door **Klaas Pieter Hart**

De stelling van Ramsey

Als je heel veel dingen over weinig dozen verdeelt, zal ten minste één van die dozen behoorlijk vol raken. Veel resultaten uit de wiskunde zijn tot deze observatie terug te brengen; de stelling van Ramsey is één van de fraaiste voorbeelden.

Als je vijf individuen bij elkaar zet, weet je zeker dat er ten minste drie hetzelfde geslacht zullen hebben. Met andere woorden: als je *alléén* de eigenschap 'man of vrouw' gebruikt om mensen te onderscheiden, zullen er in een groep van vijf mensen zeker drie zijn die je niet uit elkaar kunt houden.

Je kunt naar hartelust op dit thema variëren: als je 367 mensen bij elkaar zet, zijn er zeker twee op dezelfde dag jarig (denk aan 29 februari). Als je dertien getallen uit het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ kiest, zullen er twee minder dan $\frac{1}{12}\pi$ verschillen. Je kunt zelfs een algemene stelling formuleren.

Stelling. *Als m en n twee natuurlijke getallen zijn en je verdeelt $nm + 1$ dingen over m potten, dan moet één pot ten minste $n + 1$ dingen bevatten.*

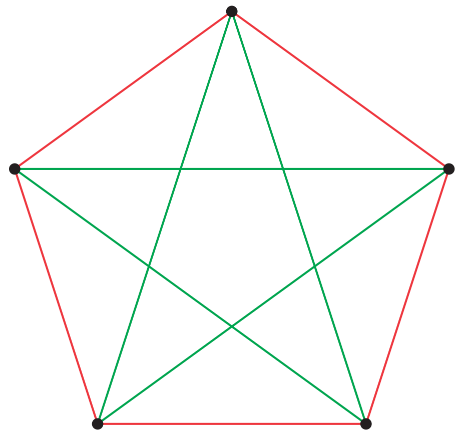
De *stelling van Ramsey,* die we in dit artikel bespreken, zegt dat dergelijke verschijnselen altijd optreden: als je een aantal eigenschappen opschrijft, kun je bij een gegeven n altijd een N vinden zó dat in elke groep van N mensen er n te vinden die door die eigenschappen niet onderscheiden kunnen worden. De eigenschappen waar de stelling van Ramsey over spreekt, kunnen ook van toepassing zijn op paren, drietallen, enzovoort. In dit artikel bekijken we eigenschappen van paren.

Kennen jullie elkaar?

Op een feestje kun je, aan het begin, van elk tweetal aanwezigen vaststellen of ze elkaar kennen of niet. Als er zes aanwezigen zijn, kun je een groepje van drie maken die elkaar alledrie kennen of juist alledrie niet. Dit doe je als volgt. Kies één aanwezige en verdeel de rest in twee groepen: degenen die zij wel kent en de rest. In één van die groepen zitten ten minste drie aanwezigen, bijvoorbeeld de mensen die zij kent. Als twee daarvan elkaar kennen, hebben we een groepje van drie waarin iedereen elkaar kent, zie figuur 1a (linker situatie) op de volgende pagina; als dat niet zo is, hebben we een groepje van drie waarin (nog) niemand elkaar kent, zie figuur 1a (rechter situatie).

Opgave 1. Hoe luidt de redenering als er ten minste drie mensen zijn die zij niet kent? (Zie figuur 1b waar zij maar liefst vier gasten niet kent.)

Slechts vijf gasten. Als je vijf mensen bij elkaar hebt, hoeft dit niet te lukken.



Figuur 2

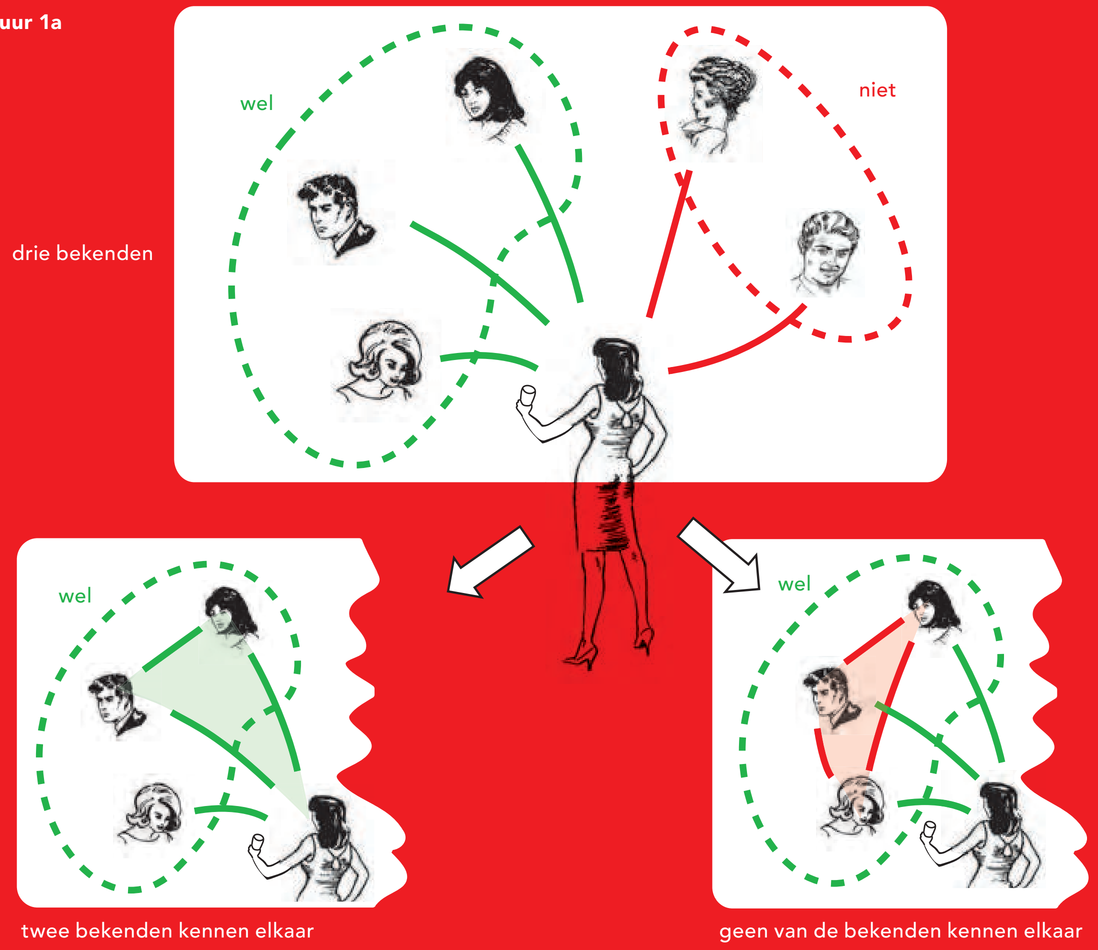
In figuur 2 betekent een groen lijntje 'elkaar kennen' en rood betekent 'elkaar niet kennen'; er zijn geen groene of rode driehoeken.

Op naar de vier

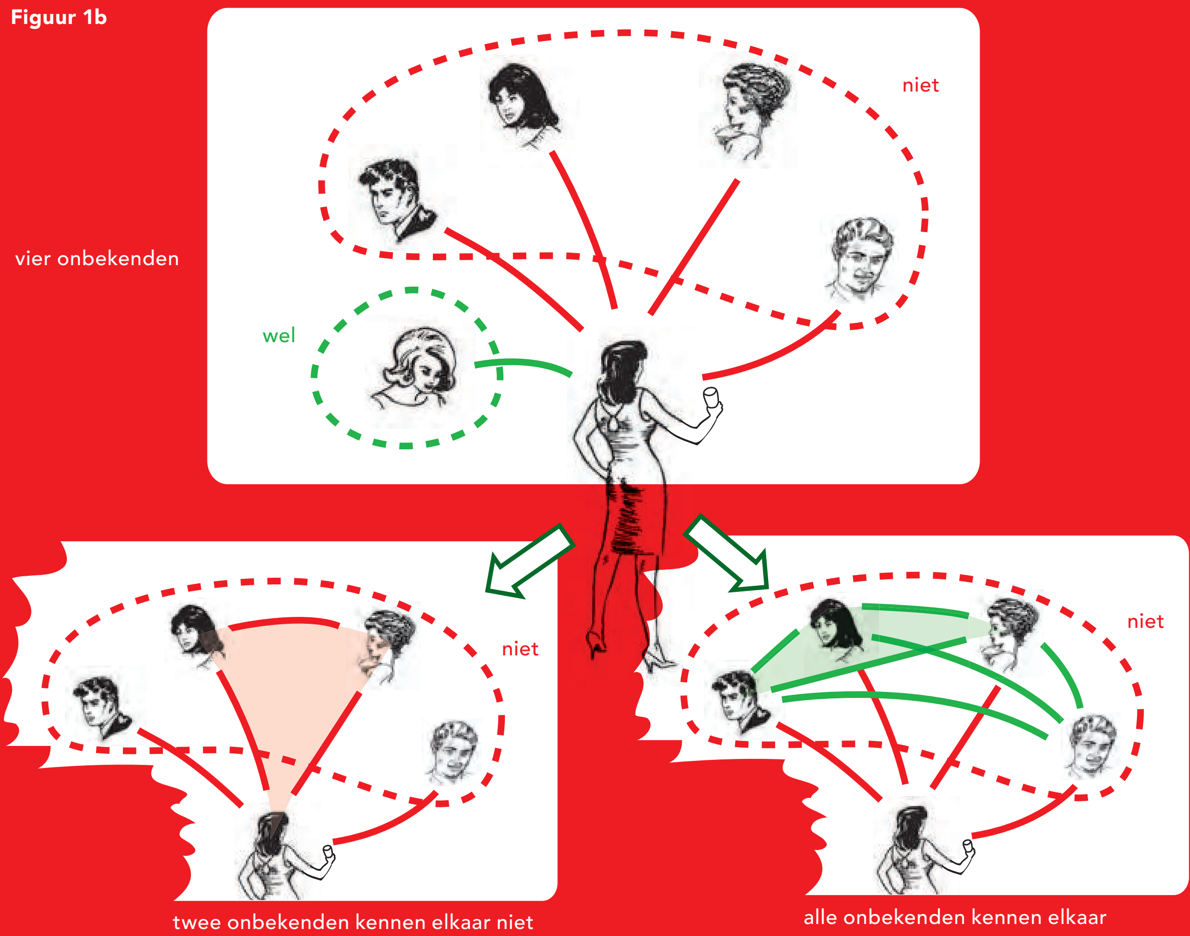
De logische stap lijkt nu te kijken hoe groot het feest moet zijn opdat er een groep van vier mensen is die elkaar allemaal wel of juist allemaal niet kennen. Dat zullen we ook doen, maar het blijkt handiger te zijn ook niet-symmetrische situaties te bekijken. We gaan daarom eerst kijken naar samenkomsten waar óf *vier* mensen te vinden zijn die elkaar wel kennen óf *drie* mensen die elkaar niet kennen.

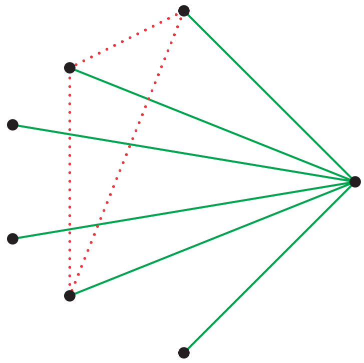
Vier wel of drie niet. Zet op zo'n bijeenkomst weer één aanwezige apart en verdeel de rest in twee groepen: de mensen die hij wel kent en de rest. In de volgende, gunstige, situaties kunnen we concluderen dat er vier mensen zijn die elkaar allemaal kennen of juist drie die elkaar niet kennen.

Figuur 1a

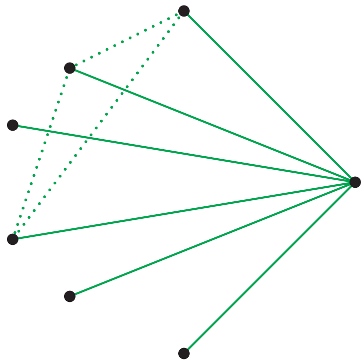


Figuur 1b

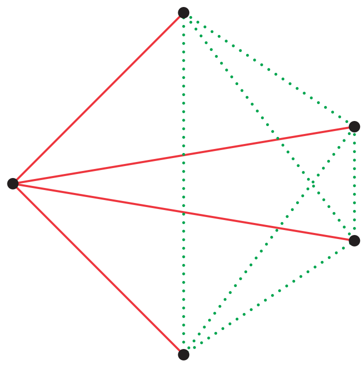




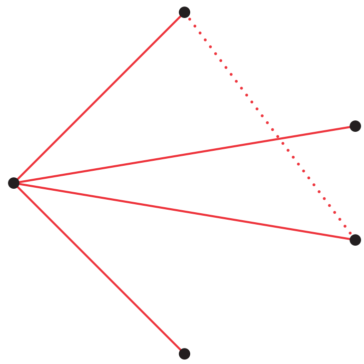
Figuur 3a



Figuur 3b



Figuur 4a



Figuur 4b

Situatie 1. *Er zijn zes mensen die hij kent.* Nu hebben we twee mogelijkheden:

1. Er zijn er drie die elkaar niet kennen, dan zijn we klaar, zie figuur 3a.

2. Er zijn er drie die elkaar wel kennen en samen met onze apart gezette persoon geeft dat een groep van vier die elkaar allemaal kennen, zie figuur 3b.

Situatie 2. *Er zijn vier mensen die hij niet kent.* Weer hebben we twee mogelijkheden:

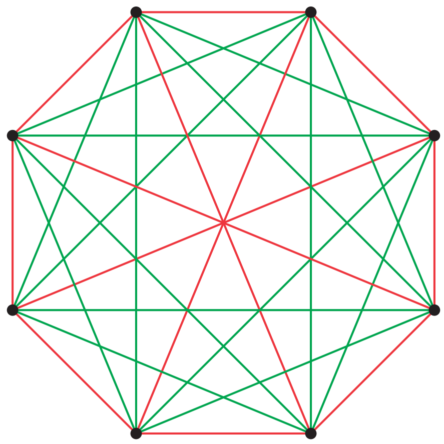
1. Die vier kennen elkaar allemaal, dan zijn we klaar, zie figuur 4a.

2. Twee van die kennen elkaar niet en samen met onze apart gezette persoon geeft dat een groep van drie die elkaar allemaal niet kennen, zie figuur 4b.

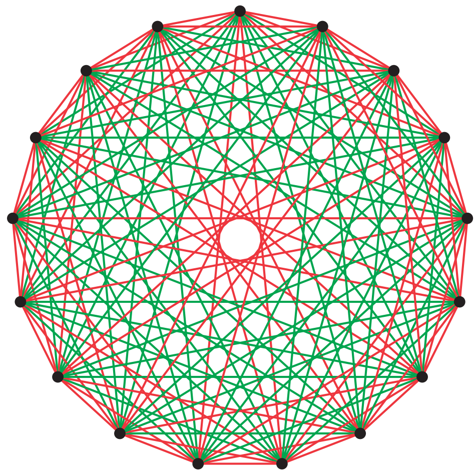
Hieruit blijkt dat het voldoende is als er negen anderen zijn: dan doet één van de gunstige situaties zich zeker voor. Een feest met tien aanwezigen is voor deze niet-symmetrische eis dus groot genoeg.

Negen gasten is al genoeg. Maar zelfs een feest met *negen* aanwezigen is groot genoeg. We hebben namelijk maar één aanwezige nodig waarvoor zich één van de gunstige situaties voordoet (bij tien personen is dat voor *elke* aanwezige zo). Bij elke aanwezige zijn er acht 'anderen' en als de gunstige situaties zich nooit voordoen, is het zo dat bij iedereen die acht zich verdelen in twee groepen: vijf mensen die hij wel kent en drie die hij niet kent.

Trek nu tussen elk tweetal mensen dat elkaar wel kent een lijn. Iedereen is dan eindpunt van vijf lijnen, er zijn negen mensen, dat maakt dus 45 eindpunten; dat kan echter niet: elk lijntje heeft twee eindpunten, het totaal aantal eindpunten moet wel even zijn.



Figuur 5



Figuur 6

Acht mensen is te weinig. Een groep van acht mensen kan te klein zijn, zie figuur 5.

De kleuren betekenen hetzelfde als in figuur 2. Nummer de mensen/punten van 1 tot en met 8 tegen de klok in. Als je goed kijkt, zul je zien dat de lijn van i naar j groen is als $j - i$ gelijk is aan 2, 3, 5 of 6 en rood als dat verschil gelijk is aan 1, 4 of 7. Er is geen rode driehoek. Stel $i < j < k$ is zo'n driehoek; dan zijn er drie mogelijkheden: $j - i = 1$ en $k - i = 4$ (kan niet, want dan moet $k - j = 3$) of $j - i = 1$ en $k - i = 7$ (kan ook niet, want dan zou $k - j = 6$) of $j - i = 4$ en $k - i = 7$ (kan ook niet, want ...). Evenzo kunnen we nagaan dat $i < j < k < l$ geen groep vormt met alleen groene lijnen. Er zijn vier mogelijkheden voor de verschillen $(j - i, k - i, l - i)$: $(2, 3, 5)$, $(2, 3, 6)$, $(2, 5, 6)$ en $(3, 5, 6)$. Ga zelf na dat altijd een van de lijnen jk, jl of kl rood zal zijn.

Vier wel of vier niet. Met behulp van de kennis die we hierboven hebben opgedaan, is het niet moeilijk meer een N te bepalen zó dat op elk feest met N aanwezigen er zeker vier mensen zullen zijn die elkaar allemaal niet of juist allemaal wel kennen.

Opgave 2. Bepaal een N die goed genoeg is voor de vier-vier situatie. Is dat ook de kleinst mogelijke N?

De methode van één persoon opzij zetten en de rest in twee groepen verdelen, is al sterk genoeg om het algemene probleem aan te pakken; dat gaan we nu doen.

Ramseygetallen

Het algemene probleem vraagt, gegeven twee getallen k en l, een getal N te bepalen zó dat op een bijeenkomst met N personen er zeker k mensen zijn die elkaar niet kennen of l mensen die elkaar juist wel kennen. Het kleinste aantal mensen dat genoeg is noteren we met $R(k, l)$; de $R(k, l)$ heten *Ramsey-getallen*, naar de logicus F. Ramsey die in 1929 liet zien dat de getallen $R(k, l)$ inderdaad bestaan.

Het verhaal over het feestje met zes mensen laat zien dat $R(3, 3) \leq 6$ en het speciale feestje met vijf mensen toont aan dat $R(3, 3) > 5$ en dus $R(3, 3) = 6$.

Om aan te tonen dat de getallen $R(k, l)$ echt bestaan, zullen we bovengrenzen voor ze afleiden. Voor we dat doen maken we twee eenvoudige opmerkingen.

Allereerst: door 'kennen' en 'niet kennen' te verwisselen volgt $R(k, l) = R(l, k)$. Ook is meteen duidelijk dat $R(k, 2) = k$: in een groep van k mensen kent iedereen elkaar of twee mensen kennen elkaar niet.

De redenering voor $R(3,3) \leq 6$ kunnen we gebruiken om het volgende aan te tonen:

$$R(k, l) \leq R(k, l-1) + R(k-1, l) \quad (*)$$

Dat gaat als volgt: stel je hebt $R(k, l-1) + R(k-1, l)$ mensen bij elkaar. Zet er één apart en verdeel de rest in twee groepen: w mensen die hij wel kent en n mensen die hij niet kent. Dan geldt dus

$$w + n = R(k, l-1) + R(k-1, l) - 1.$$

Wat niet kan gebeuren, is dat tegelijk $w < R(k, l-1)$ én $n < R(k-1, l)$, want dan hadden we $w + n \leq R(k, l-1) + R(k-1, l) - 2$. Er kunnen zich dus twee gevallen voordoen.

Geval 1: $w \geq R(k, l-1)$. Dan zijn er onder die w mensen k die elkaar niet kennen of er zijn er $l-1$ die elkaar wel kennen en samen met onze vriend vormen die een club van l mensen die elkaar kennen.
Geval 2: $n \geq R(k-1, l)$. Behandel dit zelf.

Onze eerste redenering toonde aan dat $R(3, 3) \leq R(3, 2) + R(2, 3) = 3 + 3 = 6$. Daarna gebruikten we dezelfde redenering weer om in feite aan te tonen dat $R(3, 4) \leq R(3, 3) + R(2, 4) \leq 6 + 4 = 10$. De wat fijnzinniger redenering gaf ons $R(3, 4) \leq 9$ en met een voorbeeld hebben we aangetoond dat $R(3, 4) > 8$ en dus $R(3, 4) = 9$.

Misschien had je ondertussen de opgave al gemaakt en geconcludeerd dat $R(4, 4) \leq R(4, 3) + R(3, 4) = 9 + 9 = 18$.

Opgave 3. Vind een bovengrens voor $R(5, 5)$. Hoeveel stappen kost het afschatten van $R(10, 10)$?

Opgave 4. Maak een regelmatige 17-hoek, nummer de punten 1 tot en met 17 en kleur de lijn van i naar j rood als $j - i$ gelijk is aan 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15 of 16 en anders groen, zie figuur 6. Toon aan dat er geen viertal punten is met alle verbindingslijnen van dezelfde kleur. Conclusie: $R(4, 4) = 18$.

Een algemene formule
Misschien heb je al de overeenkomst van $(*)$ met de volgende bekende eigenschap van binomiaalcoëfficiënten ontdekt.

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \quad (**)$$

Zoals we weten, geldt $R(k, 2) = k$ en dus $R(k, 2) = \binom{k}{k-1}$; dit schrijven we als $R(k, 2) = \binom{k+2-2}{k-1}$ om de 2 zichtbaar te maken. Met *volledige inductie* kun je dit uitbreiden tot de volgende stelling.

Stelling. Voor elke k en l geldt

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$$

Kleine verbeteringen
De afschatting in de stelling is niet scherp. Dat hebben we al gezien aan $R(3, 4)$ en $R(4, 4)$. De stelling zegt $R(3, 4) \leq \binom{5}{2} = 10$ en $R(4, 4) \leq \binom{6}{3} = 20$, maar we wisten al dat $R(3, 4) = 9$ en $R(4, 4) = 18$.

De wat fijnzinniger redenering die we voor $R(3, 4) \leq 9$ hebben gebruikt, laat zich gebruiken om het volgende aan te tonen: als $R(k, l-1)$ en $R(k-1, l)$ beide *even* zijn, dan geldt

$$R(k, l) \leq R(k, l-1) + R(k-1, l) - 1.$$

De exacte waarde van $R(k, l)$ is maar voor heel weinig paren (k, l) bekend. Er wordt nog steeds hard gezocht naar betere afschattingen (naar boven en naar onderen). Op http://mathworld.wolfram.com/RamseyNumber.html en www.combinatorics.org/Surveys/ds1.pdf wordt de stand van zaken bijgehouden. Daar kun je zien dat $R(5, 5)$ nog steeds niet bekend is; men weet alleen dat $43 \leq R(5, 5) \leq 49$.