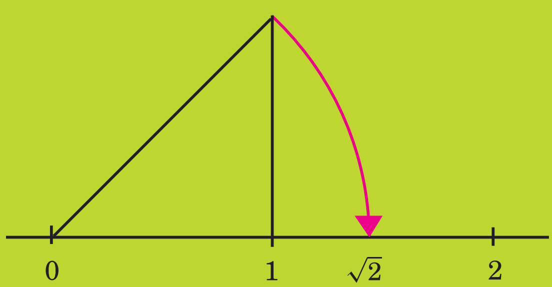
Wat is $\sqrt[3]{2}$ eigenlijk? Wat is daarover afgesproken? Hoe weet je eigenlijk dat dat getal bestaat? Op deze vragen geeft Klaas Pieter Hart antwoord in deel 1 van *Worteltrekken voor gevorderden.*

°°Worteltrekken voor gevorderden

door **Klaas Pieter Hart**

Als iemand je vraagt wat $\sqrt{2}$ is, wat zeg je dan? Niet 'de wortel uit 2', want dat is hetzelfde zeggen maar dan in woorden. Het juiste antwoord is: het is een afkorting voor 'dat positieve getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 2'. De volgende vraag kan zijn wat de waarde van $\sqrt{2}$ dan wel is. Dan moet je uitleggen dat $\sqrt{2}$ niet als een breuk te schrijven is (zie inzet op de volgende pagina) en dat $\sqrt{2}$ inderdaad niet meer is dan een afkorting. Dan komt een lastige vraag: hoe weet je dat dat getal bestaat? Gelukkig kun je met een beetje meetkunde de plaats van $\sqrt{2}$ op de getallenlijn aanwijzen, zie onderstaande figuur.



Je maakt een rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijden lengte 1 hebben; de hypothenusa heeft dan lengte $\sqrt{2}$.

Wat is $\sqrt[3]{2}$?

De vraag naar $\sqrt[3]{2}$ heeft nu een duidelijk antwoord: 'dat positieve getal waarvan de derde macht gelijk is aan 2'. Bestaat dat getal ook? Kunnen we het op de getallenlijn aanwijzen? Dat hangt natuurlijk af van wat je met 'aanwijzen' bedoelt, maar zo makkelijk als met $\sqrt{2}$ gaat het niet. Net als $\sqrt{2}$ is $\sqrt[3]{2}$ niet als een breuk te schrijven (zie wederom de inzet), er is zelfs geen constructie met passer en liniaal waarmee je een lijnstukje ter lengte $\sqrt[3]{2}$ kunt maken (zie *Pythagoras* jaargang 36, nummer 2, december 1996).

We kunnen natuurlijk proberen $\sqrt[3]{2}$ bij benadering aan te wijzen. Als je met je rekenmachientje aan de slag gaat, zie je al gauw dat $1{,}2^3 < 2 < 1{,}3^3$, dus $\sqrt[3]{2}$ ligt in het interval $\langle 1{,}2; 1{,}3\rangle$. Als je doorgaat, vind je $1{,}25^3 < 2 < 1{,}26^3$, ..., $1{,}255992104^3 < 2 < 1{,}255992105^3$, dus $\sqrt[3]{2}$ ligt in het interval $\langle 1{,}255992104; 1{,}255992105\rangle$. Zo voortgaand kunnen we steeds kleinere intervalletjes maken waar $\sqrt[3]{2}$ in zou moeten liggen. We vinden zo ook steeds meer decimalen van $\sqrt[3]{2}$, maar op geen enkel moment hebben we $\sqrt[3]{2}$ zelf echt te pakken en eigenlijk weten we nog steeds niet *zeker* of $\sqrt[3]{2}$ echt bestaat. Het zou immers kunnen zijn dat er tussen al die benaderingen nou net een gat in de getallenlijn zit en dat we al die jaren met iets hebben gerekend dat er niet is.

Gelukkig is dat niet zo. De getallenlijn heeft geen gaten en dat is een eigenschap waar in feite de hele analyse om draait. Dankzij die eigenschap kunnen we *bewijzen* dat $\sqrt[3]{2}$ bestaat. Het mooie van de eigenschap en het bewijs is dat op dezelfde manier kan worden aangetoond dat *alle* n-demachtswortels van 2 bestaan. Dat maakt die eigenschap zo belangrijk: je kunt er in één keer het bestaan van een heleboel getallen uit afleiden.

Een fundamentele eigenschap

De wiskundig precieze formulering van 'de getallenlijn heeft geen gaten' is 'de getallenlijn is volledig'.

Om te formuleren wat *volledigheid* is, hebben we het begrip *bovengrens* nodig.

Stel A is een verzameling getallen; een punt x is een bovengrens van A als $a \leq x$ geldt voor alle $a \in A$. Zo is 1000 een bovengrens van het interval $[0, 1\rangle$ en is 2 een bovengrens van de verzameling $\{x : x^3 < 2\}$. Nu is 1000 wel een erg grove bovengrens van $[0, 1\rangle$, het kan veel zuiniger: ook 10 is een bovengrens en 1 is ook een bovengrens. Kleiner dan 1 kan het natuurlijk niet: 1 is de kleinste bovengrens van $[0, 1\rangle$.

Als je nog meer voorbeelden van verzamelingen tekent, zul je zien dat je altijd een *kleinste* bovengrens kunt aanwijzen. Die eigenschap geldt voor *alle* verzamelingen (ook als die niet zo makkelijk te tekenen zijn).

$\sqrt{2}$ is geen breuk

Stel dat $\sqrt{2}$ *wel* is te schrijven als een breuk. Doe dat en schrijf $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$; vereenvoudig de breuk totdat m en n geen gemeenschappelijke factoren meer hebben. Kwadrateer de breuk en vermenigvuldig met n^2, er komt $m^2 = 2n^2$. Deel m en n door 3, met rest, dus $m = 3k + i$ en $n = 3l + j$ met $0 \leq i, j \leq 2$. Kwadrateer: $m^2 = 9k^2 + 6ki + i^2$; als je dit door 3 deelt, dan is de rest gelijk aan 0 (als $i = 0$) of 1 (want $1^1 = 1$ en $2^2 = 4 = 3 + 1$). Als je $2n^2$ door 3 deelt, is de rest 0 of 2. Omdat i en j niet tegelijk 0 zijn (want 3 is geen gemeenschappelijke factor van m en n), hebben we drie mogelijkheden voor de paren resten: $(0, 2)$, $(1, 0)$ en $(1, 2)$; elk van die drie gevallen laat zien dat $m^2 \neq 2n^2$.

$\sqrt[3]{2}$ is ook geen breuk

Het bewijs is net als bij $\sqrt{2}$, maar na wat proberen zul je zien dat je door 7 moet delen. De rest van m^3 bij deling door 7 is altijd 0, 1 en 6 en de rest van $2n^3$ is altijd 0, 2 en 5. De mogelijke paren resten van m^3 en $2n^3$ zijn dan $(0, 2)$, $(0, 5)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(1, 5)$, $(6, 0)$, $(6, 2)$ en $(6, 5)$; in alle gevallen vinden we weer dat $m^3 \neq 2n^3$.

Stelling: de getallenlijn is volledig. *Elke niet-lege verzameling getallen met een bovengrens heeft ook een kleinste bovengrens.*

Een bewijs van deze fundamentele eigenschap is niet zo eenvoudig; dat kun je eigenlijk alleen geven als je precies weet hoe de reële getallen gemaakt zijn. We bewaren het daarom tot een later stukje in *Pythagoras*.

We laten nu zien hoe je de volledigheid gebruikt om te bewijzen dat $\sqrt[3]{2}$ bestaat.

Het bestaan van $\sqrt[3]{2}$

Bekijk de verzameling $A = \{x : x \geq 0$ en $x^3 < 2\}$. Die verzameling is niet leeg, want $0 \in A$; de verzameling heeft een bovengrens, namelijk 2. Nu mogen we concluderen dat er een getal α bestaat dat de kleinste bovengrens van A is, dus $x \leq \alpha$ voor alle $x \in A$ (α is een bovengrens), *en* als $\beta < \alpha$, dan is er een $x \in A$ met $x > \beta$ (α is de kleinste). We gaan bewijzen dat $\alpha^3 = 2$ en dus dat we het *bestaan* van $\sqrt[3]{2}$ hebben aangetoond.

We hebben een formule nodig: voor elke x en y geldt $y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + yx + x^2)$ (schrijf de rechterkant maar uit). Met behulp van deze formule vinden we alles wat we nodig hebben.

Ten eerste: als $0 \leq x < y$, dan geldt $x^3 < y^3$. Dit volgt omdat $y^2 + yx + x^2$ groter dan 0 is. Hieruit volgt dat als inderdaad $\alpha^3 = 2$, er geen ander getal met die eigenschap is.

Ten tweede: als $0 < x < y < 2$, dan geldt $y^3 - x^3 < (y - x)(4 + 4 + 4) = 12(y - x)$.

In het bijzonder: als $x \in A$ dan

$$\alpha^3 < x^3 + 12(\alpha - x) < 2 + 12(\alpha - x).$$

Omdat we $\alpha - x$ net zo klein kunnen maken als we willen, volgt nu dat $\alpha^3 \leq 2$.
Aan de andere kant, als $y > \alpha$, dan geldt

$$\alpha^3 > y^3 - 12(y - \alpha) \geq 2 - 12(y - \alpha)$$

(omdat $y \notin A$, geldt $y^3 \geq 2$). Weer kunnen we $y - \alpha$ zo klein krijgen als we willen en dus volgt $\alpha^3 \geq 2$.
Conclusie: $\alpha^3 = 2$.

Opmerkingen

Op dezelfde manier kunnen we laten zien dat $\sqrt[n]{2}$ bestaat, voor elke n, als de kleinste bovengrens van de verzameling $A_n = \{x : x \geq 0$ en $x^n < 2\}$.

Er is natuurlijk niets speciaals aan 2; voor elk positief reëel getal a en elk natuurlijk getal n kan op deze manier het *bestaan* van $\sqrt[n]{a}$ aangetoond worden.
In het volgende nummer van *Pythagoras* verschijnt deel 2 van *Worteltrekken voor gevorderden*, waarin je kunt lezen hoe je op een efficiënte manier benaderingen van die n-demachtswortels kunt maken.