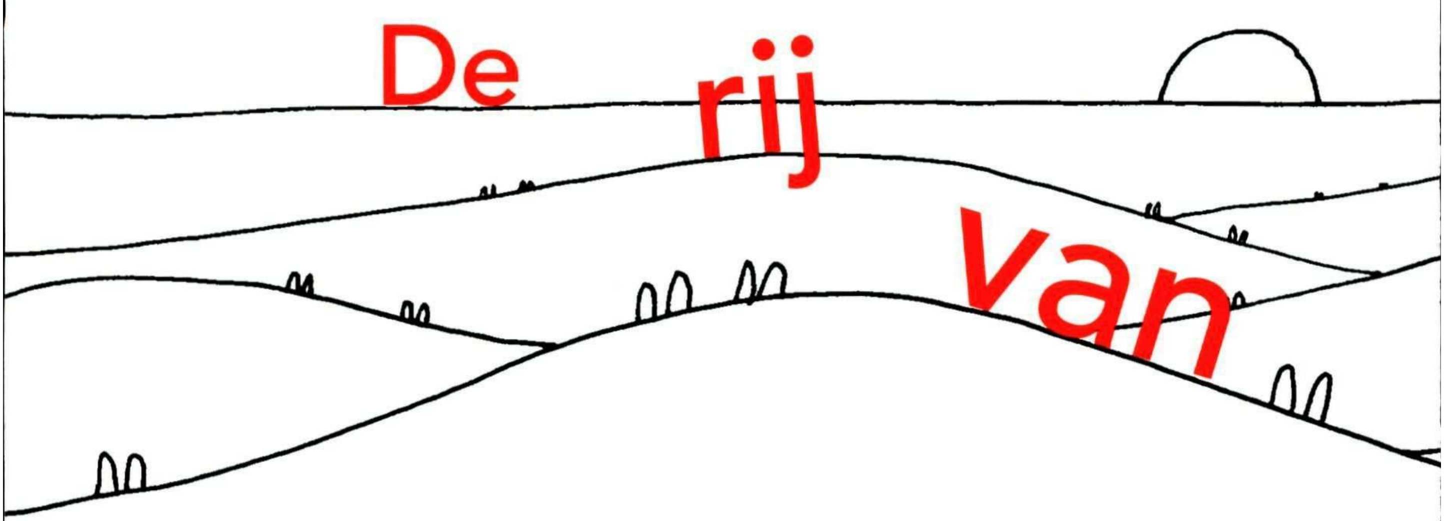
De rij van



Klaas Pieter Hart

Bij wiskunde horen formules. Mooie formules vormen het onderwerp van een nieuwe rubriek in Pythagoras. Deze keer: de rij van Fibonacci, een getallenrij die al bijna 800 jaar oud is. Toch worden er nog altijd eigenschappen van ontdekt. Wij leiden een verrassende formule af die deze rij precies beschrijft.

In 1202 schreef Leonardo van Pisa een rekenboek, *Liber Abaci* geheten. Daarin beschreef hij een heleboel rekenkunde. Opmerkelijk was dat Leonardo consequent de decimale schrijfwijze toepaste; dat was in die tijd een nieuwigheid uit de Arabische wereld. Het boek is onsterfelijk geworden door deze onschuldig klinkende opgave: *Hoeveel paren konijnen kan men uit één paar in één jaar fokken?*
Een man heeft een paar konijnen in een ommuurde tuin. We willen weten hoeveel paar konijnen in één jaar gefokt kunnen worden uit dit paar, als elk paar konijnen elke maand een nieuw paar voortbrengt en wel vanaf de tweede maand na hun geboorte.
Leonardo beschreef hoe je het aantal paren konijnen in de twaalfde maand kunt uitrekenen. Neem aan dat het eerste paar al kinderen kan krijgen; dat betekent dat we in de eerste maand twee paar konijnen zullen hebben. In de tweede maand krijgt het eerste paar weer kinderen; we hebben dan drie paren. Van deze krijgen twee paren in de derde maand kinderen zodat we dan vijf paren hebben.
Zo doorgaand vinden we achtereenvolgens $8 = 5 + 3$, $13 = 8 + 5$, $21 = 13 + 8$, $34 = 21 + 13$, 55, 89, 144, 233 en 377 paren konijnen.
Deze getallen vormen het begin van de rij van Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 55, 89, 144, 233, 377,...

Het recept dat Leonardo gebruikte om de aantallen paren konijnen in elke maand uit te rekenen is eenvoudig: tel de aantallen uit de voorgaande twee maanden bij elkaar op. In een formule:

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}$$

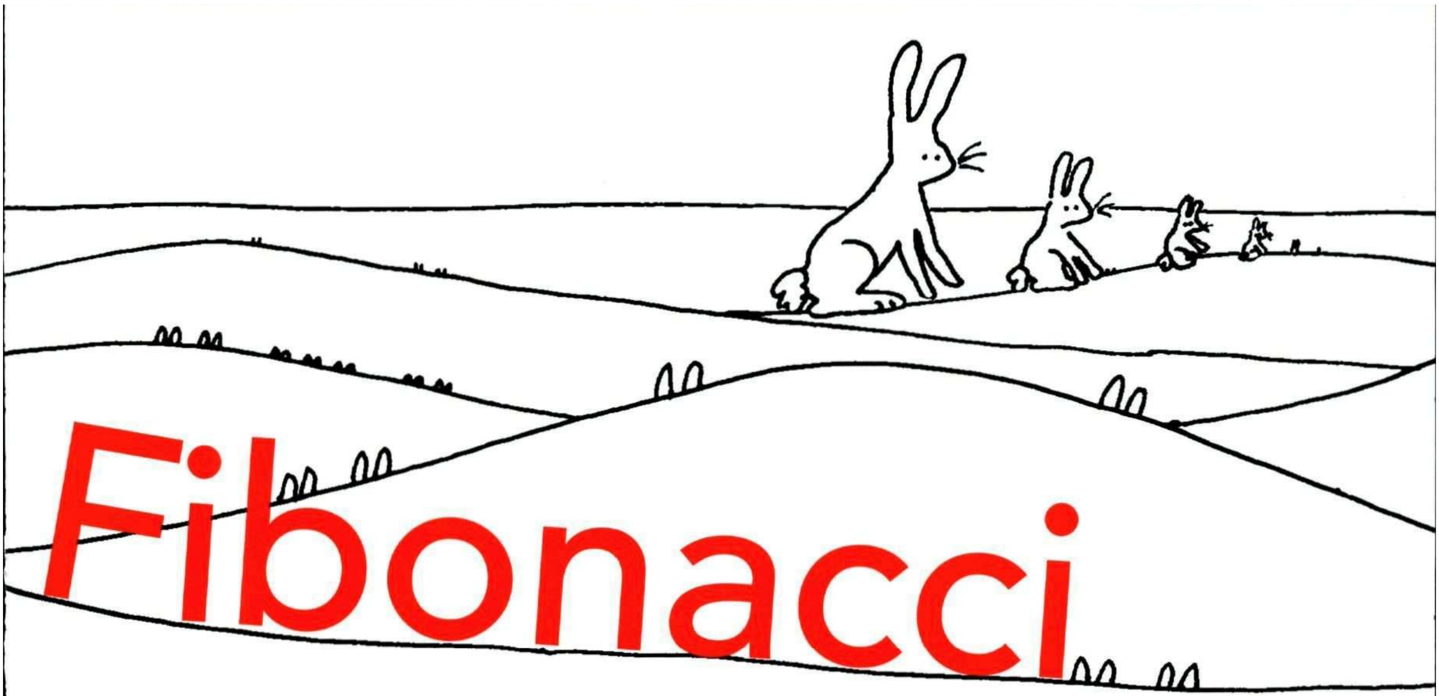
Voor een groot aantal maanden kost dit nogal wat rekenwerk. Zelfs op een rekenmachine moet je flink wat toetsen aanslaan om het aantal paren konijnen in de zevenendertigste maand te bepalen. Probeer het maar eens.

Een formule

Het is echter mogelijk om voor het aantal konijnen K_n in maand n een formule op te schrijven, namelijk:

$$K_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+2} - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+2}\right).$$

Als je het niet gelooft moet je K_1 en K_2 maar eens uitrekenen. Je zult zien dat er echt 2 en 3 uit komt. Het wonderbaarlijke van deze formules is dat hij een rij *gehele* getallen beschrijft met behulp van breuken en wortels — zoiets verwacht je helemaal niet.



Fibonacci

Snel Fibonacci-getallen uitrekenen

Je kunt proberen de formule te controleren door meer waarden van n in te vullen, maar dat wordt na een tijdje vervelend. Met een beetje rekenwerk kom je er achter dat de getallen die door de formule gegeven worden aan dezelfde regel voldoen als de aantallen paren konijnen: $K_n = K_{n-1} + K_{n-2}$.
We weten al dat $K_1 = 2$ en $K_2 = 3$; dus geldt ook $K_3 = 5$, $K_4 = 8$, enzovoort. Hiermee is het snel uitrekenen van K_n eenvoudig geworden.

Het getal $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ is ongeveer gelijk aan $-0{,}62$ en gedeeld door $\sqrt{5}$ is dat ongeveer $-0{,}2764$; dit betekent dat $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})^{n+2}/\sqrt{5}$ in absolute waarde altijd kleiner is dan $1/2$. Om K_n uit te rekenen hoeven we daarom alleen $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^{n+2}/\sqrt{5}$ te bepalen en dan af te ronden. Dat zie je er aan het begin niet aan af. Bereken hiermee eens K_{37}.

Het afleiden van de formule

Onze formule voor K_n werd al in 1765 door Euler gegeven en werd in 1843 door Binet herontdekt. Eén van de manieren om de formule te vinden gaat als volgt.
Je zoekt getallen λ waarvan het rijtje machten λ, λ^2, λ^3,... aan de konijnenrelatie $K_{n+1} = K_n + K_{n-1}$ voldoet.
De vergelijking $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$ die je dan krijgt heeft drie oplossingen: één flauwe, $\lambda = 0$, en twee minder flauwe, die je krijgt door λ^{n-2} weg te delen.
Je houdt dan $\lambda^2 = \lambda + 1$ over.
Deze vergelijking heeft twee oplossingen:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad \text{en} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Het grappige is dat niet alleen λ_1^n en λ_2^n aan de relatie voldoen maar ook $\lambda_1^n + \lambda_2^n$ en $10\,\lambda_1^n - 5\,\lambda_2^n$ en nog veel meer combinaties.
Het is niet moeilijk een combinatie te vinden die precies de aantallen paren konijnen beschrijft. Om het rekenwerk makkelijker te maken zoeken we getallen a en b zó dat $F_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$ voldoet aan $F_0 = 0$ en $F_1 = 1$. Dan geldt $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, enzovoort. Dit geeft $a + b = 0$, dus $b = -a$, en $a\lambda_1 + b\lambda_2 = 1$, ofwel $a(\lambda_1 - \lambda_2) = 1$. Hieruit volgt $a = 1/\sqrt{5}$ en dus:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right).$$

Fibonacci

De rij 1, 2, 3, 5, 8, ... wordt genoemd naar Leonardo van Pisa, die de bijnaam *Fibonacci* had. Zijn vader heette namelijk Bonaccio en *filius Bonacci* werd afgekort tot Fibonacci — een bijnaam die overigens pas uit de negentiende eeuw schijnt te stammen. De Fibonacci-getallen zijn nog steeds populair; er is zelfs een wetenschappelijk tijdschrift gewijd aan deze en aanverwante getallen: *The Fibonacci Quarterly*.