ANALYSIS
Per Quantitatum
SERIES, FLUXIONES,
AC
DIFFERENTIAS:
CUM
Enumeratione Linearum
TERTII ORDINIS.

J. Nutting Sculp.

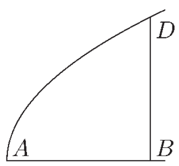
LONDINI:
Ex Officina PEARSONIANA. *Anno* M.DCC.XI.

door **Klaas Pieter Hart**

Analyse volgens Newton

In dit artikel bekijken we hoe Isaac Newton uitdrukkingen voor de logaritme en de exponentiële functie maakte.

In 1669 schreef Isaac Newton (1642-1727) een artikel met de naam 'De Analysi Per Æquationes Numero Terminorum Infinitas' (Van Analyse Van Vergelijkingen Met Oneindig Veel Termen). De eerste pagina van het boek waarin dit verscheen is hiernaast afgebeeld. Hierin legde hij uit hoe je de oppervlakte onder bepaalde krommen kunt uitrekenen.

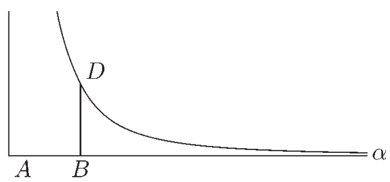


Newton schreef $AB = x$ en $BD = y$ en deed meteen zijn eerste bewering:
Regel I. Zij $y = ax^{m/n}$; dan is
Opp $ABD = \frac{an}{m+n} x^{(m+n)/n}$.

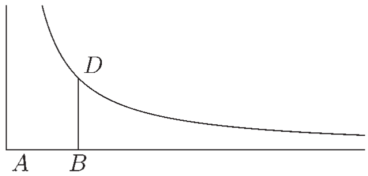
Na de regel volgen wat voorbeelden; we houden de notatie van Newton aan, met de haakjes die hij ter verduidelijking gebruikte.

Als x^2 $(= 1x^{\frac{2}{1}})$ $= y$, dus met $a = 1 = n$ en $m = 2$, dan geldt $\frac{1}{3}x^3 = ABD$. Als $4\sqrt{x}$ $(= 4x^{\frac{1}{2}})$ $= y$, dan $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(= \frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3})$ $= ABD$.

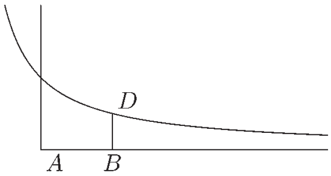
Als $\frac{1}{x^2}$ $(= x^{-2})$ $= y$, dus met $a = 1 = n$ en $m = -2$, dan geldt $(\frac{1}{-1}x^{\frac{-1}{1}} =)$ $-x^{-1}$ $(= \frac{-1}{x})$ $=$ ABD. Newton legde uit dat het minteken verscheen omdat we de oppervlakte *aan de andere kant* van de lijn BD krijgen en die moeten we negatief rekenen.



Het laatste voorbeeld was de hyperbool met vergelijking $\frac{1}{x}$ $(= x^{-1})$ $= y$.
Hier kreeg Newton de uitkomst $\frac{1}{0}x^{0/1} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0}$ = een oneindige hoeveelheid; zoals de oppervlakte onder de hyperbool is, aan beide zijden van de lijn BD.



Newton schoof daarom de hyperbool één eenheid naar links zodat hij de grafiek van $y = \frac{1}{1+x}$ kreeg.



Maar hij had nog steeds een probleem: de formule uit Regel I was nog niet toepasbaar. Maar met een staartdeling kon hij $\frac{1}{1+x}$ omwerken tot iets bruikbaars:

$$
\begin{array}{l}
1 + x \;/\; 1 + 0 \;\backslash\; 1 - x + x^2 - x^3 \quad \&\mathrm{c} \\
\qquad\quad \underline{1 + x} \\
\qquad\quad 0 - x + \;\; 0 \\
\qquad\qquad \underline{- x - x^2} \\
\qquad\qquad\;\; 0 + x^2 + \;\; 0 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+ x^2 + x^3} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0 - x^3 + \;\; 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{- x^3 - x^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 0 + x^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \&\mathrm{c}
\end{array}
$$

Met $\&\mathrm{c}$ gaf Newton aan dat deze staartdeling oneindig lang door zal blijven gaan en ook dat het patroon $(-1)^n x^n$ zich in het quotiënt zal blijven herhalen.

Dit verklaart ook de titel van Newtons artikel: de hyperbool $y = \frac{1}{1+x}$ wordt nu door een vergelijking met oneindig veel termen beschreven.

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 \;\; \&\mathrm{c}.$$

Hiermee kon Newton Regel I weer toepassen (en de optelregel voor oppervlakten natuurlijk); de oppervlakte onder de hyperbool wordt dan

$$\text{Opp } ABD = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \;\; \&\mathrm{c}.$$

Volgens Newton: 'Het is dan wel een oneindige som, maar toch zo dat een paar termen al een resultaat geven dat in de praktijk exact genoeg is.'

Dus het klassieke probleem – 'vind de oppervlakte van een gebied begrensd door een hyperbool' – leidt tot een vergelijking met oneindig veel termen. De oppervlakte van ABD kan ook met behulp van de natuurlijke logaritme beschreven worden: er geldt namelijk
Opp $ABD = \ln(1 + x)$. Newtons formule vertelt ons dus dat

$$\ln(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \;\; \&\mathrm{c}$$

waarbij de som van de eerste paar termen al een goede benadering zou moeten geven.

Opgave 1. Onderzoek hoe goed de benadering met vier termen van $\ln(1 + x)$ is. Laat je rekenmachine de waarden voor wat x-en uitrekenen of laat de grafieken plotten. (NB. De manier waarop rekenmachientjes logaritmen benaderen, is voor een groot deel op deze formule gebaseerd.)

Het omkeerprobleem

Verderop in het artikel pakte Newton een ander probleem aan: 'vind de basis, x, als de oppervlakte, z, gegeven is'. Dit is een natuurlijke vraag en het was vooral hier dat de vergelijkingen met oneindig veel termen hun nut bewezen.

Zijn eerste voorbeeld was meteen de hyperbool en hij liet zien hoe je de vergelijking

$$z = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \;\; \&\mathrm{c}$$

naar x kunt oplossen. Dat deed hij door de vergelijking met de volgende deelvergelijkingen te benaderen:

$$
\begin{aligned}
z &= x \\
z &= x - \tfrac{1}{2}x^2 \\
z &= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 \\
z &= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4
\end{aligned}
$$

Vervolgens loste hij die deelvergelijkingen op. De eerste is geen kunst: $x = z$.

De oplossing van de tweede vergelijking zou een verbetering van de oplossing van de eerste moeten zijn. Daarom schreef Newton $x = z + p$ en vulde hij dat in:

$$z = z + p - \tfrac{1}{2}(z+p)^2 =$$
$$= z + p - \tfrac{1}{2}z^2 - zp - \tfrac{1}{2}p^2.$$

Wegstrepen van z en toepassing van de abc-formule geeft ons

$$p = (1-z) \pm \sqrt{1-2z}.$$

Nu moet x bijna 0 zijn als z dat is, dus moeten we $p = (1-z) - \sqrt{1-2z}$ hebben. Newton had intussen al laten zien hoe je $\sqrt{1-2z}$ tot een oneindige som kunt ombouwen:

$$\sqrt{1-2z} = 1 - z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{2}z^3 \quad \&\text{c.}$$

Daarmee vond hij $p = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^3$ &c.

Opgave 2. Kwadrateer $1 + ax + bx^2 + cx^3$, stel het resultaat gelijk aan $1 - 2x$ en bepaal zo a, b en c.

Omdat hij met een kwadratische vergelijking begon, wist Newton dat hij de $\frac{1}{2}z^2$ wel kon vertrouwen, maar de $\frac{1}{2}z^3$ nog niet. Daarom schreef hij $p = \frac{1}{2}z^2 + q$ (en dus $x = z + \frac{1}{2}z^2 + q$) en vulde dat in in de derde vergelijking. Het werkt makkelijker als je eerst $x = z + p$ invult en de voorgaande stappen over doet maar nu met $\frac{1}{3}x^3$ erbij. Na invullen en wegstrepen hou je dan het volgende over:

$$0 = p - \tfrac{1}{2}z^2 - zp - \tfrac{1}{2}p^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2 + \tfrac{1}{3}p^3.$$

Als we nu $p = \frac{1}{2}z^2 + q$ invullen, valt de $\frac{1}{2}z^2$ weg en blijft het volgende over:

$$0 = q - \tfrac{1}{2}z^3 - zq - \tfrac{1}{2}p^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2 + \tfrac{1}{3}p^3,$$

we hebben alleen zp uitgewerkt omdat de andere producten hogere machten van z dan de derde opleveren. Dit wist Newton ook en hij interpreteerde het resultaat daarom als volgt:

$$0 = q - \tfrac{1}{6}z^3 + \text{de rest.}$$

(De $\frac{1}{2}z^3$ was inderdaad niet betrouwbaar.) De volgende stap laat zich nu raden: stel $q = \frac{1}{6}z^3 + r$ en gebruik de vierde vergelijking. Het kost wat moeite, maar je vindt dan

$$0 = r - \tfrac{1}{24}z^4 + \text{rest.}$$

Daarmee heb je dan al de volgende benadering van x te pakken:

$$x \approx z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{24}z^4.$$

In zijn artikel ging Newton nog één stap verder:

$$x \approx z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{24}z^4 + \tfrac{1}{120}z^5.$$

Hij moet op kladpapier nog een stuk doorgerekend hebben, want even later beschrijft hij hoe het verder zal gaan met deze benaderingen: de n-de macht van z moet gedeeld worden door het product van de getallen 2, 3, tot en met n. Conclusie, als je wilt weten bij welke x de oppervlakte onder de grafiek van $\frac{1}{1+x}$ gelijk is aan z, dan is dat

$$x = z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{24}z^4 \quad \&\text{c.}$$

De e-macht

Als we de logaritme nog even bij ons verhaal betrekken, dan zien we dat we de vergelijking $\ln(1+x) = z$ naar x hebben opgelost, maar we weten nog een manier om die oplossing op te schrijven, namelijk $x = \mathrm{e}^z - 1$. Newton had dus een oneindige som voor $\mathrm{e}^z - 1$ (en dus voor e^z) gevonden. We weten nu ook wanneer de oppervlakte precies 1 is, namelijk bij $z = \mathrm{e} - 1$ en voor dat getal hebben we nu ook een oneindige som gevonden:

$$\mathrm{e} - 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \quad \&\text{c,}$$

ofwel

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \quad \&\text{c.}$$