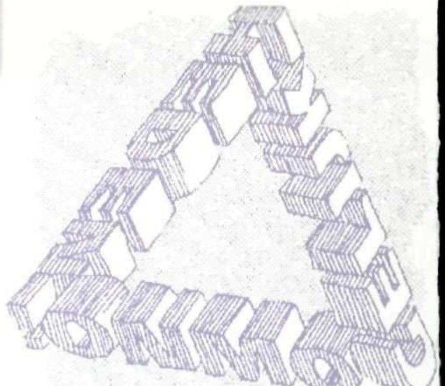


De Griekse wiskundige Euclides baseerde 2300 jaar geleden zijn vlakke meetkunde op vijf uitgangspunten. Ongeveer 2200 jaar lang heeft men geprobeerd aan te tonen dat het laatste uitgangspunt niet echt nodig was.

Het vijfde postulaat

Klaas Pieter Hart

Euclides was een Griek. Van hem weten we alleen dat hij in Alexandrië leefde rond 300 voor Christus. Zijn beroemdste werk is een dertiental boeken die samen de *Elementen* worden genoemd. In deze boeken presenteert Euclides op een systematische manier de wiskundige kennis van zijn tijd.

De Elementen beginnen met een opsomming van een aantal 'principes'. Dit zijn uitspraken die niet bewezen worden. Ze worden verondersteld waar te zijn, en van daaruit kunnen andere uitspraken bewezen worden. In de Elementen maakte Euclides onderscheid tussen *definities*, *postulaten* en *algemene inzichten*:

Definities

1 Een punt is, wat geen deel heeft.

2 Een lijn is breedteloze lengte.

3 De uiteinden van een lijnstuk zijn punten.

4 Een rechte lijn is een lijn die gelijk ligt met de punten erop.

⋮

23 Parallel zijn lijnen die in hetzelfde vlak gelegen zijn en die, wanneer naar weerszijden tot in het oneindige verlengd, elkaar aan geen van beide zijden snijden.

Postulaten

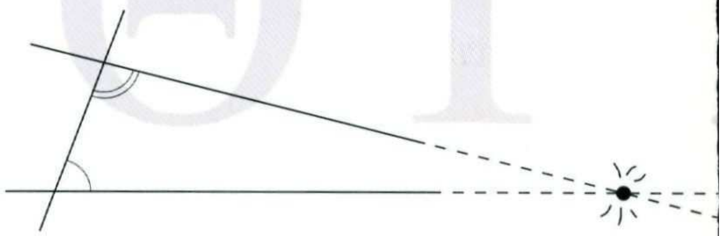
1 Door twee punten gaat één rechte lijn.

2 Elk lijnstuk kan willekeurig ver worden verlengd.

3 Elk middelpunt en elke straal beschrijven een cirkel.

4 Alle rechte hoeken zijn gelijk.

5 Als een rechte lijn twee andere rechte lijnen snijdt zodat de binnenhoeken aan één kant samen minder dan 180° zijn, dan snijden deze twee lijnen, wanneer tot in het oneindige verlengd, elkaar aan diezelfde kant.



Algemene inzichten

1 Dingen, beide gelijk aan iets anders, zijn ook aan elkaar gelijk.

2 Als men gelijke dingen optelt bij gelijke dingen, dan zijn de totalen ook gelijk.

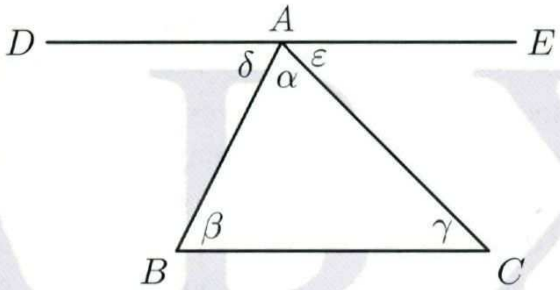
⋮

8 Het geheel is groter dan het deel.

Tegenwoordig wordt een dergelijk onderscheid niet meer op deze manier gemaakt, en in de moderne meetkunde worden Euclides' definities heel anders geformuleerd. Wat de Elementen zo beroemd maakte, is de axiomatische onderbouwing van de

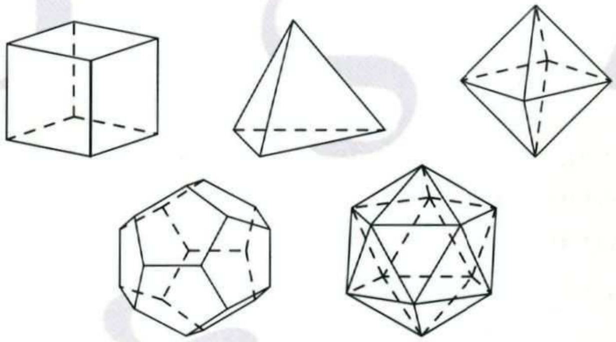
meetkunde en dat er stellingen bewezen worden uitgaande van axioma's. De vijf postulaten zijn de axioma's van de Euclidische meetkunde.
In de eerste zes boeken bewijst Euclides stellingen uit de meetkunde van het platte vlak. We nemen een voorbeeld uit het eerste boek:
Stelling 32. *In elke driehoek is de som van de drie hoeken gelijk aan* 180°.

In de Elementen geeft Euclides van elke stelling een bewijs. Zijn bewijs van Stelling 32 gaat ongeveer als volgt:



Bewijs. In de driehoek *ABC* trekken we door *A* de lijn *DE* parallel aan *BC*. Omdat *DABC* een *Z*-figuur is, is β gelijk aan δ. Op dezelfde manier is γ gelijk aan ε. De som van de hoeken van de driehoek is dus $\delta+\alpha+\varepsilon$, en daarom gelijk aan 180°.

In het bewijs beroept Euclides zich op eerder bewezen stellingen om elke stap te rechtvaardigen. Voor het trekken van *DE* beroept hij zich op Stelling 31. Dat in de eerste *Z*-figuur de binnenhoeken β en δ gelijk zijn, is al eerder bewezen, in Stelling 29. En in het bewijs van die stelling past hij weer eerdere stellingen toe, net zo lang tot alleen nog maar een beroep gedaan wordt op de postulaten.



Figuur 1: de vijf regelmatige veelvlakken

De Elementen bevatten veel bekende stellingen uit de middelbare-school wiskunde: zo komen we de stelling van Pythagoras tegen in Stelling 47. Behalve over vlakke meetkunde gaan de Elementen over rekenen met getallen (boek 7-10) en over ruimtemeetkunde (boek 11-13). Boek 13 eindigt met regelmatige veelvlakken, Euclides construeert daarin de vijf bekende regelmatige veelvlakken (tetraëder, oktaëder, kubus, dodecaëder en icosaëder, zie figuur 1) en bewijst ook dat er geen andere bestaan.

Het parallellenpostulaat

Het vijfde postulaat staat ook bekend als het *parallellenpostulaat*. Dit postulaat is langer en ingewikkelder dan de overige vier postulaten. Euclides onderkende de speciale status van dit postulaat en probeerde het gebruik ervan zolang mogelijk te vermijden; in de bewijzen van de eerste 28 stellingen van de Elementen wordt het vijfde postulaat niet gebruikt.
Tot in de negentiende eeuw werd gedacht dat het vijfde postulaat eigenlijk niet nodig was, dat het een logisch gevolg was van de andere vier. Zo schreef in de vijfde eeuw na Christus de wiskundige Proclus een commentaar op de Elementen, waarin

hij een aantal pogingen bespreekt om het vijfde postulaat uit de andere vier af te leiden. In het bijzonder noemt hij Ptolemeus, wiens afleiding incorrect was. Vervolgens geeft hij zelf ook een incorrecte afleiding. Ook vermeldt hij de volgende versie van het vijfde postulaat, dat tegenwoordig bekend staat als *Playfair's axioma* (naar John Playfair, die in 1795 een beroemd commentaar op de Elementen schreef):

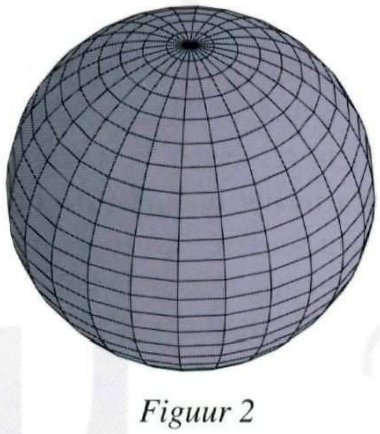
5′ Gegeven een lijn en een punt niet op die lijn, dan is er precies één lijn door dat punt parallel met de oorspronkelijke lijn.

Uit de postulaten 1, 2, 3, 4 en 5′ volgt eenvoudig het vijfde postulaat. Wanneer je het vijfde postulaat vervangt door Playfair's axioma, dan kun je dus nog steeds alle stellingen van de Euclidische meetkunde afleiden.

In de loop van de geschiedenis zijn er heel veel pogingen gedaan om het vijfde postulaat af te leiden uit de overige vier, en veel van die pogingen zijn lange tijd geaccepteerd als bewijs — totdat de fout gevonden werd. De fout was steeds dezelfde: er werd een 'voor de hand liggende' eigenschap gebruikt, die achteraf gelijkwaardig bleek te zijn aan het vijfde postulaat. Zo dacht in 1663 Wallis het vijfde postulaat afgeleid te hebben, door de volgende 'voor de hand liggende' eigenschap te gebruiken: *voor elke driehoek bestaat er een grótere driehoek, die gelijkvormig is aan de eerste.* De Franse wiskundige Legendre (1753-1833) besteedde 40 jaar van zijn leven aan het 'bewijzen' van het vijfde postulaat, maar ook hij faalde. De eerste wiskundige die inzag dat het vijfde postulaat onafhankelijk moest zijn van de overige vier was Gauss. In 1817 begon hij de consequenties uit te werken van een meetkunde waarin meer dan één lijn parallel is met een gegeven lijn.

Bolmeetkunde

In de definities van de Elementen zegt Euclides niet precies wat rechte lijnen zijn. Hij had het gewone platte vlak voor ogen, maar nergens in de Elementen staat dit expliciet. De definities laten daarom ruimte voor andere soorten meetkunde. Voorbeelden daarvan zijn de zogenaamde *hyperbolische meetkunde* (ontdekt door Bolyai en Lobachevsky in het midden van de vorige eeuw) en de *elliptische meetkunde*. Beide soorten meetkunde voldoen aan de postulaten 1–4, maar niet aan Playfair's axioma. Bij de hyperbolische meetkunde gaan er bij een gegeven lijn en een punt dat niet op die lijn ligt, *meerdere* parallelle lijnen door dat punt. Bij de elliptische meetkunde gaat er bij een gegeven lijn en een punt niet op die lijn *geen enkele* parallelle lijn door dat punt. De ontdekking van de hyperbolische meetkunde leverde het eerste bewijs dat het onmogelijk is het parallellenpostulaat af te leiden uit de postulaten 1–4.
Beide genoemde soorten meetkunde zijn



Figuur 2

niet in een paar woorden te beschrijven. We zullen daarom een soort meetkunde bespreken die lijkt op de elliptische meetkunde, maar veel eenvoudiger is, namelijk de meetkunde van het boloppervlak (zie figuur 2).

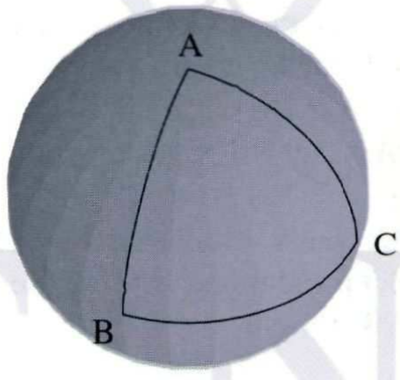
Op een boloppervlak hebben we punten en lijnen. Zijn er ook *rechte* lijnen? In het platte vlak is een recht lijnstuk de kortste verbinding tussen twee punten. Op de bol loopt de kortste verbinding tussen twee punten over een *grote cirkel*, dat is een cirkel die het boloppervlak in twee halfronden verdeelt. Bijvoorbeeld, de evenaar is een grote cirkel, evenals de meridianen die de noord- en zuidpool verbinden. De grote cirkels op het boloppervlak zijn de 'rechte lijnen' van de bolmeetkunde.

We hebben nu punten, rechte lijnen en lijnstukken, dus kunnen we ook driehoeken maken op het boloppervlak. Een heel klein driehoekje op een heel groot boloppervlak is praktisch plat. De hoeken van zo'n klein driehoekje zijn daarom samen praktisch 180°. Maar bekijk nu eens op de bol de volgende grote driehoek (zie figuur 3). Punt A ligt op de noordpool; het punt B op de evenaar, op 90 graden westerlengte en het punt C ligt op de evenaar en de nulmeridiaan.

Wat is nu zo bijzonder aan deze driehoek? Alle hoeken zijn 90°, zodat de hoeken samen 270° en geen 180° zijn. Hoe kan dat? Blijkbaar is op het boloppervlak Euclides' Stelling 32 niet waar. Maar dat betekent dat op de bol de meetkunde van Euclides niet geldig is.

Dat Euclides niet aan het aardoppervlak dacht, kun je aan de definities niet goed zien. Ook een grote cirkel 'ligt gelijk met de punten erop'; eigenlijk is het zonder plaatje helemaal niet duidelijk wat definitie 4 betekent, en zou een grote cirkel net zo goed als rechte lijn opgevat kunnen worden.
Met deze definities gelden de eerste vier postulaten van Euclides slechts gedeeltelijk op het boloppervlak. Zo gaat door bijna elk tweetal punten precies één grote cirkel — alleen voor twee precies tegenover elkaar liggende punten gaat dit niet op. Neem bijvoorbeeld de noord- en zuidpool, daardoor gaan veel meer grote cirkels. Gelden op de bol de eerste vier postulaten slechts gedeeltelijk, Playfair's axioma is helemaal fout: op de bol snijden elke twee grote cirkels elkaar!

Ellipische meetkunde is een 'verbeterde' versie van de bolmeetkunde, waarin de eerste vier postulaten helemaal gelden en Playfair's axioma niet. De elliptische meetkunde toont daarom aan dat je Playfair's axioma *niet* uit de eerste vier postulaten van Euclides kan afleiden. Analoog volgt uit de hyperbolische meetkunde dat het vijfde postulaat *geen* logisch gevolg is van de postulaten 1–4. ◢



Figuur 3