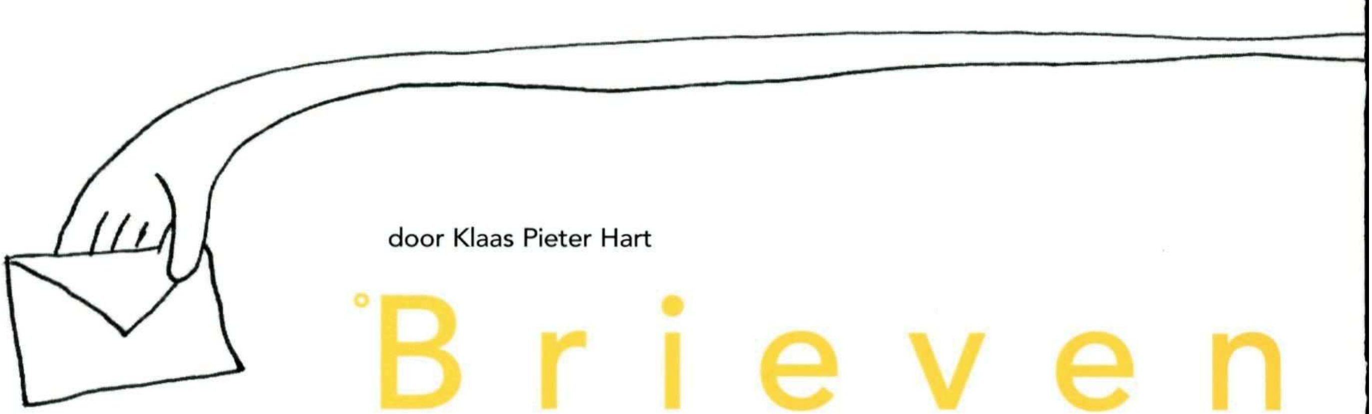


door Klaas Pieter Hart

Brieven

Het gemiddelde van 4 en 6 is 5. Maar niet altijd; soms moet je getallen op een andere manier middelen en blijkt het 'gemiddelde' van 4 en 6 opeens gelijk te zijn aan $\sqrt{24} = 4.89\ldots$

Je wil een brief wegen. Je hebt alleen de beschikking over een primitieve balansweegschaal, waarvan de armen niet even lang zijn. Als een brief links hangt moet er rechts 56g bij om de balans in evenwicht te brengen. Met de brief rechts moet er voor de balans links 44g bij. Hoe zwaar is de brief? Zie figuur 1.

Dit vraagstuk kun je oplossen met behulp van de wet "moment = kracht x arm". Laten we het gewicht van de brief x noemen en de lengte van de linker- en rechterarm respectievelijk l en r. De eerste weging zegt ons dat $x \times l = 56 \times r$. De tweede weging geeft $44 \times l = x \times r$. Hieruit volgt dat $56/x = l/r = x/44$ en dus $x^2 = 44 \times 56$.
We zien dat de brief $x = \sqrt{44 \times 56} \approx 49,64$ gram zwaar is. Dat is iets minder dan $50 = \frac{1}{2}(44+56)$, het gewone gemiddelde van 44 en 56. Blijkbaar is $\sqrt{44 \times 56}$ een soort gemiddelde van 44 en 56. Het wordt het *meetkundig* gemiddelde van de twee getallen genoemd. Ter onderscheid daarvan heet het 'gewone' gemiddelde het *rekenkundig* gemiddelde.

Optellen of vermenigvuldigen
Het rekenkundig gemiddelde treedt op in situaties waarin je *optelt*. Als je twee touwtjes hebt van lengte a en b, dan zijn twee touwtjes van lengte $\frac{1}{2}(a+b)$ samen even lang als de oorspronkelijke touwtjes samen. Het meetkundig gemiddelde heeft met *vermenigvuldigen* te maken. Een rechthoek met zijden a en b heeft een even grote oppervlakte als een vierkant met zijden $\sqrt{ab}$.

Cauchy
We zagen dat het meetkundig gemiddelde van 44 en 56 *kleiner* was dan het rekenkundig gemiddelde. De Franse wiskundige Cauchy ontdekte dat dit altijd geldt.

Stelling. Als a, $b > 0$ en als $a \neq b$, dan geldt $\sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a+b)$.

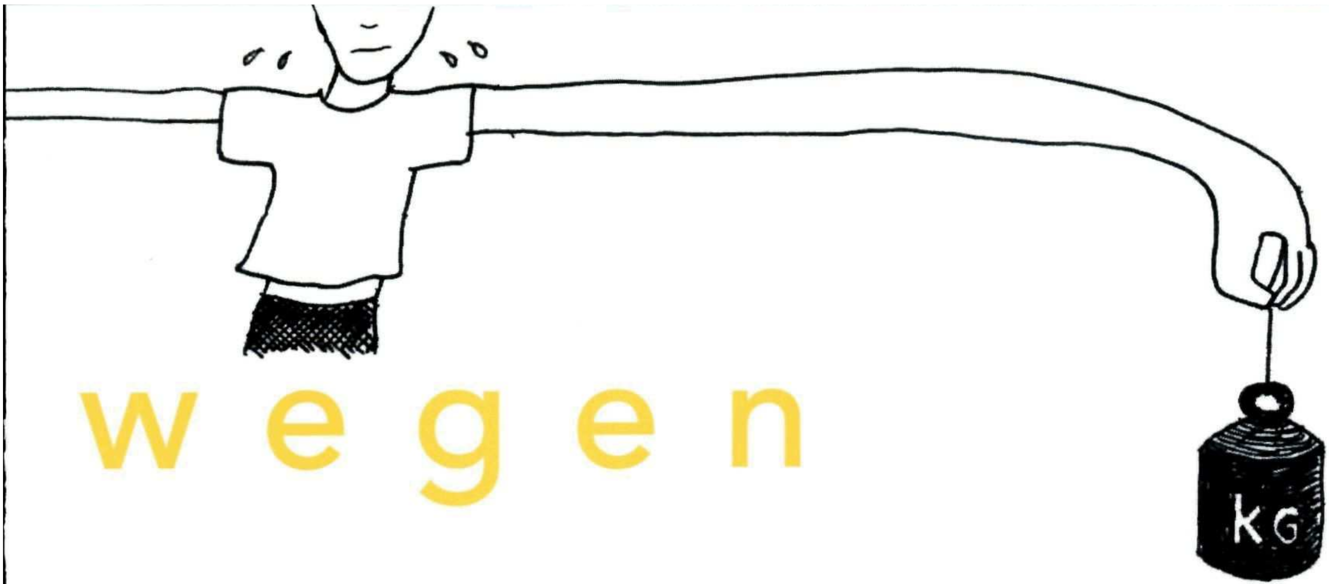
Het was dus geen toeval dat de brief minder dan 50g woog. Het bewijs van deze stelling is niet moeilijk. Voor het geval van de brief geldt: $44 \times 56 = (50-6)(50+6) = 50^2 - 6^2 < 50^2$ en dus $\sqrt{44 \times 56} < 50$.
Voor willekeurige a en b krijg je:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Hieruit volgt $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$.

De stelling staat bekend als de ongelijkheid van rekenkundig en meetkundig gemiddelde. Als $a = b$ geldt natuurlijk dat rekenkundig en meetkundig gemiddelde gelijk zijn, en wel aan $a = b$. Daarom wordt de stelling ook wel geformuleerd als: voor elke tweetal positieve getallen a en b geldt $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$, waarbij gelijkheid geldt precies dan als $a = b$.

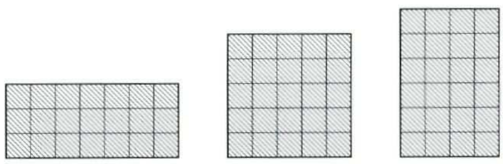
Rechthoek en vierkant
Iedereen 'weet' dat van alle rechthoeken met een gegeven omtrek een vierkant de grootste oppervlakte heeft (zie figuur 1).
Met behulp van de ongelijkheid van rekenkundig en meetkundig gemiddelde kun je dat ook *bewijzen*.
Dat gaat als volgt. Laat a en b de zijden van een rechthoek zijn met omtrek L. Dan geldt natuurlijk $L = 2a + 2b$. Onze ongelijkheid geeft:



wegen

$$ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{16}L^2.$$

Dit zegt dat de oppervlakte van de rechthoek altijd kleiner of gelijk is aan eenzestiende van het kwadraat van de omtrek L. Bovendien geldt gelijkheid alleen als $a = b$. Conclusie: als L niet mag veranderen, maar a en b wel, dan is de oppervlakte ab het grootst als $a = b$, dus als de rechthoek vierkant is. Deze stelling staat bekend als de 'isoperimetrische ongelijkheid' voor rechthoeken: elke rechthoek met omtrek L heeft oppervlakte ten hoogste $\frac{1}{16}L^2$.



Figuur 1. Van alle rechthoeken met een vaste, gegeven omtrek heeft het vierkant de grootste oppervlakte.

Meer getallen
Cauchy stopte niet bij twee getallen; hij zag in dat de ongelijkheid ook voor grotere aantallen geldt.
Bijvoorbeeld voor vier getallen a, b, c en d:

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c+d}{4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}\right) \\ &\geq \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \\ &\geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} \\ &= \sqrt[4]{abcd}. \end{aligned}$$

Voor drie getallen a, b en c paste hij een kunstgreep toe: stel $d = \frac{1}{3}(a+b+c)$ en pas het geval voor vier getallen toe:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd.$$

Maar $a + b + c = 3d$, dus er staat eigenlijk $d^4 \geq abcd$. Deel d weg en we vinden $d^3 \geq abc$ en dus

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

In beide gevallen treedt gelijkheid op precies dan als de getallen allemaal aan elkaar gelijk zijn.

Opgave. Hoe zou je de ongelijkheid voor rekenkundig en meetkundig gemiddelde bewijzen voor zeven getallen? En voor een willekeurig aantal getallen?

Figuur 1. Hoe zwaar is de brief?