Een zwanenhals, een royale krul, een sierlijk lint – het integraalteken is een van de mooiste wiskundige tekens. Hoe oud deze notatie is, weten we exact: op 29 oktober 1998 vieren we de 323ste verjaardag.

Het integraalteken

Klaas Pieter Hart

Het uitrekenen van oppervlakten is altijd een belangrijke bezigheid van wiskundigen geweest. Meestal deed men dat door een gebied in kleine stukjes te verdelen waarvan de oppervlakte makkelijk uit te rekenen was (rechthoekjes, driehoekjes) en die oppervlakten bij elkaar op te tellen.

De Italiaanse wiskundige Cavalieri berekende voor het eerst de oppervlakte onder de grafieken van $x^2, x^3, \ldots, x^9$. Cavalieri leidde zijn formules af door 'alle lijnen bij elkaar te nemen'. Als hij een oppervlakte uit ging rekenen (zie p. 15), dan sprak hij over omnes lineae (alle lijnen).

De Duitse geleerde Leibniz gebruikte daarom aanvankelijk de afkorting omn. als hij het over de oppervlakte onder een grafiek had. In aantekeningen die hij op 29 oktober 1675 maakte vinden we de formule

$$\frac{\overline{\text{omn.}\, l^{\boxed{2}}}}{2} \sqcap \text{omn.}\, \overline{\overline{\text{omn.}\, l}\, l}.$$

Leibniz gebruikte $\sqcap$ als gelijkteken; voordat we de rest ontcijferen laten we Leibniz zelf aan het woord: *Het is handig om* $\int$ *te schrijven in plaats van* omn, *dus* $\int l$ *voor* omn l, *want dat is de* $\int$*om van de l-en.*

We krijgen dus

$$\frac{\int l^2}{2} \sqcap \int \int l\, l.$$

Dit ziet er al iets bekender uit; links staat het kwadraat van $\int l$ (blijkbaar stond de $\boxed{2}$ voor kwadrateren), gedeeld door twee.
Als we $\int l$ afkorten met y dan staat er rechts $\int yl$. Nu zijn we er bijna. Er staat blijkbaar $y^2/2 = \int yy'$, want als $y = \int l$ dan moet l wel y' zijn. Tegenwoordig zouden we het schrijven als

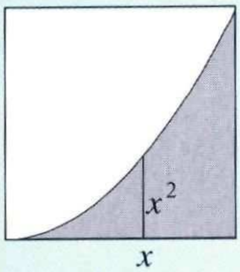
$$\tfrac{1}{2} y^2(x) = \int y(x) y'(x)\, dx.$$

Dit niets anders dan een speciaal geval van de substitutieregel. De dx-notatie had Leibniz op dat moment nog niet bedacht; die kwam een paar weken later, op 11 november 1675.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)

De methode van Cavalieri

Hoe bepaalde Cavalieri in 1635 de oppervlakte onder de grafiek van x^n? Hij formuleerde zijn resultaat als volgt: de oppervlakte van de omhullende rechthoek is precies $n + 1$ keer zo groot als de oppervlakte onder de grafiek van x^n.



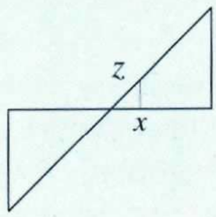
We gaan Cavalieri's redenering volgen voor $n = 2$. We bekijken voor $0 \leq x \leq 1$ de grafiek van x^2. De oppervlakte onder de grafiek krijgen we door 'alle lijnen' onder die grafiek bij elkaar te nemen; we schijven dat als $\sum x^2$ ($\sum$ is Sigma, de Griekse letter S, die voor som staat). Ons probleem is de som $\sum x^2$ uit te rekenen. Welnu, we korten $1 - x$ even af met y. Dan is $x + y$ altijd 1. De oppervlakte van het hele vierkant is gelijk aan 1 en ook aan $\sum 1$ want we krijgen het door alle lijnen bij elkaar te nemen.
We zien dat

$$\sum (x + y)^2 = \sum 1^2 = 1.$$

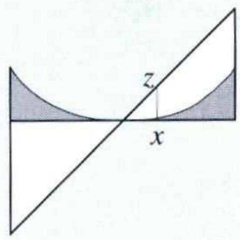
Werk $(x + y)^2$ uit tot $x^2 + 2xy + y^2$, dan krijgen we $\sum x^2 + 2\sum xy + \sum y^2 = 1$. Merk nu op dat $\sum x^2 = \sum y^2$: elke x komt een keer als y voor en omgekeerd. We vinden dus $2\sum x^2 + 2\sum xy = 1$. Om $\sum xy$ uit te rekenen schrijven we $x = \frac{1}{2} + z$ en $y = \frac{1}{2} - z$;
we vinden

$$\sum xy = \sum (\tfrac{1}{2} - z^2) = \tfrac{1}{2} - \sum z^2.$$

Nu moeten we $\sum z^2$ nog uitrekenen. Als we naar de grafiek van z kijken zien we dat z twee keer een driehoekje doorloopt dat gelijkvormig is met de driehoek die x doorloopt maar dan wel half zo breed en half zo hoog als die van x.



Cavalieri concludeerde daarom dat voor zowel het linker als het rechter driehoekje de gelijkheid $\sum z^2 = \frac{1}{8}\sum x^2$ op moet gaan. Immers: voor één zo'n driehoekje krijg je $\sum z^2$ uit $\sum x^2$ door alle x-en met een factor $\frac{1}{2}$ te schalen. De lijntjes worden half zo dik en half zo hoog en omdat elke x in de hoogte gekwadrateerd is krijgen we in totaal een factor $\frac{1}{8}$.



Hieruit volgt dan

$$\sum z^2 = \tfrac{1}{8}\sum x^2 + \tfrac{1}{8}\sum x^2 = \tfrac{1}{4}\sum x^2.$$

Nu zijn we er: $\sum xy = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sum x^2$ en dus:

$$1 = 2\sum x^2 + 2\sum xy = \tfrac{3}{2}\sum x^2 + \tfrac{1}{2}.$$

Daaruit leiden we af dat $\sum x^2 = \frac{1}{3}$. Dit is precies wat Cavalieri beweerde: de oppervlakte onder de grafiek is eenderde van de oppervlakte van het omhullende vierkant. ◢

Literatuur

Dirk J. Struik, A source book in mathematics