Wat is ontelbaar? Veel mensen zouden zeggen 'oneindig veel', preciezer: zo veel als 1, 2, 3, ..., enzovoort, tot en met oneindig. Een wiskundige antwoordt hierop: "Oh, maar dat is nog steeds telbaar. De getallen op de getallenlijn, die zijn pas ontelbaar. Daarvan zijn er véél en véél meer."

Niet te tellen!

Klaas Pieter Hart

Mensen houden er van af en toe op te scheppen. Vaak gaat het er om iemand anders af te troeven: "Ik heb meer snoepjes/flippo's/CD's dan jij." "Oh ja? Hoeveel dan?" Op dat moment komen grote getallen te voorschijn: tien, honderd, duizend, tienduizendhondermiljoen. Tot iemand uitroept "oneindig". Hoeveel dat is blijft meestal in het midden. In dit artikel zullen we zien dat er verschillende soorten oneindig bestaan, de één groter dan de ander.

Vergelijken zonder te tellen

Stel je eens voor dat je twee grote bakken met knikkers voor je hebt staan en dat je uit moet vinden in welke bak de meeste knikkers zitten. De knikkers zijn niet allemaal even zwaar, dus wegen zal niet gaan. Er lijkt niets anders op te zitten dan de twee bakken knikkers te tellen. Gezien de grote hoeveelheden zou je je gemakkelijk kunnen vertellen. Aangezien het niet om de precieze aantallen gaat, is de volgende methode wat veiliger: neem telkens, tegelijk, uit elke bak één knikker en doe dit net zo lang tot een van de bakken leeg is. In de lege bak zat dan het kleinste aantal knikkers. Als beide bakken tegelijk leeg raken, dan zaten er in elke bak evenveel knikkers. Met behulp van dit idee kunnen we laten zien dat er meer dan één soort 'oneindig' is.

Weet jij hoeveel even getallen 2, 4, 6, ... er zijn? Je zou kunnen zeggen: precies de helft van alle natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Maar laten we onze knikkerbakmethode eens gebruiken om de even getallen te vergelijken met de verzameling van alle natuurlijke getallen. Hiertoe nemen we twee bakken; in de ene storten we de even getallen en in de andere alle natuurlijke getallen.

Nu gaan we steeds tegelijkertijd uit beide bakken één getal halen: eerst 2 en 1, dan 4 en 2, dan 6 en 3, enzovoort. Telkens pakken we het getal $2n$ uit de ene bak en het getal n uit de andere bak. Op deze manier paren we alle even getallen aan alle natuurlijke getallen:

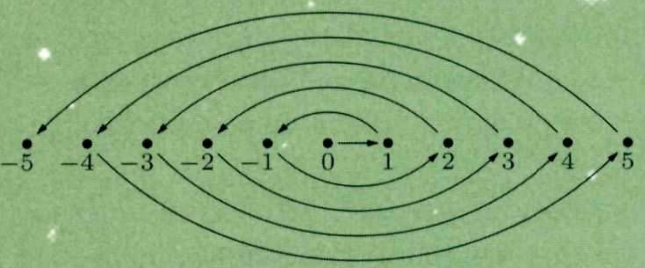
$$\begin{array}{ccc} 2 & \longleftrightarrow & 1 \\ 4 & \longleftrightarrow & 2 \\ 6 & \longleftrightarrow & 3 \\ 8 & \longleftrightarrow & 4 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

We zeggen daarom dat er evenveel even getallen 2, 4, 6, ... zijn als natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Aftellen

Een verzameling waarvan je op de bovenbeschreven manier kan laten zien dat zij evenveel elementen heeft als de natuurlijke getallen noemen we *aftelbaar*. Een aftelbare verzameling kun je *aftellen* zoals de natuurlijke getallen: de elementen kun je één voor één opsommen—je moet alleen wel oneindig lang doorgaan. Een aftelbare verzameling heeft 'evenveel' elementen als er natuurlijke getallen zijn.

We hebben gezien dat de even getallen 2, 4, 6 ... aftelbaar zijn. Hoe zit het met de gehele getallen ... $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$? Deze kunnen we op de volgende manier aftellen:



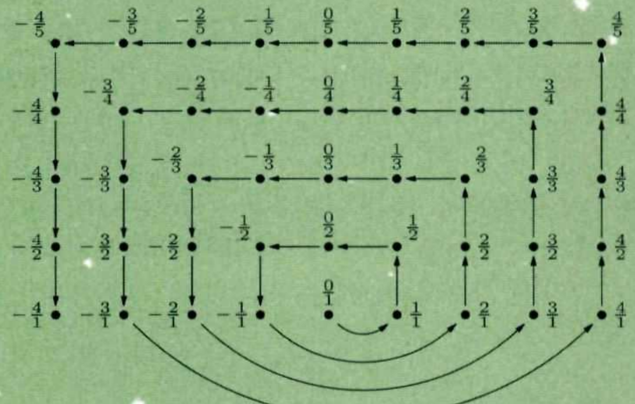
Dit betekent dat we de gehele getallen in de onderstaande volgorde uit de bak gehaald hebben:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$$

Als je goed kijkt, zie je wat het n-de gehele getal in onze aftelling is: $-\frac{1}{2}(n-1)$ als n oneven is en $\frac{1}{2}n$ als n even is.

VRAAG. Sommige mensen houden er van alles in één formule te geven; bedenk eens één formule voor het n-de gehele getal in de bovenstaande aftelling.

We hebben gezien dat er 'evenveel' gehele getallen als natuurlijke getallen zijn. We zullen nu zien dat er ook net zo veel rationale getallen (breuken) zijn als natuurlijke getallen. We doen dit door alle breuken af te tellen. Zo'n breuk wordt door twee gehele getallen bepaald: een getal m, de teller, en een getal $n > 0$, de noemer. Hiermee kunnen we de breuken overzichtelijk presenteren: we vatten de teller op als x-coördinaat en de noemer als y-coördinaat in een twee-dimensionaal schema. In dat schema geven we aan in welke volgorde we de breuken aftellen.



Met behulp van deze slimme aftelling hebben we laten zien dat er 'evenveel' rationale getallen als natuurlijke getallen zijn. Dit mag enige verbazing wekken: wanneer je naar de getallenlijn kijkt, dan lijken er véél en véél meer rationale getallen dan gehele getallen te zijn. Toch zijn volgens onze afspraak de beide getallenverzamelingen even groot.

1. Eigenlijk hebben we hierboven geen nette aftelling van de rationale getallen gemaakt. We hebben het getal 1 veel te vaak geteld: $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \cdots$ Beschrijf hoe je een aftelling van de rationale getallen kunnen maken waarin elk getal precies één keer geteld wordt.

2. Bewijs dat alle construeerbare punten in het platte vlak ook aftelbaar zijn (zie Pythagoras nr. 2, Passer en liniaal).

Cantor's Diagonaalargument

De rationale getallen zijn niet de enige getallen op de getallenlijn. Neem bijvoorbeeld $\sqrt{2}$, dit is geen breuk (zie Pythagoras nr. 1, Wortel 2 is niet rationaal). Alle getallen op de getallenlijn vormen samen de reëele getallen. Elk reëel getal kun je schrijven als een oneindig voortlopende decimale breuk. Bijvoorbeeld: $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$

We vragen ons nu af: zijn de reëele getallen aftelbaar? Het antwoord hierop werd gegeven door de wiskundige Cantor. In 1874 schokte hij de wiskundige wereld met de bewering dat de reëele getallen *niet* aftelbaar zijn. Het meest gangbare bewijs hiervan staat bekend als het 'Diagonaalargument van Cantor'. Het is een bewijs uit het ongerijmde, dat wil zeggen, we nemen aan dat de reëele getallen wèl aftelbaar zijn en leiden daaruit een tegenspraak af.

Neem aan dat we een of andere aftelling van de reëele getallen hebben, bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \mathbf{0}{,}000000000\ldots\\
r_2 &= 1{,}\mathbf{0}00000000\ldots\\
r_3 &= 1{,}1\mathbf{5}5727349\ldots\\
r_4 &= 1{,}25\mathbf{9}921049\ldots\\
r_5 &= 1{,}414\mathbf{2}13562\ldots\\
r_6 &= 1{,}7320\mathbf{5}0807\ldots\\
r_7 &= 2{,}23606\mathbf{7}977\ldots\\
r_8 &= 2{,}718281\mathbf{8}28\ldots\\
r_9 &= 3{,}1415926\mathbf{5}3\ldots\\
r_{10} &= 5{,}85987448\mathbf{2}\ldots\\
\vdots &\quad \vdots
\end{aligned}$$

We maken nu een getal dat niet in deze aftelling voorkomt. Het idee is te kijken naar de (vetgedrukte) cijfers op de diagonaal van deze rij. Deze cijfers vormen samen het getal $\mathbf{0{,}059257852}\ldots$ We maken hieruit een oneindig voortlopende decimale breuk door bij al deze cijfers 1 op te tellen, behalve bij de cijfers 8 en 9, daar trekken we juist 1 van af. We veranderen dus de 0 in een 1, de 5 in een 6, de 9 in een 8, enzovoort. We krijgen zo het getal

$$x = \mathbf{1{,}168368763}\ldots$$

Je ziet dat dit getal x ongelijk is aan de eerste tien getallen in de rij, maar het is zelfs ongelijk aan àlle getallen in de rij! Dit kun je op de volgende manier controleren. Neem bijvoorbeeld r_3; omdat de derde decimaal van r_3 een 5 is en die van x één groter, is x verschillend van r_3. Evenzo geldt $x \neq r_4$, want kijk maar naar de vierde decimaal; die van r_4 is een 9 en die van x is één kleiner. Dus x komt niet in de aftelling voor en dit is in tegenspraak met de aanname dat de reëele getallen aftelbaar zouden zijn. Conclusie: de reëele getallen zijn niet aftelbaar.

Waarom hebben we de 8 niet in een 9 en de 9 niet in een 0 veranderd? Wel, dan zou het bewijs niet meer sluitend geweest zijn! Dit is omdat sommige reëele getallen *twee* verschillende decimale schrijfwijzen hebben, eentje die in nullen eindigt en eentje die in negens eindigt. Bijvoorbeeld: $0{,}999\ldots = 1{,}000\ldots$ Wanneer je in $0{,}999\ldots$ de 0 in een 1 verandert en de 9 in een 0, dan verandert wel de decimale schrijfwijze, maar het getal zelf niet! ◢