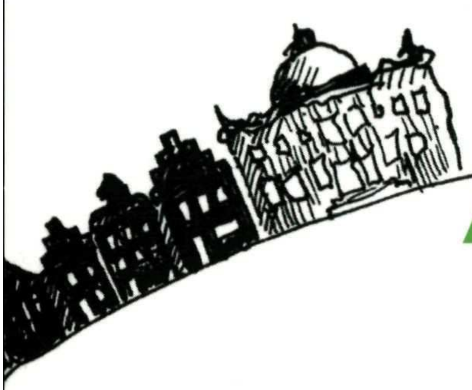


Van Amsterdam

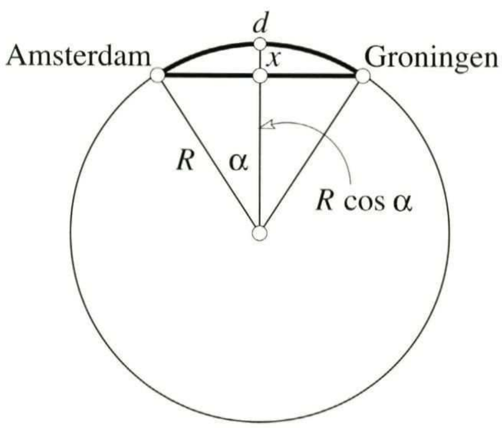
Voor kleine hoeken kun je de waarden van sinus en cosinus makkelijk schatten. We zullen zien hoe dat gaat en hoe je die schattingen kunt gebruiken.

Een tijdje geleden hoorde ik van iemand de volgende quizvraag:
Je boort een kaarsrechte tunnel van de Dam in Amsterdam naar de Martinitoren in Groningen (onderlinge afstand ongeveer 150 kilometer). Hoe diep ligt die tunnel dan in het midden onder de grond? Is de diepte:

a) minder dan 10 meter;
b) meer dan 10 meter en minder dan 100;
c) meer dan 100 meter.

Een berekening

Deze lengte kun je rechttoe-rechtaan berekenen. We zoeken de lengte van het lijnstukje x in figuur 1. De hoek α is $d/2R$ radialen. Uit figuur 1 lezen we af dat $x = R - R\cos\alpha$.



Figuur 1.

Met behulp van de volgende gegevens kunnen we x bepalen: de afstand van de Dam naar de Martinitoren is hemelsbreed $d = 146{,}911$ kilometer, de straal van de aarde is $R = 6378{,}388$ kilometer. Dan is $\alpha = d/2R = 0{,}0115163$ radialen. Met behulp van een rekenmachine kun je $x = R - R\cos\alpha$ dan zo uitrekenen.

Zonder rekenmachine

Nu had ik geen rekenmachine bij me, maar toch kon ik de vraag oplossen. De hoek α is nogal klein. Dan geldt dat $\cos\alpha$ ongeveer gelijk is aan $1 - \frac{1}{2}\alpha^2$. In formulevorm schrijven we dit als:

$$\cos\alpha \approx 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Oftewel $1 - \cos\alpha \approx \frac{1}{2}\alpha^2$, waarbij het $\approx$-teken 'ongeveer gelijk' betekent. We vinden dus:

$$\begin{aligned} x &= R\,(1 - \cos\alpha) \\ &\approx R \cdot \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{d^2}{8R} \approx \frac{150^2}{8 \times 6400} \\ &= \frac{225}{512} \approx 0{,}450 \text{ kilometer} \end{aligned}$$

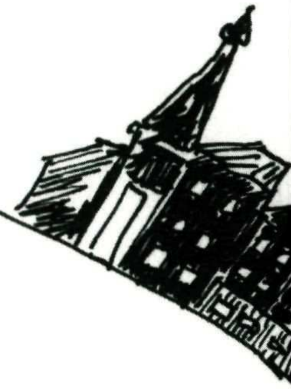
Hierbij heb ik voor het gemak d afgerond tot 150 en R tot 6400. De gezochte afstand is dus ongeveer 450 meter. Antwoord c) zal dus wel goed zijn.

Hoe kan dat nou?

Hoe kwam ik erbij dat $\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$?
Bekijk figuur 2. Hierin zie je dat als de hoek α klein is, $\sin\alpha$ en α bijna aan elkaar gelijk zijn. Dus geldt dan $\sin\alpha \approx \alpha$. We passen de hoekverdubbelingsformule voor de cosinus toe: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$.

door Klaas Pieter Hart

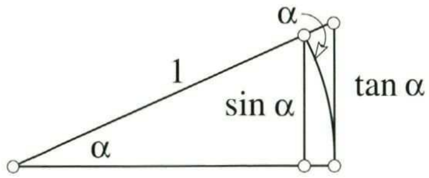
naar Groningen



Door $a = \frac{1}{2}\alpha$ in te vullen krijgen we

$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$. Dus:

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$
$$\approx 1 - 2\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$



Figuur 2.

Mag dat zomaar?

Uit een plaatje hebben we dus afgelezen dat $\sin\alpha \approx \alpha$ en daaruit hebben we afgeleid dat $\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$. Maar wat betekent $\approx$ nu precies? Eigenlijk willen we weten hoe goed die benaderingen zijn. Dat is met een beetje werk redelijk eenvoudig te doen.

Om te beginnen geldt $\sin\alpha < \alpha$. Uit $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ volgt dan meteen dat $\cos\alpha > 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$.

Uit figuur 2 kunnen we ook aflezen dat $\alpha < \tan\alpha$. Het afgebeelde cirkelsegment heeft oppervlakte $\frac{1}{2}\alpha$ (immers, de oppervlakte van een cirkelsegment met booglengte π heeft oppervlakte $\frac{1}{2}\pi$).

De oppervlakte van de grote driehoek is $\frac{1}{2}\tan\alpha$. Hieruit volgt dat $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, zodat $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$. Omdat we al gezien hadden dat $\cos\alpha > 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$, vinden we $\sin\alpha > \alpha - \frac{1}{2}\alpha^3$.

Conclusie:

$$\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha.$$

Deze formule zegt dat het verschil tussen $\sin\alpha$ en α ten hoogste $\frac{1}{2}\alpha^3$ is. Met de bewering $\sin 0{,}1 \approx 0{,}1$ zitten we er dus op z'n hoogst $0{,}0005$ naast!

Controle

Via de formule $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ kunnen we de benadering van $\cos\alpha$ controleren:

$$1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 < \cos\alpha < 1 - 2\left(\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)^3\right)^2.$$

De rechterkant is gelijk aan

$$1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{8}\alpha^4 - \tfrac{1}{128}\alpha^6.$$

Conclusie:

$$1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 < \cos\alpha < 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{8}\alpha^4.$$

Deze formule zegt dat het verschil tussen $\cos\alpha$ en $1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ ten hoogste $\frac{1}{8}\alpha^4$ is.

Als we de precieze waarden voor d en R in de benadering $x \approx \frac{d^2}{8R}$ zouden invullen, dan zou de fout niet meer zijn dan $R \cdot \frac{1}{8}\alpha^4 = 1{,}36$ centimeter. Inderdaad, met $d = 146{,}911$ en $R = 6378{,}388$ is de theoretische diepte $x = R(1 - \cos\alpha) = 422{,}964$ meter. De benadering is $x \approx d^2/8R = 422{,}968$ meter. Een verschil kleiner dan 1cm! Dit verschil valt in het niet tegen alle mogelijke afrondfouten die bij het meten van de afstand Amsterdam – Groningen en het bepalen van de straal van de aarde gemaakt worden. De benaderingsformule kan dus zonder problemen toegepast worden.