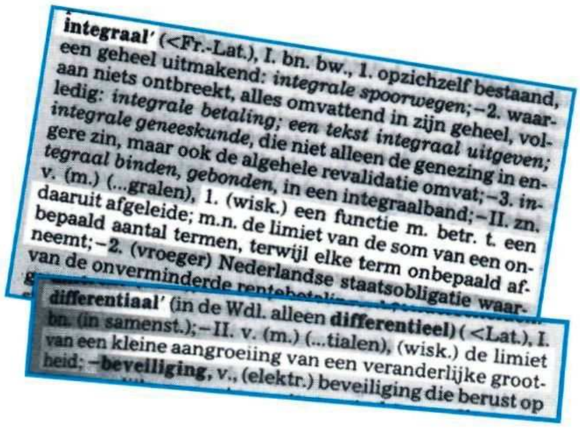
∂ifferentiaal en ∫ntegraal



integraal′ (<Fr.-Lat.), I. bn. bw., 1. opzichzelf bestaand, een geheel uitmakend: *integrale spoorwegen*;–2. waaraan niets ontbreekt, alles omvattend in zijn geheel, volledig: *integrale betaling; een tekst integraal uitgeven; integrale geneeskunde*, die niet alleen de genezing in engere zin, maar ook de algehele revalidatie omvat;–3. *integraal binden, gebonden*, in een integraalband;–II. zn. v. (m.) (...gralen), 1. (wisk.) een functie m. betr. t. een daaruit afgeleide; m.n. de limiet van de som van een onbepaald aantal termen, terwijl elke term onbepaald afneemt;–2. (vroeger) Nederlandse staatsobligatie waarvan de onverminderde rentebetaling ...

differentiaal′ (in de Wdl. alleen **differentieel**) (<Lat.), I. bn. (in samenst.);–II. v. (m.) (...tialen), (wisk.) de limiet van een kleine aangroeiing van een veranderlijke grootheid; **–beveiliging**, v., (elektr.) beveiliging die berust op

Klaas Pieter Hart

Als je in een woordenboek de woorden ‘differentiëren’ en ‘integreren’ opzoekt, vind je naast de wiskundige ook nog andere betekenissen. Voor differentiëren vind je dingen die met verschillen te maken hebben, voor integreren dingen die met iets geheels te maken hebben. Dat is geen toeval want *differentia* is Latijn voor verschil en *integer* betekent geheel. *Integer* leeft in het Engels en in programmeertalen nog voort als ‘geheel getal’.

Volgens *van Dale* betekent differentiëren “de differentiaal, respectievelijk het differentiaalquotiënt bepalen”. Maar wat is een differentiaal?

Differentiëren

Het correct definiëren van wat een differentiaal is heeft de wiskundigen sinds het einde van de zeventiende eeuw bezig gehouden. Het intuïtieve antwoord werd gegeven door Leibniz, een van de ontdekkers van de differentiaal- en integraalrekening: ‘een oneindig klein verschil’. Leibniz gebruikte eerst het bovengenoemde *differentia*, maar voerde later het woord differentiaal in omdat het toch niet over echte verschillen ging.

Om aan te geven wat Leibniz bedoelde bekijken we hoe hij de raaklijn aan de grafiek van $y = x^2$ in het punt (a, a^2) bepaald zou kunnen hebben. Kies een punt b oneindig dicht bij a en bereken het verschil: $b^2 - a^2 = (b + a)(b - a)$ en deel dit door $b - a$. Er komt uit $b + a$ en dat is gelijk aan $2a$ omdat $b - a$ oneindig klein is. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is dus $2a$.

Deze redenering deugde niet helemaal, want als $b + a = 2a$ dan moet $b - a = 0$, maar dan hebben we zojuist 0 gedeeld door 0. Aan de andere kant, de methode gaf meestal wel het goede antwoord; er moest dus wel iets deugdelijks achter zitten.

Tegenwoordig differentiëren we $f(x) = x^2$ door keurig een limiet te nemen:

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \lim_{b \to a} b + a = 2a.$$

Integreren

Voor Leibniz was de oppervlakte onder de grafiek van een functie gelijk aan de som van oneindig veel oneindig smalle rechthoekjes. Hij noemde de integraalrekening in het begin *calculus summatorius* (sommeer-rekening) en voerde de ∫ (een langgerekte s) in als symbool voor de oppervlakte.

Het waren de broers Johann en Jacob Bernoulli die de term *calculus integralis* (integraalrekening) voorstelden omdat ze vonden dat je bij het bepalen van de oppervlakte de rechthoekjes van Leibniz tot één geheel samenvoegt.