De jonge Gauss wist al hoe je de getallen van 1 tot en met 100 in een mum van tijd bij elkaar op kan tellen – een handig rekentrucje geeft in een keer het antwoord. Dezelfde truc geeft ook een mooie formule voor driehoeksgetallen.

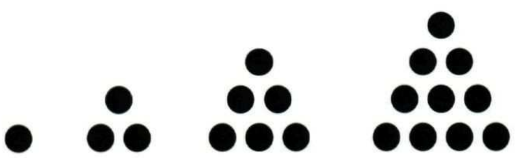
Een formule voor d

Klaas Pieter Hart

Over de grote wiskundige Gauss (1777-1855) doet de volgende anecdote de ronde: de leraar op school wilde zijn klas even zoet houden en gaf zijn leerlingen de opdracht de getallen van 1 tot en met 100 bij elkaar op te tellen. Iedereen begon hard te cijferen, behalve de jonge Carl Friedrich Gauss, die na even nadenken het getal 5050 op zijn lei schreef.
Op de vraag hoe hij dat gedaan had antwoorde hij: "Nou, $100 + 1 = 101$, $99 + 2 = 101$, ..., $50 + 51 = 101$. Het antwoord is dus $50 \times 101 = 5050$"

Driehoeksgetallen

Of het verhaal waar is is niet geheel duidelijk, vooral omdat Gauss het zelf de wereld in gebracht schijnt te hebben.
Wat Gauss in feite ontdekte, was de formule voor driehoeksgetallen. Een *driehoeksgetal* krijg je door een gelijkzijdige driehoek regelmatig met stippen te vullen.



Figuur 1. De eerste vier driehoeksgetallen

Zoals je ziet in figuur 1 zijn de eerste vier driehoeksgetallen gelijk aan 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$ en $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Een driehoek met n stippen langs elke zijde heeft $1 + 2 + \ldots + n$ stippen. Dit is het n-de driehoeksgetal. Wat Gauss uitrekende, was het honderdste driehoeksgetal: 5050 stippen.

Een formule

Werkt de methode van Gauss voor elk getal? Als n even is wel. Om $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ uit te rekenen, tellen we het grootste getal n op bij 1, het een na grootste getal n-1 bij 2, enzovoort. We krijgen dan achtereenvolgens $n + 1$, $(n-1) + 2$, $(n - 2) + 3$, et cetera. Steeds krijgen we $n + 1$ en dat $n/2$ keer. Zo krijgen we, voor even n, een formule voor het n-de driehoeksgetal:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Als n oneven is, werkt deze methode niet. Neem bijvoorbeeld $n = 5$. We kunnen dan 5 bij 1 optellen, en 4 bij 2, maar dan houden we het middelste getal 3 over.
Dit gebeurt ook in het algemene geval: je krijgt $(n - 1)/2$ keer $n + 1$, en je houdt het middelste getal $(n + 1)/2$ over. Als je alles optelt komt het echter mooi uit: $1/2\ (n - 1)$

$$\frac{1}{2}(n-1)(n+1) + \frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Ook voor oneven n geldt dus de formule:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Conclusie. Of n nu even is of oneven, we krijgen een en dezelfde formule voor het n-de driehoeksgetal: $\frac{1}{2}n(n + 1)$.

In één klap

Wiskundig is het niet erg bevredigend om een onderscheid te moeten maken tussen even en oneven n, terwijl de uitkomst in

riehoeksgetallen

beide gevallen hetzelfde is. Het kan echter veel mooier. We tellen het n-de driehoeksgetal bij zichzelf op en krijgen n keer $n + 1$:

$$\begin{array}{r} 1 + \quad 2 + \ldots + \quad n \\ n + n - 1 + \ldots + \quad 1 + \\ \hline n+1+n+1+\ldots+n+1 = n(n+1) \end{array}$$

Dus $2(1 + 2 + \ldots + n) = n(n+1)$, zodat:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

De som $1 + 2 + \ldots + n$ staat bekend als de 'rekenkundige reeks', en voor de uitkomst daarvan bestaat dus een mooie formule: $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Opdracht. Bereken het duizendste driehoeksgetal.

Hogere machten

Ook voor sommen van hogere machten zijn formules bedacht. In 1705 beschreef Jakob Bernoulli een methode die algemeen werkt. Zo vind je in zijn *Ars Conjectandi* de volgende formule voor $1 + 2^{10} + \ldots + n^{10}$:

$$\frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^{9} - n^{7} + n^{5} - \frac{1}{2}n^{3} + \frac{5}{66}n.$$

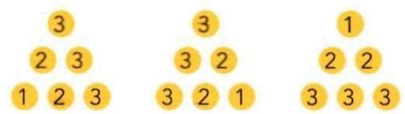
Bernoulli hield van opscheppen en schreef dat hij zo "in minder dan de helft van een kwartier" had uitgerekend dat $1 + 2^{10} + \ldots + 1000^{10}$ gelijk is aan:

91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500.

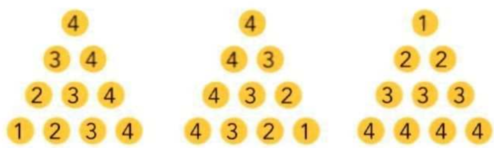
Hij verwees daarmee een boek naar de prullenmand dat zo'n tien jaar eerder was uitgekomen en dat voornamelijk bestond uit tabellen met sommen van machten.

Kwadraten en derde machten

De formules voor $1 + 2^2 + \ldots + n^2$ en $1 + 2^3 + \ldots + n^3$ kun je ook op een Gauss-achtige manier bedenken en bewijzen. De eerlijkheid gebiedt echter te zeggen dat die manieren pas achteraf bedacht zijn en dat daarbij naar het (reeds bekende) antwoord is toegewerkt.
Hieronder bijvoorbeeld zie je drie keer $1 + 2^2 + 3^2$:



En dit is drie keer $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2$:



Wat krijg je als je de driehoeken positie voor positie bij elkaar optelt?
Kun je op deze manier een formule voor $1 + 2^2 + \ldots + n^2$ afleiden? Dezelfde vraag voor $1 + 2^3 + \ldots + n^3$. De antwoorden vind je in het volgende nummer van Pythagoras.