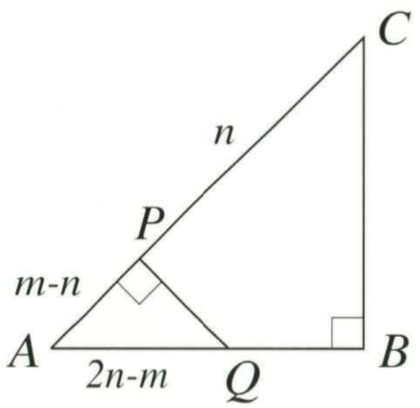
Een meetkundig bewijs

We beginnen met aan te nemen dat $\sqrt{2}$ wèl rationaal is. Dat wil zeggen, we nemen aan dat $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, met m en n gehele getallen. Teken een rechthoekige driehoek ABC, waarvan de rechthoekszijden



beide lengte n hebben. De schuine zijde heeft dan lengte $n\sqrt{2} = m$.

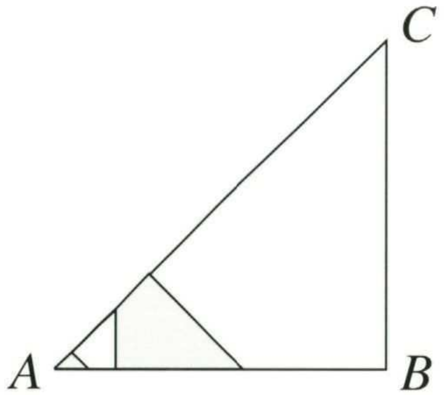
We doen nu het volgende: pas op de schuine zijde CB een lijnstuk CP af van lengte n. Trek door dit punt een lijn loodrecht op de schuine zijde. Het snijpunt hiervan met AB noemen we Q.



Dan is de kleine driehoek APQ gelijkvormig met de grote driehoek ABC. De rechthoekszijden van ΔAPQ hebben lengte $m-n$. De schuine zijde AQ heeft lengte

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(m-n) &= \frac{m}{n}(m-n)\\ &= \frac{m^2}{n^2}n - m\\ &= 2n - m.\end{aligned}$$

Dit is een geheel getal. Dus ΔAPQ is een driehoek, waarvan de zijden *gehele* lengte hebben. De bovenstaande stap kunnen we steeds herhalen.



We vinden een oneindige rij van steeds kleiner wordende driehoekjes, waarvan de zijden steeds een *gehele* lengte hebben. Maar dit is onmogelijk! We concluderen daarom dat onze aanname fout was, dus dat $\sqrt{2}$ niet rationaal is.

Een algebraïsch bewijs

De volgende redenering berust op het feit dat het kwadraat van een oneven getal weer oneven is (schrijf $(2n+1)^2$ maar uit). Het is weer een bewijs uit het ongerijmde.

Neem aan dat $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, met m en n natuurlijke getallen. Door eventueel gemeenschappelijke factoren weg te delen, mogen we aannemen dat $\frac{m}{n}$ niet verder te vereenvoudigen is.

Uit $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ volgt door kwadrateren $m^2 = 2n^2$. Dus m is even, zeg $m = 2k$. Daaruit volgt dat $4k^2 = 2n^2$, ofwel $n^2 = 2k^2$. Dus n is ook even! Dit is een tegenspraak, want we hebben nu afgeleid dat m en n beide even zijn, terwijl we aangenomen hadden dat $\frac{m}{n}$ niet te vereenvoudigen was.

vragen:

Probeer de volgende beweringen te bewijzen door de redeneringen voor $\sqrt{2}$ aan te passen:

1. $\sqrt{3}$ en $\sqrt{5}$ zijn niet rationaal;

2. $\sqrt[3]{2}$ is niet rationaal.

••• Het getal e

Ook het getal $e = 2{,}7182818284\ldots$ is niet rationaal. In de voorafgaande bewijzen gebruikten we dat $\sqrt{2}$ eenvoudig te beschrijven is: als lengte van de hypothenusa in een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van lengte 1 of door de eigenschap $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Om te bewijzen dat e niet rationaal is moeten we eerst een goede beschrijving van e vinden. Nu is het getal e gelijk aan het unieke getal a waarvoor de functie $f(x) = a^x$ zichzelf als afgeleide heeft. De functie $f(x) = e^x$ blijkt te schrijven te zijn als een oneindig voortlopend polynoom:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Differentieer dit maar; de afgeleide is weer hetzelfde 'polynoom'. Kiezen we $x = 1$, dan krijgen we een beschrijving

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

van e als een 'oneindige som' (wie dit niet gelooft, moet met de rekenmachine maar eens de som van de eerste paar termen berekenen).

Met behulp van deze definitie gaan we bewijzen dat e niet rationaal is. Dit doen we weer uit het ongerijmde. Stel dat $e = \frac{m}{n}$, met m en n gehele getallen. Dan is $n! \cdot e$ een geheel getal, evenals

$$n!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Het verschil tussen deze twee getallen is gelijk aan

$$\begin{aligned} n!\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots\right) \\ = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \end{aligned}$$

Dit getal is enerzijds positief, en anderszijds kleiner dan

$$\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{1}{n}.$$

Maar dat is onmogelijk, want het verschil tussen twee gehele getallen is een geheel getal.

In de laatste stap hebben we gebruikt dat voor $|x| < 1$ geldt

$$x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x}, \qquad (\star)$$

waarbij we $x = 1/(n+1)$ genomen hebben. De oneindige som in $(\star)$ heet een *meetkundige reeks*.

vraag:
Probeer een bewijs te geven van de gelijkheid in $(\star)$. Neem als voorbeeld eerst eens $x = \frac{1}{2}$.