 (116) inventam, $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c.$, qui termini, ſi in fractiones decimales convertantur atque actu addantur, præbebunt hunc valorem pro $a =$ 2,71828182845904523536028, cujus ultima adhuc nota veritati eſt conſentanea. Quod ſi jam ex hac baſi Logarithmi conſtruantur, ii vocari ſolent Logarithmi *naturales* ſeu *hyperbolici*, quoniam quadratura hyperbolæ per iſtiuſmodi Logarithmos exprimi poteſt. Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,718281828459 &c. conſtanter litteram e, quæ ergo denotabit baſin Logarithmorum naturalium ſeu hyperbolicorum, cui reſpondet valor litteræ $k = 1$; ſive hæc littera e quoque exprimet ſummam hujus Seriei $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c.$ in infinitum.

EXEMPLUM III.

Imprimis vero etiam hic attentione dignus eſt numerus e, cujus logarithmus eſt $= 1$, qui eſt $e = 2,718281828459$, unde oritur $\frac{e-1}{2} = 0,8591409142295$, quæ fractio decimalis, ſi ſuperiori modo tractetur, dabit quotos ſequentes

8591409142295	10000000000000	1
8451545146224	8591409142295	6
139863996071	14085908577704	10
139312557916	13986399607 10	14
551438155	9950896994	18
550224488	9925886790	22
1213667	25010204	
	&c.	

ſi iſte calculus exactius adhuc, aſſumto valore ipſius e, ulterius continuetur, tum prodibunt iſti quoti

$$1,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22,\ 26,\ 30,\ 34,\ \&c.,$$

qui, demto primo, progreſſionem arithmeticam conſtituunt, unde patet fore

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{\&c.}}}}}}},$$

cujus fractionis ratio ex calculo infiniteſimali dari poteſt.

Boven: Euler voert de notatie e in.
Onder: Euler geeft de kettingbreuk van $\frac{e-1}{2}$.

door **Klaas Pieter Hart**

Euler over het getal e

Leonhard Euler was een meester in het manipuleren van oneindige sommen, producten en breuken. We bekijken hier hoe hij exponentiële functies behandelde.

In 1755 schreef Leonhard Euler een boek met de titel Introductio in Analysin Infinitorum (Inleiding tot de Analyse van het Oneindige). In dit leerboek behandelde Euler "de leer van functies van veranderlijke grootheden, hun ontbinding in factoren en ontwikkeling in reeksen; verder de leer van de logaritmen, cirkelbogen en hun sinussen en tangenten, en veel andere zaken die voor de Analyse van het Oneindige van belang zijn".

Kettingbreuken

In het laatste hoofdstuk van het boek hield Euler zich bezig met zogeheten kettingbreuken. Die ontstaan als je het algoritme van Euclides (zie pagina 30) toepast op paren getallen om hun grootste gemene deler te vinden.

Zijn eerste voorbeeld was de breuk $\frac{1461}{59}$. Wat het algoritme van Euclides doet is herhaald delen, waarbij je telkens quotiënt en rest onthoud. In de eerste stap vinden we $1461 = 24 \cdot 59 + 45$, of $\frac{1461}{59} = 24 + \frac{45}{59}$.

Vervolgens kijken we naar de breuk $\frac{59}{45}$, daar vinden we $\frac{59}{45} = 1 + \frac{14}{45}$ en dus

$$\frac{1461}{59} = 24 + \frac{45}{59} = 24 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{14}{45}}$$

In de volgende stap komt er $\frac{45}{14} = 3 + \frac{3}{14}$, zodat

$$\frac{1461}{59} = 24 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{3}{14}}}$$

Als we zo doorgaan, vinden we $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$, $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ en $\frac{2}{1} = 2 + 0$. Dat vullen we allemaal in:

$$\frac{1461}{59} = 24 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Zo'n samengestelde breuk wordt een kettingbreuk genoemd. Voor gewone breuken zijn dergelijke schrijfwijzen niet zo opwindend, behalve dan dat de getallen 24, 1, 3, 4, 1 en 2 heel wat kleiner zijn dan 1461 en 59. Voor getallen die niet als een breuk te schrijven zijn, zoals $\sqrt{2}$, π en e kun je kettingbreuken gebruiken om heel nauwkeurige benaderingen te maken.

Voor $\sqrt{2}$ gaf Euler de volgende uitdrukking:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

Opgave 1. Werk de eerste partiële breuken, 1, $1 + \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$,... uit en vergelijk ze met $\sqrt{2}$.

Een formule voor e

Van Euler wordt gezegd dat hij rekende zoals anderen ademhaalden. Door al dat werk kwam hij verbanden op het spoor die anderen niet zagen. Zo vond hij voor e ook een kettingbreuk, niet rechtstreeks maar via de breuk $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. Hij begon met de benadering $\mathrm{e} \approx 2{,}718281828459$ en werkte die om tot $\frac{\mathrm{e}-1}{2} \approx 0{,}8591409142295$. Daarna voerde hij de delingen als boven uit voor het quotiënt $\frac{10000000000000}{8591409142295}$, zie de inzet op pagina 29. Dat rekenwerk leverde de volgende kettingbreuk:

$$\frac{\mathrm{e}-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cdots}}}}}}$$

Euler schreef hier doodleuk bij: met betere benaderingen van e hadden we het rijtje 1, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, ... (met $4k - 2$ op de k-de plaats) gevonden. De partiële breuken die je zo krijgt, leveren heel nauwkeurige benaderingen van $\frac{1}{2}(\mathrm{e} - 1)$ en daarmee ook van e zelf.

Het uitwerken van zo'n (partiële) kettingbreuk lijkt een heel karwei. In de bovengevonden breuk moeten we beneden beginnen met $18 + \frac{1}{22} = \frac{397}{22}$, dan $14 + \frac{22}{397} = \frac{5580}{397}$, dan $10 + \frac{397}{5580}$, enzovoort. Dat is een heel gedoe en je moet voor iedere volgende breuk weer helemaal opnieuw beginnen.

Gelukkig bestaat er een relatie tussen de tellers en de noemers van de opeenvolgende breuken. De eerste breuk is $\frac{1}{1}$ (niet vereenvoudigen), de volgende is $\frac{6}{7}$, de derde is $\frac{61}{71}$. Let nu op: er geldt $61 = 1 + 10 \cdot 6$ en $71 = 1 + 10 \cdot 7$; de volgende breuk is $\frac{860}{1001}$, waarbij geldt $860 = 6 + 14 \cdot 61$ en $1001 = 7 + 14 \cdot 71$. De volgende in de rij is

$$\frac{61 + 18 \cdot 860}{71 + 18 \cdot 1001} = \frac{15541}{18089}.$$

In het algemeen: de breuk die je krijgt als je bij $4k - 2$ stopt, ontstaat als volgt uit de voorgaande twee breuken $\frac{p}{q}$ en $\frac{r}{s}$:

$$\frac{p + r(4k-2)}{q + s(4k-2)}. \qquad (*)$$

Als je vóór de breuk $\frac{1}{1}$ nog $\frac{0}{1}$ in de rij zet, geldt de formule ook voor $k = 2$.

Opgave 2. Om breuken voor e te krijgen, moet je de breuken voor $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$ met 2 vermenigvuldigen en dan bij het resultaat 1 optellen. Ga na dat je hetzelfde resultaat krijgt als je met de breuken $\frac{0}{1}$ en $\frac{3}{1}$ begint en vervolgens weer formule $(*)$ gebruikt.

Eulers weg naar de e-macht

Eerder in het boek had Euler de formule voor e^z, die Newton ook al had ontdekt, op een geheel andere manier gemaakt. Hij deed dat op de manier van die tijd, door de z met oneindig kleine stapjes te laten variëren. Het idee daarbij was dat bij zo'n oneindig kleine verandering de raaklijn aan de grafiek niet te onderscheiden is van de grafiek zelf. De helling van die raaklijn was dan de waarde van de afgeleide; we vinden dit nog terug in de $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$-notatie voor de afgeleide.

Met Euler nemen we een getal a, groter dan 1, en de bijbehorende functie $z \mapsto a^z$. We blijven in de buurt van 0 en vullen een 'oneindig klein getal' ω in en krijgen dan $a^\omega = 1 + k\omega$, waarbij k de helling van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(0,1)$ is. Euler ging vervolgens machtsverheffen: uit $a^\omega = 1 + k\omega$ volgt $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$ voor elke i. Als je de rechterkant uitvermenigvuldigt, komt er

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \cdots$$

Vervolgens nam Euler een 'oneindig groot getal' i en wel zo dat $z = i\omega$ een gewoon 'eindig getal' is; daarna vulde hij $\omega = \frac{z}{i}$ in:

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3 + \cdots$$

Maar, zei Euler, omdat i oneindig groot is, volgt dat $\frac{i-1}{i} = 1$, $\frac{i-2}{i} = 1$ enzovoort en dus krijgen we

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

en als we hier $z = 1$ nemen, dan zien we duidelijk de relatie tussen a en k:

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

Het getal e

De a die bij $k = 1$ hoort, neemt natuurlijk een speciale plaats in. Die is gelijk aan

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

Als we de breuken uitwerken en optellen, zei Euler, dan krijgen we

$$a = 2{,}71828182845904523536028,$$

waarbij het laatste cijfer echt klopt.

Op dit punt voerde Euler de letter in die wij nu nog voor dit getal gebruiken: 'het getal dat bij $k = 1$ hoort duiden we in het vervolg kortweg met de letter e aan'. Dus

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

Hiermee hebben we ook, langs een nieuwe weg, de formule voor e^z ontdekt die we in het vorige nummer op de manier van Newton hadden gevonden:

$$\mathrm{e}^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

Eulers berekening

$$\frac{10000000000000}{8591409142295} = 1 + \frac{1408590857704}{8591409142295}$$

$$\frac{8591409142295}{1408590857704} = 6 + \frac{139863996071}{1408590857704}$$

$$\frac{1408590857704}{139863996071} = 10 + \frac{9950896994}{139863996071}$$

$$\frac{139863996071}{9950896994} = 14 + \frac{551438155}{9950896994}$$

$$\frac{9950896994}{551438155} = 18 + \frac{25010204}{551438155}$$

$$\frac{551438155}{25010204} = 22 + \frac{12113667}{25010204}$$

Het algoritme van Euclides

In De Elementen van Euclides staat, in Boek IX, de volgende stelling (de vertaling komt uit een Nederlandse uitgave uit 1930 van E. J. Dijksterhuis):
Wanneer, als twee ongelijke getallen uitgezet zijn, en het kleinste wordt voortdurend van het grootste afgetrokken, het overblijvende nooit het daaraan voorafgaande meet, totdat de eenheid is overgebleven, dan zullen de oorspronkelijke getallen onderling priem zijn.

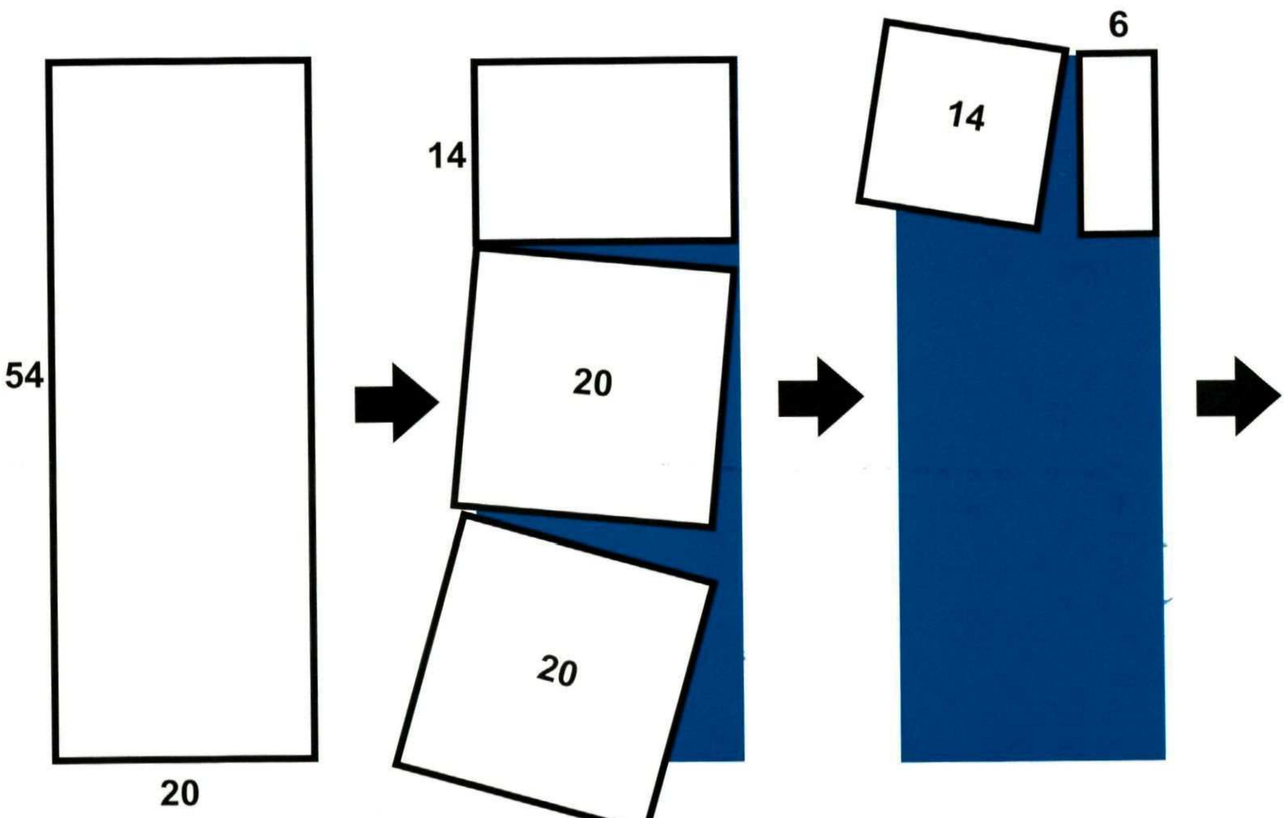
Dat klinkt wat merkwaardig, maar je moet het meetkundig lezen. Euclides werkte altijd met lijnstukjes, net zoveel eenheden lang als de getallen groot waren. In dit verband betekent 'meten' dat het kleinere lijnstuk een geheel aantal malen in het grotere past en dus dat het kleinere getal het grotere deelt.

Als voorbeeld nemen we 8 en 3. Trek 3 van 8 af, dan blijft 5 over, dat is groter dan 3, trek 3 nogmaals af, dan blijft 2 over. Nu is 3 de grootste, trek daar 2 van af, dan blijft 1 over. Nu is op geen enkel moment wat overblijft een deler van het voorgaande getal totdat we 1 (de eenheid) bereikt hebben. Conclusie: 8 en 3 zijn relatief priem.

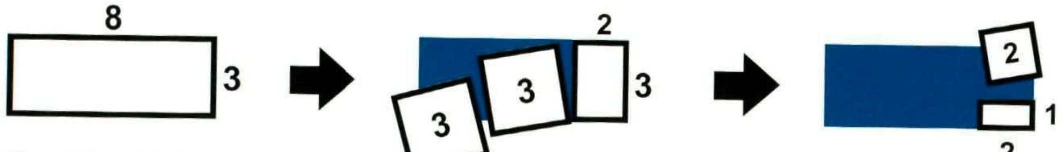
Meteen daarna gebruikte Euclides het bewijs van die stelling om de grootste gemene deler van twee getallen te vinden. Hij merkte namelijk op dat als het wel gebeurt dat 'wat overblijft het voorafgaande meet' op dat moment de grootste gemene deler van de twee getallen gevonden is.

De grootste gemene deler (ggd) van twee getallen is wat de naam zegt: het is een deler van beide getallen en het is het grootste getal met die eigenschap. Het algoritme van Euclides geeft een efficiënte manier om die grootste gemene deler te vinden, bijvoorbeeld $\text{ggd}(54, 20)$.

Je trekt 20 twee keer van 54 af, met



Figuur 2 $\text{ggd}(54, 20) = 2$



Figuur 1 $\mathrm{ggd}(8, 3) = 1$

rest 14; die laatste deelt 20 niet. We gaan door: trek 14 van 20 af, met rest 6; omdat 6 geen deler van 14 is doen we nog een stap: trek 6 twee keer van 14 af met rest 2. Omdat 2 een deler van 6 is hebben we de grootste gemene deler van 54 en 20 gevonden: $\mathrm{ggd}(54, 20) = 2$.

Het algoritme laat zich goed begrijpen door er meetkundig naar te kijken. Om $\mathrm{ggd}(8, 3)$ te vinden, neem je een rechthoek van 8 bij 3, zie figuur 1. Om $\mathrm{ggd}(54, 20)$ te vinden, neem je een rechthoek van 54 bij 20, zie figuur 2. Probeer deze rechthoek te betegelen met allemaal even grote vierkanten. De zijde van het grootste vierkant dat je hierbij kunt gebruiken is nu net de grootste gemene deler van 54 en 20. Die grootste tegelmaat kun je vinden door stapsgewijs vierkanten van de rechthoek af te halen tot er uiteindelijk alleen nog een vierkant overblijft. Eigenlijk precies wat we volgens het algoritme moesten doen. Uit het laatste plaatje van figuur 2 volgt dat $\mathrm{ggd}(54, 20) = 2$.

Tegenwoordig wordt het algoritme als volgt beschreven met delen in plaats van aftrekken: 'blijf de grootste door de kleinste delen tot de deling opgaat', dan heb je de grootste gemene deler te pakken. We bekijken de getallen die Euler gebruikte nog een keer: de onderstaande reeks delingen laat zien dat $\mathrm{ggd}(1461, 59) = 1$.

$$\begin{aligned}
1461 &= 24 \cdot 59 + 45\\
59 &= 1 \cdot 45 + 14\\
45 &= 3 \cdot 14 + 3\\
14 &= 4 \cdot 3 + 2\\
3 &= 1 \cdot 2 + 1\\
2 &= 2 \cdot 1
\end{aligned}$$

Bij de deling die uiteindelijk opgaat, is 1 de deler en dat is gelijk de grootste gemene deler: $\mathrm{ggd}(1461, 59) = 1$.

Opgave. Bepaal op dezelfde manier de grootste gemene deler van 1461 en 57.