door **Klaas Pieter Hart**

We spannen een touw om de aarde, maken het een beetje langer en proberen het weer strak te trekken. Hoe hoog komt het dan te hangen?

Een touwtje om de aarde

Vrijwel iedereen kent het volgende probleem wel. We spannen een (niet rekbaar) touw om de aarde, zeg over de polen langs de nulmeridiaan (en de 180-meridiaan natuurlijk). Aan de noordpool knippen we het touw open en voegen een stuk van één meter lang in. Als we het touw overal even hoog optillen, hoe hoog komt het dan boven de aarde te hangen?

Het antwoord, ongeveer 16 centimeter, verbaast de meeste mensen, tot je het netjes voorrekent. Oorspronkelijk is het touw $2\pi R$ lang, waarin R de straal van de aarde (in meters) is. Waar we naar vragen is de straal van de cirkel waarvan de omtrek één meter langer is, met andere woorden: bepaal R' zó dat $2\pi R' = 2\pi R + 1$. Dat is heel makkelijk: $R' = R + \frac{1}{2\pi} \approx R + 0{,}159$.

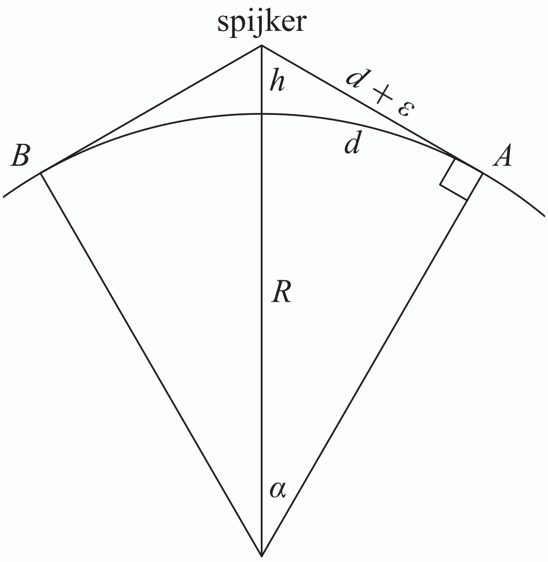
De berekening laat zien dat de waarde van R er niet toe doet: als de omtrek van een willekeurige cirkel één meter langer wordt gemaakt, wordt de straal bijna 16 cm langer.

Span een touw om de aarde. Maak het 1 meter langer en til het overal gelijkelijk op. Kan er een muis onderdoor?

Aan een spijker

We bekijken nu een ander probleem. Stel dat we het touw alléén aan de noordpool optillen en strak trekken – alsof we de aarde met behulp van het touw aan een spijker ophangen – hoe hoog komt het hoogste punt dan?

Het volgende plaatje geeft een situatieschets.



Hierin is R de straal van de aarde, ε de helft van het ingelaste stukje (een halve meter dus) en h de gevraagde hoogte. De boog d verbindt de punten waar het touw los komt van het aardoppervlak. De hoek bij A is recht, omdat de lijn van A naar de spijker een raaklijn aan de cirkel is, dankzij het straktrekken.

Pas de stelling van Pythagoras toe:

$$(R+h)^2 = R^2 + (d+\varepsilon)^2$$

en dus $h + R = \pm\sqrt{R^2+(d+\varepsilon)^2}$, ofwel

$$h = -R \pm \sqrt{R^2+(d+\varepsilon)^2}.$$

Omdat h positief is, moeten we

$$h = \sqrt{R^2+(d+\varepsilon)^2} - R$$

hebben. Hierin kunnen we R buiten de haakjes halen, zodat we

$$h = R\left(\sqrt{1+\left(\frac{d+\varepsilon}{R}\right)^2} - 1\right) \qquad (1)$$

krijgen. Hierin is d nog onbekend. Nu geldt $d = \alpha R$ of $\frac{d}{R} = \alpha$ (we werken in radialen) en het blijkt wat makkelijker te zijn een vergelijking voor α op te stellen.

Uit de schets kunnen we aflezen dat

$$\tan\alpha = \frac{d+\varepsilon}{R}$$

en dus

$$\tan\alpha = \alpha + \frac{\varepsilon}{R},$$

ofwel

$$\tan\alpha - \alpha = \frac{\varepsilon}{R}. \qquad (2)$$

Span een touw om de aarde. Maak het 1 meter langer en til het bij de noordpool op. Kan er een ijsbeer onderdoor?

We krijgen α dus als oplossing van de vergelijking (2).

Nu wordt het tijd de getallen in te gaan vullen. De omtrek van de aarde is, per definitie, 40.000 km, zodat R = 40.000.000/(2π) m, verder $\varepsilon = \frac{1}{2}$ m. We moeten dus

$$\tan\alpha - \alpha = \frac{\pi}{40.000.000}$$

oplossen. Je kunt dit zó door de *solver* van je grafische rekenmachine laten doen (**X=1** als beginvoorwaarde gebruiken): $\alpha \approx 0{,}006176 = 6{,}176 \times 10^{-3}$ en daarmee $d \approx 247{,}040$ km. Hoewel het interessant is te zien hoe ver van de noordpool het touw recht wordt, hebben we d niet echt nodig voor de berekening; in (1) vervangen we $\frac{d}{R}$ door α:

$$h = R\left(\sqrt{1+\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{R}\right)^2}-1\right).$$

Mijn rekenmachientje geeft, na alles invullen: $h \approx 121{,}4$ m.

Opgave 1. Doe de berekening nogmaals, maar nu met slechts één centimeter extra. Aangenomen dat het touw licht genoeg is, kun je het dan zonder hulpmiddelen strak krijgen?

Een snelle benadering

De hoek α die hierboven gevonden is, is behoorlijk klein. In dat geval kan $\tan\alpha$ goed benaderd worden met $\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$ (zie het stukje over $\cos x$ en $\sin x$ in de vorige *Pythagoras*), zodat (2) verandert in een bijna-gelijkheid:

$$\frac{1}{3}\alpha^3 \approx \frac{\varepsilon}{R}.$$

De breuk $\frac{d+\varepsilon}{R}$ is ook heel klein en voor heel kleine x geldt $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$; daarmee kunnen we (1) omwerken tot

$$h \approx \frac{1}{2}R\left(\frac{d+\varepsilon}{R}\right)^2 \approx \frac{1}{2}R\left(\alpha+\frac{1}{3}\alpha^3\right)^2.$$

Als we het kwadraat uitwerken, komt er

$$h \approx \frac{1}{2}R\left(\alpha^2+\frac{2}{3}\alpha^4+\frac{1}{9}\alpha^6\right).$$

Als we de getallen weer invullen, krijgen we $R\alpha^2 = 242{,}8$, $R\alpha^4 = 0{,}009$ en $R\alpha^6 = 3{,}5 \times 10^{-7}$. Dit betekent dat we de vierde en zesde machten wel weg kunnen laten en de volgende benadering van h gebruiken:

$$h \approx \frac{1}{2}R\alpha^2.$$

Als we verder nog bedenken dat $\alpha \approx \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{R}}$, dan komen we tot de volgende uitdrukking voor h:

$$h \approx \frac{1}{2}\sqrt[3]{9R\varepsilon^2}.$$

Als we dan ook nog de waarde van R invoeren, houden we uiteindelijk de volgende benadering over:

$$h \approx 50\sqrt[3]{\frac{360\varepsilon^2}{2\pi}}. \qquad (3)$$

Dit geeft niet echt een ander antwoord dan de berekening in het begin: als we $\varepsilon = 0{,}5$ invullen, komen we via (3) ook uit op $h \approx 121{,}4$ m.

Opgave 2. Vul $\varepsilon = 0{,}005$ in. Hoe groot is het verschil ten opzichte van het antwoord op opgave 1?

Opgave 3. Onderzoek hoe goed de benadering $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ is. Vergelijk bijvoorbeeld $(1+\frac{1}{2}x)^2$ met $1 + x$; voor welke x is het verschil klein genoeg om weg te laten? Was in ons voorbeeld de benadering gerechtvaardigd?