door **Klaas Pieter Hart**

Hoe groot is $n!$ ongeveer?

De getallen $n!$ worden heel snel heel groot. In dit artikel proberen we een schatting van de groeisnelheid van $n!$ te maken.

De getallen $n!$ (spreek uit: n-faculteit) komen op vele plaatsen in de wiskunde voor. Bijvoorbeeld in de kansrekening en de combinatoriek bij het tellen van rangschikkingen: je kunt n dingen op $n!$ manieren op een rijtje zetten. Ook in de analyse zie je ze vaak in formules. Als je de functie x^n differentieert, krijg je nx^{n-1}, als je nog een keer differentieert, komt er $n(n-1)x^{n-2}$; in het algemeen, als je k keer differentieert, krijg je $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$. Dat laatste kun je met de faculteitnotatie als volgt opschrijven: $\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$.

Voor wie het (bijna) vergeten was: $n!$ is gedefinieerd als

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n\,,$$

dus $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, enzovoorts. Deze rij stijgt heel snel; $10! = 3\,628\,800$ is al meer dan het aantal seconden in duizend uur. De meeste rekenmachientjes geven het op bij 70; de TI-83 bijvoorbeeld geeft `ERR:OVERFLOW` als je $70!$ uit laat rekenen. De verklaring hiervoor is dat $69! \approx 1.711225 \times 10^{98}$ en $70! \approx 1.197857 \times 10^{100}$ – de displays hebben meestal maar twee posities voor de macht van 10.

Afschatten

De uitdrukking voor $n!$ is niet eenvoudig en is ook niet echt mooier te maken. Daarom willen we onder- en bovenschattingen van $n!$ hebben waar iets makkelijker mee te rekenen valt. Om dit te doen, gebruiken we diverse ongelijkheden. De eerste is

$$\sqrt{ab} < \tfrac{1}{2}(a+b); \qquad (*)$$

deze geldt voor alle positieve getallen a en b (behalve als $a = b$, dan geldt natuurlijk =). Ga zelf na dat $(*)$ geldt door links en rechts te kwadrateren.

Gebruik $(*)$ achtereenvolgens voor $a = 1$, $b = n$, dan $a = 2$, $b = n - 1$, enzovoorts, tot en met $a = n$, $b = 1$.
Telkens geldt $a + b = n + 1$ en omdat $n! = \sqrt{1 \times n} \times \sqrt{2 \times (n-1)} \times \cdots \times \sqrt{n \times 1}$ volgt dan

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad (1)$$

of, in een andere veelgebruikte vorm: $\sqrt[n]{n!} < \frac{1}{2}(n+1)$.

We kunnen ook een onderschatting maken door elk van de producten $k(n - k + 1)$ met n te vergelijken.
Er geldt namelijk

$$k(n-k+1) - n = (k-1)(n-k)$$

en dat is altijd 0 of meer, want $1 \le k \le n$.
Dus

$$(n!)^2 = 1 \times n \times 2 \times (n-1) \times \cdots \times n \times 1 \ge n^n \qquad (2)$$

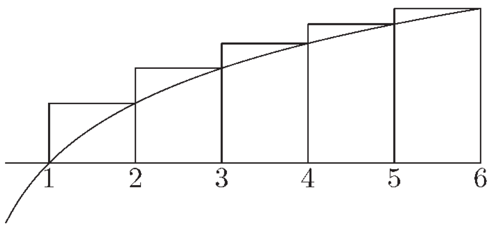
en dus $n! \ge n^{\frac{n}{2}}$, ofwel $\sqrt[n]{n!} \ge \sqrt{n}$. Hieruit kunnen we concluderen dat $n!$ zo snel groeit dat zelfs zijn n-de machts wortel naar oneindig gaat.

Subtielere afschattingen

We kunnen (1) en (2) aanzienlijk verbeteren door met integralen te werken. Hiertoe nemen we de natuurlijke logaritme van $n!$:

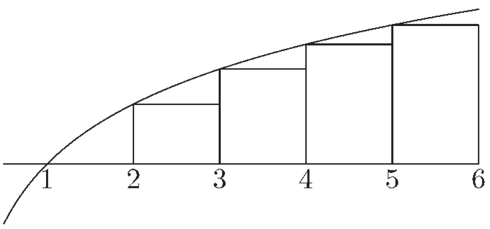
$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n.$$

Deze som kunnen we vergelijken met een integraal van $\ln x$. In figuur 1 is te zien dat $\ln 6! > \int_1^6 \ln x \, dx$.



Figuur 1

In figuur 2 is te zien dat $\ln 5! < \int_1^6 \ln x \, dx$.



Figuur 2

In het algemeen krijgen we

$$\ln(n-1)! < \int_1^n \ln x \, dx < \ln n!.$$

Nu moeten we de integraal nog uitrekenen. Daarvoor moeten we een primitieve van $\ln x$ maken. Met een beetje proberen kun je uitvlooien dat $x \ln x - x$ een primitieve is (differentieer het om dat te controleren). De integraal wordt dus

$$\begin{aligned} \int_1^n \ln x \, dx &= (n \ln n - n) - (1 \ln 1 - 1) \\ &= n \ln n - (n-1) \\ &= n(\ln n - 1) + 1. \end{aligned}$$

Dit kunnen we omwerken tot $n \ln \frac{n}{e} + 1$, ofwel $\ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n e\right)$. Conclusie:

$$(n-1)! < \left(\frac{n}{e}\right)^n e < n!. \qquad (3)$$

Hiermee vinden we

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n e < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n en \qquad (4)$$

(vermenigvuldig de linker ongelijkheid in (3) met n). Hiermee krijgen we zeer nauwkeurige grenzen voor $\sqrt[n]{n!}$:

$$\frac{n}{e}\sqrt[n]{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n}{e}\sqrt[n]{en}. \qquad (5)$$

In het vorige nummer van Pythagoras hebben we gezien dat $\sqrt[n]{n}$ naar 1 daalt (en $\sqrt[n]{e}$ dus ook); daarmee zien we dat $\sqrt[n]{n!}$ ongeveer net zo snel groeit als $\frac{n}{e}$.

De formule van Stirling

Hoe zit het nu met $n!$ zelf? Formule (4) zegt dat $n!$ wel iets met $(\frac{n}{e})^n$ te maken heeft, maar dat er nog wel wat ruimte over is, tussen e en en wel te verstaan. Met (veel) meer werk dan hierboven is daar een heleboel over te zeggen: als we $(\frac{n}{e})^n$ met $\sqrt{2\pi n}$ vermenigvuldigen, zitten we heel erg goed. Er geldt namelijk

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \qquad (6)$$

hiermee bedoelen we dat het quotiënt van de twee uitdrukkingen naar 1 convergeert. Formule (6) staat bekend als de *formule van Stirling* en hij verklaart ook een beetje waarom het getal π zo vaak in de kansrekening opduikt.
Meer over Stirlings formule kun je lezen op http://mathworld.wolfram.com/StirlingsApproximation.html.