De meetkun

door **Klaas Pieter Hart**

Rijstkorrels tellen en paradoxen ontrafelen; met de meet

In het decembernummer van de vorige jaargang van Pythagoras staat beschreven hoe de bedenker van het schaakspel voor zijn uitvinding beloond wilde worden. Voor het eerste vakje van het schaakbord één graankorrel, voor het tweede vakje twee korrels, voor het derde vakje vier, voor het vierde vakje acht enzovoort, voor elk vakje het dubbele van wat hij voor het vorige vakje kreeg. Als je opschrijft wat dat betekent kom je op $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{63}$ graankorrels.

Achilles en de schildpad

De bekende paradox van Zeno vertelt van de Griekse held Achilles, die een schildpad niet kan inhalen. Want als Achilles de plek bereikt waar de schildpad startte, is deze al wat opgeschoten. Als Achilles daar komt is de schildpad weer iets verder weg, enzovoort. Achilles moet oneindig veel stukjes overbruggen om de schildpad in te halen en dat kost oneindig veel tijd. Aan de andere kant: als we Achilles en de schildpad echt tegen elkaar laten lopen, zien we dat Achilles met gemak de schildpad in kan halen.

Laten we Zeno's verhaal eens in getallen vertalen. Neem, om de gedachten te bepalen, eens aan dat Achilles 2 m/s loopt en de schildpad met een snelheid van 1 m/s. Verder geven we de schildpad 2 meter voorsprong. Om tot het startpunt van de schildpad te komen heeft Achilles 1 seconde nodig — de schildpad is dan één meter verder. Om tot dat tweede punt te komen heeft Achilles een halve seconde nodig, maar dan is de schildpad alweer een halve meter verder.

Die halve meter kost Achilles een kwart seconde, waarin de schildpad een kwart meter verder komt. Als ze zo door blijven lopen zal Achilles

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

seconden nodig hebben om de schildpad in te halen.

Je ziet hier een som van machten van één en hetzelfde getal (machten van $\frac{1}{2}$), net als bij het schaakbord (machten van 2). Voor die som maken een mooie formule en we zullen ook laten zien hoe je die kunt gebruiken.

De formule

We zijn nu twee keer een som van de vorm $1 + x + x^2 + x^3 + ...$ tegen gekomen. De formule waar het ons deze keer om gaat is die voor $S = 1 + x + x^2 + ... + x^n$. Die bepalen we op bijna dezelfde manier als bij de rekenkundige reeks uit de vorige Pythagoras:

$$\begin{array}{rlr} xS = & x^{n+1} + x^n + \cdots + x & \\ S = & \qquad\;\; x^n + \cdots + x + 1 & - \\ \hline xS - S = & x^{n+1} \qquad\qquad\qquad - 1 & \end{array}$$

dige reeks

kundige reeks kun je heel verschillende dingen doen...

We concluderen dat $S(x-1) = x^{n+1} - 1$, zodat $S = (x^{n+1} - 1) / (x - 1)$. Dus:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

We kunnen ook kijken wat gebeurt als we n heel groot laten worden (de limiet voor n naar oneindig nemen). Als x niet al te groot is, gebeurt er iets interessants. Is namelijk $-1 < x < 1$, dan wordt voor grote n de waarde x^{n+1} heel klein. De term x^{n+1} in de formule voor S wordt steeds minder belangrijk en de oneindig lange som $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ krijgt dan een vaste, eindige waarde:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Twee voorbeelden:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1\frac{1}{2}.$$

Hoeveel graankorrels?

Het aantal rijstkorrels dat de bedenker van het schaakspel wilde hebben was $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$. Volgens onze formule is dat gelijk aan $2^{64} - 1$ rijstkorrels ($x = 2$ en $n = 63$).
Zoals in Pythagoras december 1999 beschreven stond, is dit een heel groot aantal. Helemaal uitgeschreven:

18.446.744.073.709.551.615.

Meer dan 18×10^{18} dus. Op mijn keukenweegschaal wegen 100 rijstkorrels ongeveer één gram. De bedenker van het schaakspel vroeg dus om meer dan 18×10^{16} gram rijst, meer dan 10^{11} ton! Ter vergelijking: de wereldproductie in 1989 – 1990 was 3.41×10^8 ton.

Opgave Stel je ouders het volgende voor: deze week krijg je één cent zakgeld, volgende week twee, dan vier, elke week het dubbele van de voorgaande week en zo een jaar lang. Wanneer zou je net zo rijk worden als Bill Gates?

De paradox weerlegd

Hoe zit het met Achilles en de schildpad? Achilles loopt 1 m/s harder dan de schildpad, die 2 meter voorsprong had. Na twee seconden heeft Achilles die voorsprong dus ingehaald.
Maar hoe zit het dan met de oneindige som? Die heeft, omdat $-1 < \frac{1}{2} < 1$, een eindige waarde! Vul $x = \frac{1}{2}$ maar in de formule in:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Dat is precies de tijd die we daarnet ook al hadden uitgerekend.
Met deze paradox probeerde Zeno aan te geven dat rekenen met 'oneindig' tot rare dingen kan leiden: oneindig veel tijdsintervallen bij elkaar optellen en toch een eindige tijdsduur overhouden.