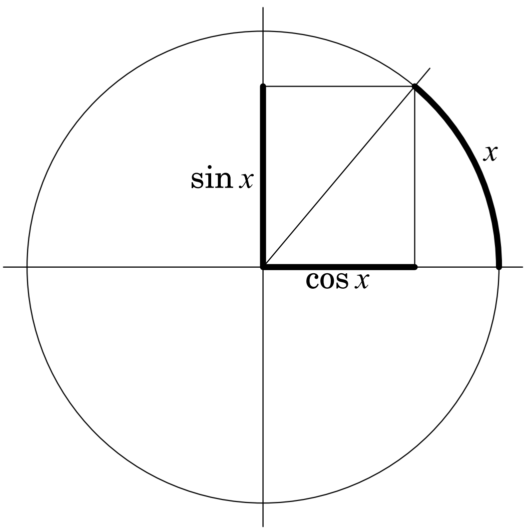
door **Klaas Pieter Hart**

Sinus en cosinus

Stel dat je een rekenmachientje aan het maken bent dat ook een sinus- en een cosinustoets moet hebben. Wat moet er gebeuren als je die toetsen indrukt? De meetkundige definities van $\sin x$ en $\cos x$ helpen in dit geval niet erg. Het lijkt mij in elk geval heel lastig te programmeren: pas de lengte x op de eenheidscirkel af vanaf (1, 0), projecteer het eindpunt op de x-as om $\cos x$ te krijgen en op de y-as om $\sin x$ te krijgen. In dit artikel bekijken we hoe een rekenmachine de sinus en cosinus van een ingevoerd getal nauwkeurig kan benaderen.



Figuur 1 De meetkundige definitie van $\sin x$ en $\cos x$

Integreren en differentiëren

Met een beetje kennis van de differentiaal- en integraalrekening kun je goede benaderingen van $\sin x$ en $\cos x$ maken; het voordeel van die benaderingen is dat je ze met behulp van alleen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen kunt uitrekenen. We leiden de formules alleen voor positieve x af; voor negatieve x gebruiken we natuurlijk dat $\sin(-x) = -\sin x$ en $\cos(-x) = \cos x$.

Wat we van onze functies gebruiken is niet veel: we moeten weten wat hun afgeleiden zijn: $(\sin x)' = \cos x$ en $(\cos x)' = -\sin x$. Deze formules zetten we om in formules voor integralen:

$$\int_0^x \cos t \, dt = \sin x$$

en

$$\int_0^x \sin t \, dt = 1 - \cos x;$$

de laatste kunnen we ook schrijven als

$$\cos x = 1 - \int_0^x \sin t \, dt.$$

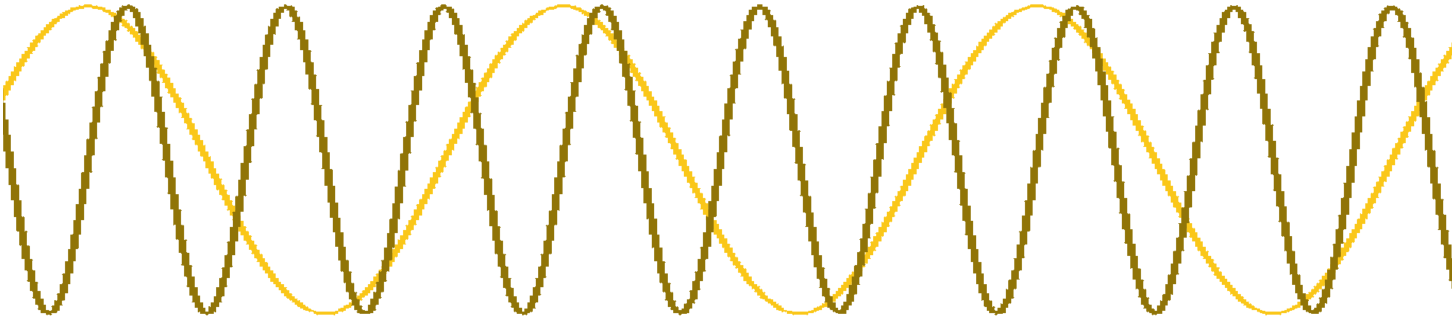
Verder gebruiken we nog dat $\cos x < 1$ (behalve als $x = 2k\pi$ met k geheel natuurlijk). Met behulp van $\cos x < 1$ vinden we namelijk

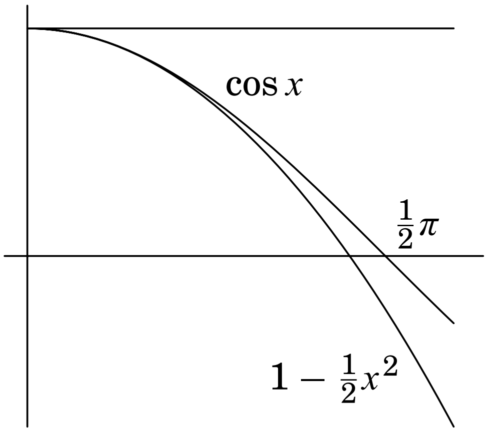
$$\sin x = \int_0^x \cos t \, dt < \int_0^x 1 \, dt = x,$$

dit geldt voor alle $x > 0$.
Maar dan volgt op dezelfde manier

$$\cos x = 1 - \int_0^x \sin t \, dt > 1 - \int_0^x t \, dt = 1 - \frac{1}{2}x^2,$$

weer voor alle $x > 0$.





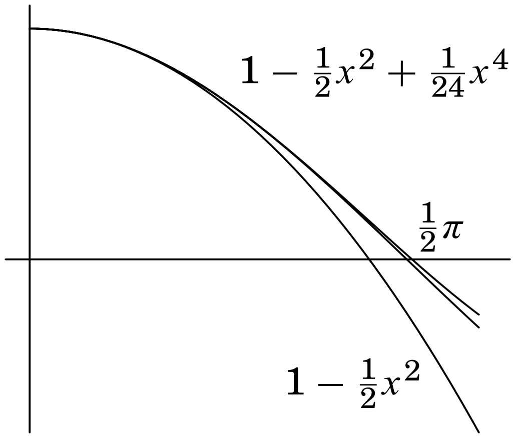
Figuur 2 $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1$

Als we weer terug gaan naar $\sin x$ vinden we

$$\sin x > \int_0^x 1 - \frac{1}{2}t^2 \, \mathrm{d}t = x - \frac{1}{6}x^3.$$

Dit stoppen we weer in de integraal voor $\cos x$:

$$\cos x < 1 - \int_0^x t - \frac{1}{6}t^3 \, \mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$



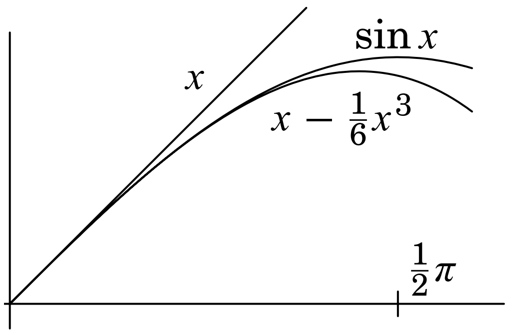
Figuur 4 $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$

Voor we nog verder gaan, bekijken we even wat we gevonden hebben. Blijkbaar geldt, voor $x > 0$, dat

$$x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x < x$$

en

$$1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4. \quad (*)$$

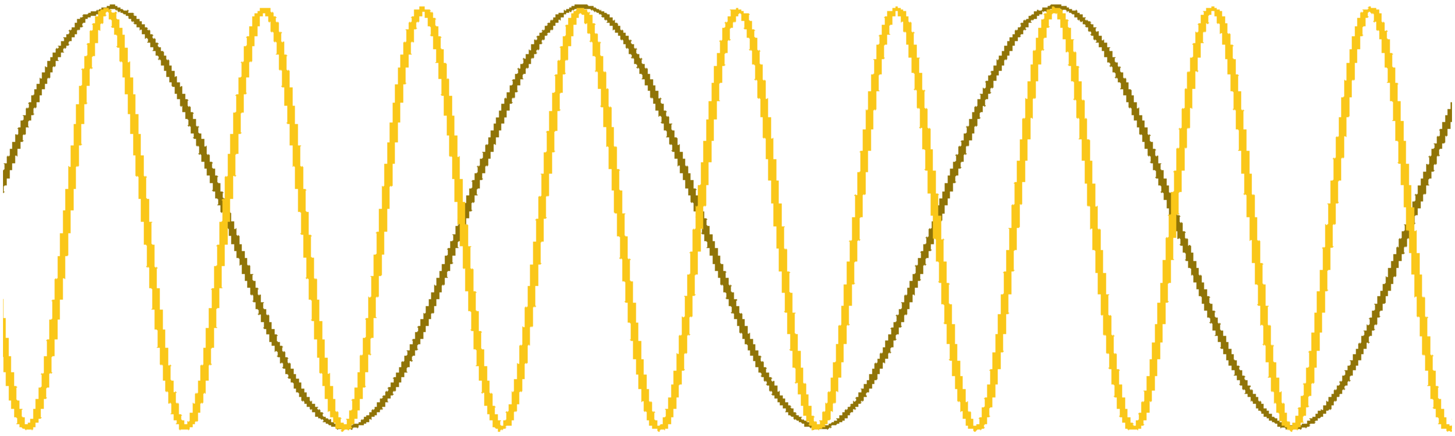


Figuur 3 $x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x < x$

Om de sinus en cosinus van een ingevoerd getal te bepalen, gebruikt een rekenmachine benaderingsformules. Voor een antwoord op zeg acht decimalen nauwkeurig zijn deze formules precies genoeg:

$$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10}$$



Dit geeft voor niet al te grote x al redelijk scherpe benaderingen, bijvoorbeeld $\sin 0{,}2 \approx 0{,}2$ met een afwijking van minder dan $0{,}008/6 = 0{,}00133...$

Voor $\cos 0{,}2$ krijgen we de benadering $0{,}98$ met een afwijking van minder dan $0{,}00066...$

Opgave 1. Op welk interval vind je het nog acceptabel om $\sin x$ met x te benaderen? En voor welke x ben je tevreden met $1 - \frac{1}{2}x^2$ als benadering van $\cos x$?

Verder integreren

We kunnen ons proces voortzetten en om en om steeds betere benaderingen van $\sin x$ en $\cos x$ maken; als we de laatste ongelijkheden voor $\cos x$ integreren, vinden we

$$x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x < x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

Als we dit weer voor $\cos x$ doen, kunnen we de linkerkant van (*) verbeteren tot

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 < \cos x.$$

Opgave 2. Voor welke x zou je nu de benaderingen $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ en $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ gebruiken?

Als we doorgaan met integreren, vinden we rijen benaderingen voor $\sin x$ en $\cos x$; ga zelf zorgvuldig na dat de volgende formules ontstaan:

$$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

met afwijking kleiner dan $\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ en

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

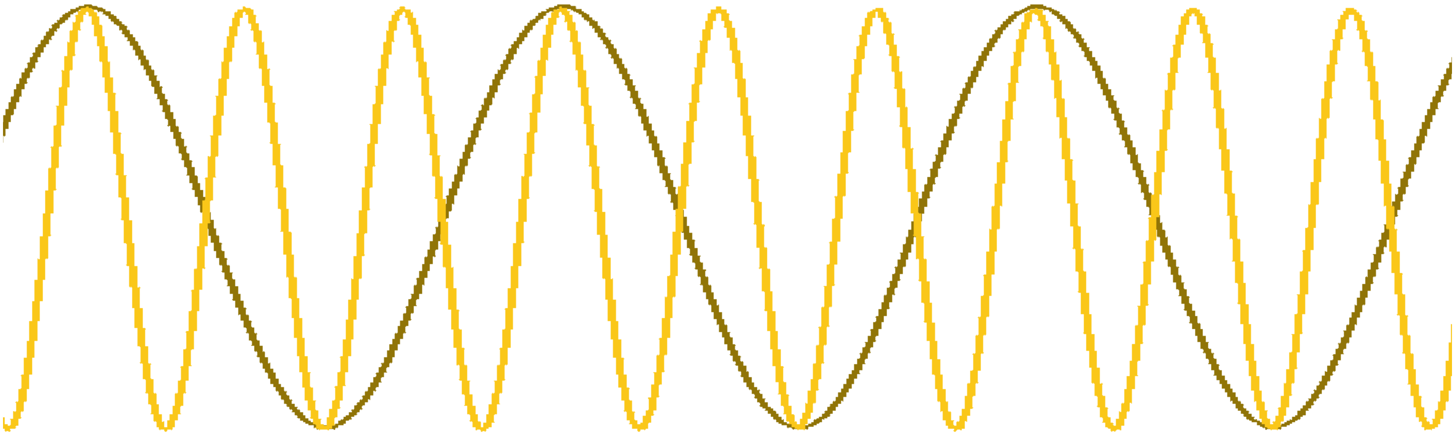
met afwijking kleiner dan $\frac{1}{(2n+2)!}x^{2n+2}$.

Wanneer stoppen we?

Neem eens aan dat we $\sin x$ en $\cos x$ tot op acht decimalen achter de komma willen benaderen. Welke n moeten we daarbij kiezen? Als je gebruikt dat $\sin x$ en $\cos x$ periodiek zijn en als je bedenkt dat, bijvoorbeeld $\sin(\pi - x) = \sin x$ en $\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$, dan is het duidelijk dat we ons kunnen beperken tot het interval $[0, \frac{1}{4}\pi]$. Omdat $\pi < 4$, is elke x in dat interval kleiner dan 1. Dat betekent dat voor elke x de afwijkingen zeker kleiner zijn (in absolute waarde) dan $\frac{1}{(2n+1)!}$ respectievelijk $\frac{1}{(2n+2)!}$. Als we n zó groot kiezen dat die twee kleiner zijn dat 10^{-8} dan zitten we voor elke x in $[0, \frac{1}{4}\pi]$ goed.

Een beetje proberen met een rekenmachientje laat zien dat $12! > 4 \times 10^8$. Dat betekent dat we voor $\sin x$ moeten zorgen dat $2n + 1 \geq 12$, ofwel $n \geq 6$ en voor $\cos x$ moeten we $2n + 2 \geq 12$ hebben, dus $n \geq 5$. Dit betekent dat we de volgende formule onder de sin-toets moeten programmeren:

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11}.$$



En onder de cos-toets stoppen we dan een programmaatje dat

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + \tfrac{1}{8!}x^8 - \tfrac{1}{10!}x^{10}$$

uitrekent.

De tangens

Nu we toch bezig zijn, kunnen we gelijk een knop voor $\tan x$ proberen te maken. We kunnen natuurlijk onder die knop gewoon het quotiënt van $\sin x$ en $\cos x$ programmeren, maar we kunnen ook proberen een eenvoudige som van machten van x te maken. De reden hiervoor is dat we zo het aantal rekenstappen kunnen beperken; in plaats van twee keer een som van zes machten van x uit te rekenen (en op elkaar te delen) kunnen we misschien met één zo'n berekening toe. Hiertoe delen we de benaderingen van $\sin x$ en $\cos x$ (voor ons rekenmachientje in aanbouw) op elkaar.

Met enig doorzettingsvermogen levert een staartdeling de volgende benadering voor $\tan x$:

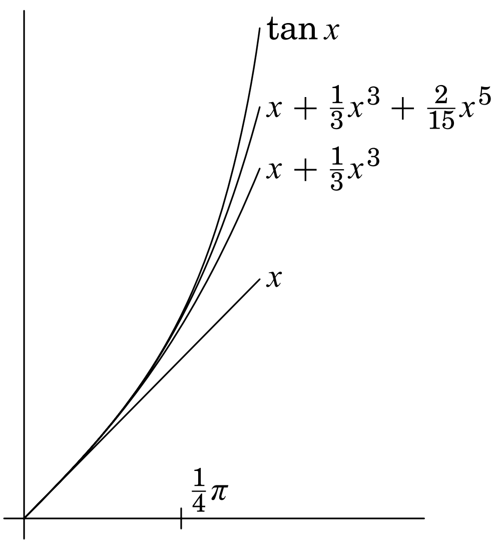
$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11}.$$

Het verschil tussen $\tan x$ en deze benadering laat zich niet zo makkelijk afschatten als bij $\sin x$ en $\cos x$. Dat ligt aan een paar dingen, waaronder $\tan x$ zelf: op het interval $[0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ is de benadering netjes begrensd, maar de tangens heeft bij $\frac{1}{2}\pi$ een verticale asymptoot. Maar ook op het interval $[0, \frac{1}{4}\pi]$ is de laatste benadering niet zo goed als die van de sinus en cosinus; dat komt doordat we benaderingen op elkaar gedeeld hebben en ook nog eens een rest bij die deling weggelaten hebben. Al met al krijgen we met bovenstaande formule maar drie betrouwbare cijfers achter de komma.

Met een slimmigheidje kun je dat dramatisch verbeteren; gebruik hiervoor de verdubbelingsformule voor de tangens:

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Dit gebruik je als volgt: begin met $x \in [0, \frac{1}{4}\pi]$, benader $\tan \frac{1}{2}x$, noem de benadering t, en gebruik dan $2t/(1-t^2)$ als benadering van $\tan x$ zelf. Dat levert gelijk zeven betrouwbare cijfers achter de komma op.



Figuur 5 $x < x + \frac{1}{3}x^3 < x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 < \tan x$