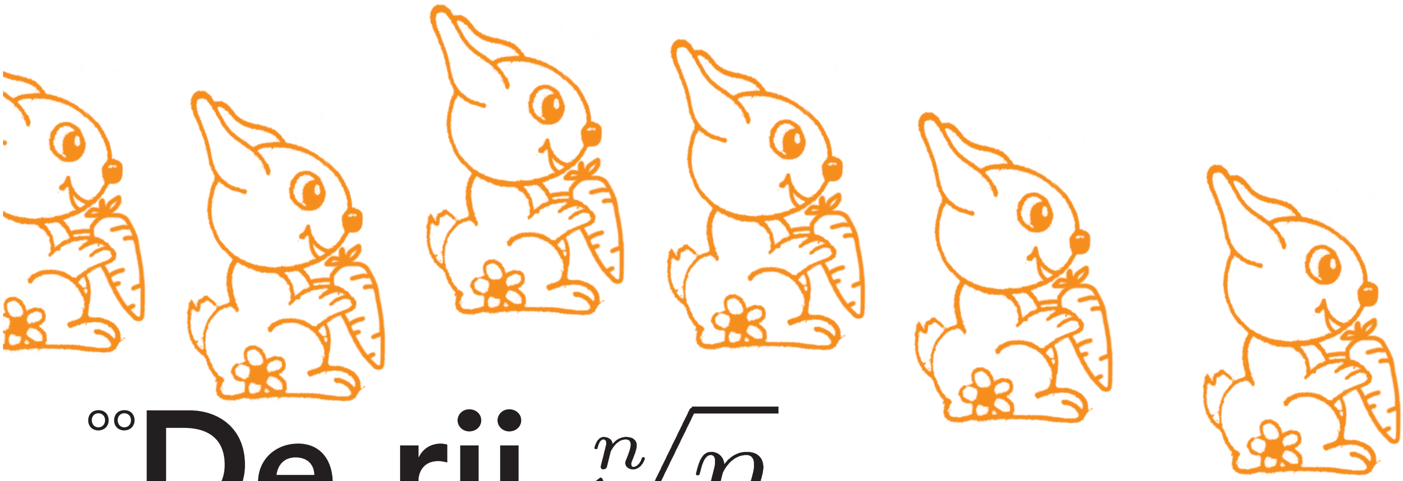


°° De rij $\sqrt[n]{n}$

door **Klaas Pieter Hart**

In de wiskunde kom je een heleboel getallenrijen tegen en veel wiskundigen besteden hun tijd met het onderzoeken van het gedrag van zulke rijen. Bij dergelijk onderzoek is het goed over een voorraadje standaardrijen te kunnen beschikken om andere rijen mee te vergelijken. Eén zo'n standaardrij is gegeven door $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \ldots$, met $\sqrt[n]{n}$ op de n-de plaats.

De rij begint stijgend met $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ en daalt dan weer, want $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$. Maar hoe gaat het verder? Blijft de rij dalen of gaan de waarden later weer omhoog? Een andere vraag is of de getallen zich rond een vaste waarde gaan concentreren en zo ja, welke die waarde dan is.

Als je je rekenmachientje de eerste waarden van de rij uit laat rekenen, lijkt het er inderdaad op dat de rij blijft dalen vanaf $\sqrt[3]{3}$. Verder zijn alle waarden groter dan 1 en misschien is het wel zo dat ze naar 1 toelopen. We gaan beide dingen bewijzen.

Een ongelijkheid

Bij ons werk hebben we eigenlijk niet veel meer nodig dan een feit dat in de analyse veelvuldig gebruikt wordt. Het betreft hier de ongelijkheid van *rekenkundig* en *meetkundig gemiddelde* (zie ook 'Brieven wegen' in Pythagoras augustus 2001). Deze zegt: als je een aantal *positieve* getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ neemt, dan geldt altijd

$$\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

(tenzij alle a_i gelijk zijn, dan geldt =).
Met behulp van deze ongelijkheid kun je een heleboel dingen afschatten. Bijvoorbeeld $\sqrt{12} < 3\frac{1}{2}$ (neem $a_1 = 3$ en $a_2 = 4$).

Opgave. Neem $a_1 = \frac{1}{3}$ en $a_2 = \frac{1}{4}$; wat kun je hiermee over $\sqrt{12}$ zeggen?

$\sqrt[n]{n}$ gaat naar 1

Zoals je bij het afschatten van $\sqrt{12}$ hebt gezien, gaat het erom de getallen in de ongelijkheid slim te kiezen.

Zo kunnen we bijvoorbeeld $a_1 = n$ en $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 1$ nemen; dan volgt, omdat $n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$,

$$\sqrt[n]{n} < \frac{n + 1 + \cdots + 1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Conclusie: wat er ook gebeurt, altijd geldt $\sqrt[n]{n} < 2$.

Schrijf nu $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n} \times 1 \times \cdots \times 1$ en pas de ongelijkheid nogmaals toe, we krijgen:

$$\sqrt[n]{n} < \frac{1}{n}(2\sqrt{n} + n - 2) = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n}.$$

Hieruit blijkt dat de afstand tussen $\sqrt[n]{n}$ en 1 kleiner is dan $\frac{2}{\sqrt{n}}$ en dus dat $\sqrt{n}$ naar 1 toe gedrukt wordt. We concluderen

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

De rij daalt

We kunnen de ongelijkheid van rekenkundig en meetkundig gemiddelde ook gebrui-

ken om aan te tonen dat de rij $\sqrt[n]{n}$ inderdaad vanaf $n = 3$ daalt. We weten al dat $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$, we kunnen dus vanaf $n = 4$ werken (dat is op één moment nuttig om te weten).

Het idee is naar het quotiënt van $\sqrt[n]{n}$ en $\sqrt[n+1]{n+1}$ te kijken; als we kunnen aantonen dat dat groter is dan 1, dan weten we ook dat $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$. Met het quotiënt zelf kunnen we niet zo veel, maar met de $n + 1$-de macht ervan wel, immers:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}}\right)^{n+1} = \frac{n\sqrt[n]{n}}{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

We zijn er dus als we kunnen laten zien dat $\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{1}{n}$. We gebruiken hetzelfde product als daarnet, maar nu ondersteboven: met behulp van $\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times 1 \times \cdots \times 1$ volgt

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}\left(\frac{2}{\sqrt{n}} + n - 2\right) = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n\sqrt{n}}.$$

Als we dit weer omdraaien, volgt

$$\sqrt[n]{n} > \frac{1}{1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n\sqrt{n}}}.$$

Nog één stap, dan zijn we er. We schrijven $x = \frac{2}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}}$ en we merken op dat $0 < x < 1$. Nu geldt $1 - x^2 < 1$ en als we links en rechts door $1 - x$ delen, volgt $1 + x < \frac{1}{1-x}$ en dus

$$\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{n}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right).$$

Omdat $n \geq 4$ (hier hebben we dat nodig), kunnen we concluderen dat $2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \geq 1$ en dus, eindelijk, dat

$$\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Hiermee hebben we alle geclaimde eigenschappen van onze rij aangetoond.

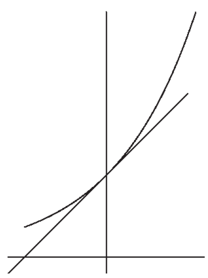
Hoe snel?

Als je je rekenmachientje aan het werk hebt gezet, zul je wellicht gezien hebben dat $\sqrt[n]{n}$ niet echt snel naar 1 loopt. Zo is $\sqrt[1000]{1000} \approx 1{,}006932$. Die lage snelheid kun je al een beetje aan de ongelijkheid $\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{1}{n}$ zien.

Met behulp van de e-macht en de logaritme kunnen we nog iets meer zeggen. Er geldt namelijk dat $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$. In combinatie met het feit dat $e^x > 1 + x$ als $x \neq 0$ (zie figuur 1), leid je vervolgens gemakkelijk af dat

$$\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{1}{n}\ln n.$$

Dit vertelt ons twee dingen, namelijk dat $\sqrt[n]{n}$ inderdaad heel langzaam naar 1 gaat en ook dat $\frac{1}{n}\ln n$ naar 0 convergeert.



Figuur 1 De grafiek van $y = e^x$ en van $y = 1 + x$