oo

$\frac{\pi^2}{6}$

door **Klaas Pieter Hart**

Oneindig veel getallen bij elkaar optellen kan soms wel, soms niet. Als je 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, ... bij elkaar optelt, krijg je een interessante breuk.

Oneindig veel getallen optellen

Het is niet mogelijk oneindig veel getallen echt bij elkaar op te tellen, daar hebben we immers de tijd niet voor. Toch is het in veel gevallen duidelijk wat de uitkomst van zo'n oneindige som moet zijn. Iedereen beseft bijvoorbeeld dat $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$. Archimedes kwam bij bepaalde oppervlakteberekeningen uit op $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots$en hij beredeneerde dat de uitkomst hiervan $\frac{4}{3}$ moest zijn. De Grieken hadden dus geen moeite met het bepalen van de som van een meetkundige rij. Maar het duurde nog een hele tijd voor wiskundigen de som van ingewikkeldere oneindige rijen wisten te bepalen. Dat gebeurde aan het eind van de zeventiende eeuw; de gebroeders Bernoulli namen daarbij het voortouw. Ze (her)ontdekten bijvoorbeeld iets dat Nicole Oresme al in 1360 had vastgesteld, namelijk

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty.$$

In juni 2001 is in Pythagoras een artikel gewijd aan deze oneindige som, die bekend staat als de *harmonische reeks*. Daar wordt verteld waarom de som van deze rij oneindig groot is. De Bernoulli's hadden een andere fraaie manier om dit in te zien. Zij redeneerden als volgt. Als je voor een vaste n de som $\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ bekijkt, dan zie je n^2-n termen die (op één na) groter zijn dan $\frac{1}{n^2}$, de som is dus groter dan $1-\frac{1}{n}$. Maar dan geldt

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1.$$

Hiermee kun je dan inzien dat de partiële sommen $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ inderdaad boven elk getal uitstijgen.

Opgave 1. Hoe groot moet je n nemen opdat zeker $H_n>100$?

Een weerbarstige som

De Bernoulli's hadden meer moeite met de som

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots \qquad (*)$$

Ze wisten wel dat daar een getal uit moest komen (en niet ∞), maar ze hadden geen idee wat dat getal moest zijn. Het duurde tot ongeveer 1730 voor Leonhard Euler (zie figuur 1) de uitkomst bepaalde. We gaan eerst kijken hoe de Bernoulli's wisten dat de som een eindig getal moest zijn. Daartoe korten we de partiële sommen even af: schrijf

$$P_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}.$$



De volgende tabel geeft de eerste twintig partiële sommen, waar op zich weinig uit af te leiden is.

n	P_n
1	1
2	1,250000000
3	1,361111111
4	1,423611111
5	1,463611111
6	1,491388889
7	1,511797052
8	1,527422052
9	1,539767731
10	1,549767731
11	1,558032194
12	1,564976638
13	1,570893798
14	1,575995839
15	1,580440283
16	1,584346533
17	1,587806741
18	1,590893161
19	1,593663244
20	1,596163244

Opgave 2. Kun je aan de getallen in de tabel zien wat de waarde van $(*)$ zou moeten zijn? Laat je rekenmachine nog wat aantal waarden van P_n uitrekenen, bijvoorbeeld P_{1000} of $P_{10.000}$. Geeft dit een beter idee?

Het gedrag van P_n

De Bernoulli's bedachten het volgende trucje om iets zinnigs over de getallen P_n te kunnen zeggen. Eerst merkten ze op dat $k^2 > k(k-1)$ voor elke $k \geq 2$ en daarmee ook

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}.$$

Verder kun je schrijven:

$$\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

reken maar na. Hieruit volgt dat $\frac{1}{4} < 1 - \frac{1}{2}$, dat $\frac{1}{9} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, dat $\frac{1}{16} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ en, voor willekeurige k,

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Hiermee zie je bijvoorbeeld dat P_4 kleiner is dan

$$1 + (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}).$$

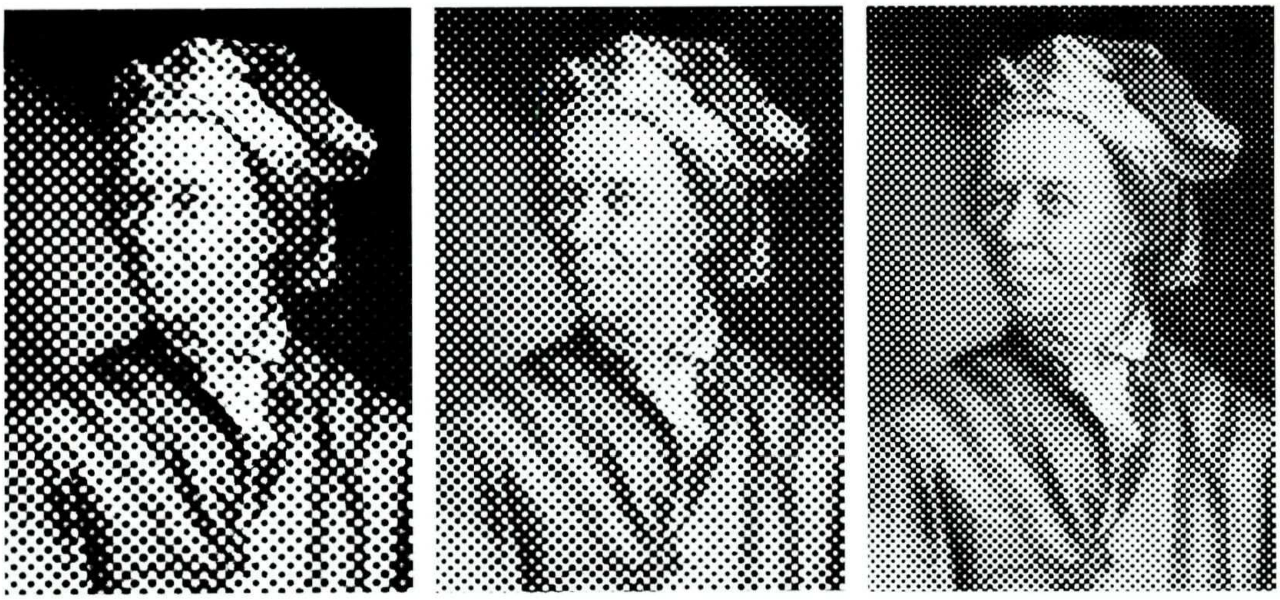
Als we hierin de haakjes wat anders zetten, krijgen we

$$1 + 1 + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{4} = 2 - \tfrac{1}{4}.$$

In het algemeen vind je op dezelfde manier dat

$$\begin{aligned} P_n &< 1 + (1 - \tfrac{1}{2}) + \cdots + (\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}) \\ &= 2 - \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Conclusie: $P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_n < \cdots < 2$. Hieruit trokken de Bernoulli's de conclusie dat in elk geval



Figuur 1. Leonhard Euler >>>

$$\tfrac{1}{1^2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots + \tfrac{1}{n^2} + \cdots \leq 2 .$$

Als je je rekenmachine hebt laten werken, heb je inmiddels gezien dat de som waarschijnlijk ergens tussen $1{,}6$ en $1{,}7$ ligt.

De ontdekking van Euler

We gaan nu zien hoe Leonhard Euler rond 1730 ontdekte dat de waarde die de Bernoulli's zochten, gelijk moest zijn aan $\tfrac{1}{6}\pi^2$, met andere woorden, dat

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dat zal niet makkelijk zijn, maar wie mee durft te gaan voorbij de drie rondjes, krijgt een van de mooiste redeneringen uit de wiskunde te zien. In die redenering gebruikte Euler twee ingrediënten. Het eerste was een ontdekking van Newton: je kunt $\sin x$ als een oneindig lang polynoom (in het Nederlands: veelterm) schrijven; het tweede ontdekte hij zelf: je kunt $\sin x$ als een oneindig lang product schrijven.

De formule van Newton ooo

Isaac Newton had ontdekt dat je $\sin x$ als een oneindig lang polynoom kunt schrijven:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots$$

In een later nummer van Pythagoras zullen we zien hoe je die formule voor $\sin x$ kunt vinden; deze keer gaan we hem gewoon gebruiken.

De aanpak van Euler ooo

Euler begon met de formule van Newton en deelde deze links en rechts door x:

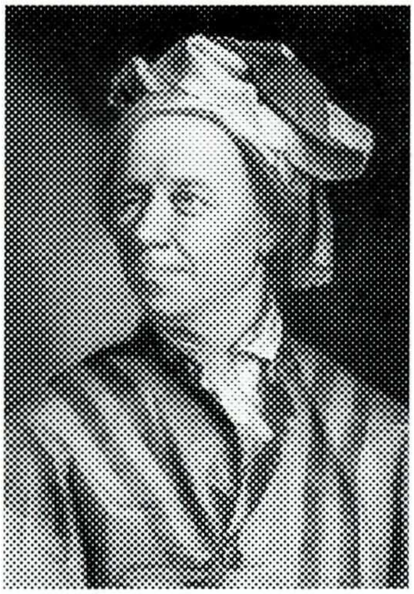
$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \cdots$$

Om de latere formules wat mooier uit te laten komen, verving hij x door πx:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2}{6}x^2 + \frac{\pi^4}{120}x^4 + \cdots$$

Nu had hij een oneindig lang polynoom $p(x)$ met de volgende eigenschappen: als je (rechts) 0 invult, krijg je 1 en als je (links) 1, -1, 2, -2, 3, -3,... invult, krijg je telkens 0. Dergelijke eisen leggen een polynoom helemaal vast en Euler wist nog een manier om een polynoom te maken dat aan die eisen voldoet. In het eenvoudige geval dat je $q(0) = 1$ wilt en $q(1) = q(-1) = q(2) = q(-2) = 0$, doet de volgende formule precies wat je wilt:

$$q(x) = \left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{-1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{-2}\right).$$



Als je dit uitwerkt, krijg je

$$q(x) = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right)x^2 + \frac{x^4}{4}.$$

Merk op dat tussen de haakjes voor de x^2 precies P_2 staat.
Als je meer nulpunten wilt, zeg $1, -1, 2, -2, \ldots, n$ en $-n$, en nog steeds $q(0) = 1$, dan kom je vanzelf uit op

$$\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right);$$

dat uitwerken brengt je op

$$1 - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)x^2 + \cdots$$

en dat is nu net

$$1 - P_n x^2 + \cdots$$

Euler nam nu de sprong naar het oneindige: $p(x)$ is een oneindig lang polynoom met $p(0) = 1$ en $1, -1, 2, -2, \ldots$ als nulpunten. Dan is het blijkbaar ook te schrijven als een oneindig lang product:

$$p(x) = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\cdots$$

Als we dat uitvermenigvuldigen, krijgen we

$$p(x) = 1 - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots\right)x^2 + \cdots,$$

maar we hadden al

$$p(x) = 1 - \frac{\pi^2}{6}x^2 + \cdots$$

en hier lezen we meteen onze gewenste formule uit af.

Goede benaderingen?
Als je de waarden van P_n met $\frac{1}{6}\pi^2$ vergelijkt, zul je zien dat er nog maar weinig decimalen kloppen. Met behulp van de Bernoulli-truc kunnen we zien waar dat aan ligt. Bedenk namelijk dat

$$\frac{1}{6}\pi^2 - P_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots$$

Opgave 3. Laat zien dat $\frac{1}{6}\pi^2 - P_n < \frac{1}{n}$.

Je kunt de Bernoulli-truc ook omdraaien.

Opgave 4. Reken na dat $\frac{1}{k^2} > \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ en gebruik dit om te laten zien dat $\frac{1}{6}\pi^2 - P_n > \frac{1}{n+1}$.

Dit verklaart bijvoorbeeld waarom $P_{10.000}$ nog maar drie cijfers achter de komma goed heeft: $\frac{1}{6}\pi^2 - P_{10.000} > \frac{1}{10.001}$ laat zien dat het vierde cijfer nog best kan afwijken.