door **Klaas Pieter Hart**

In de vorige *Pythagoras* hebben we uitgelegd *waarom* n-demachtswortels bestaan. Nu gaan we bekijken hoe we op een efficiënte manier benaderingen van die n-demachtswortels kunnen maken.

°°Worteltrekken voor gevorderden

Een rij voor $\sqrt{2}$

In *Pythagoras* van juni 2004 staat een methode beschreven waarmee je, met pen en papier, stap voor stap steeds nieuwe decimalen van $\sqrt{2}$ kunt bepalen, net zo veel als je maar wilt. De methode is makkelijk te programmeren maar heeft een nadeel: elke rekenstap lever maar één decimaal. De hieronder beschreven methode is een stuk efficiënter en variaties er op zijn ook in rekenmachientjes geprogrammeerd.

Je maakt een rij benaderingen van $\sqrt{2}$ als volgt: begin met $x_0 = 2$ en maak uit x_i telkens een nieuwe benadering

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{2}{x_i}\right).$$

Dus $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12}$, enzovoort. De rij die je zo krijgt is dalend en elke term is groter dan $\sqrt{2}$, zie inzet 2. De benaderingen convergeren heel snel naar $\sqrt{2}$: als je $x_{i+1} - \sqrt{2}$ uitwerkt, krijg je $\frac{1}{2}(x_i - 2\sqrt{2} + \frac{2}{x_i})$ en omdat $2x_i \cdot \frac{\sqrt{2}}{x_i} = 2\sqrt{2}$ staat hier eigenlijk $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{\frac{2}{x_i}}\right)^2$. Haal $\sqrt{x_i}$ (uit de noemer) buiten de haakjes: er komt $\frac{1}{2x_i}(x_i - \sqrt{2})^2$ en dat kunnen we afschatten met $\frac{1}{2}(x_i - \sqrt{2})^2$. De ongelijkheid $x_{i+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(x_i - \sqrt{2})^2$ laat zien dat het aantal correcte decimalen bij elke iteratie verdubbelt. Immers $x_0 - \sqrt{2} < 0{,}6$ en daaruit volgt $x_1 - \sqrt{2} < \frac{1}{2}0{,}6^2 = 0{,}18$, vervolgens $x_2 - \sqrt{2} < \frac{1}{2}0{,}18^2 = 0{,}0162$, dan $x_3 - \sqrt{2} < 0{,}00013122$, enzovoort. Dit gaat dus veel sneller dan de pen-en-papier-methode.

In het algemeen, om $\sqrt{a}$ te benaderen, begin je met $x_0 = a$ en doe je op elke stap $x_{i+1} = \frac{1}{2}(x_i + \frac{a}{x_i})$.

Een rij voor $\sqrt[3]{2}$

Op dezelfde manier als boven maken we een rij benaderingen voor $\sqrt[3]{2}$. We beginnen weer met $x_0 = 2$ en maken telkens uit x_i een nieuwe benadering:

$$x_{i+1} = \frac{1}{3}\left(2x_i + \frac{2}{x_i^2}\right).$$

Weer geldt dat de rij dalend is en nu geldt dat $x_i^3 > 2$ voor alle i. Dit volgt uit de ongelijkheid in inzet 3 met $a = b = x_i$ en $c = \frac{2}{x_i^2}$: het product van de getallen is 2 en het gemiddelde x_{i+1} is kleiner dan de grootste van de drie en dat is x_i.

Net als bij $\sqrt{2}$ convergeert deze rij heel snel naar $\sqrt[3]{2}$. Het kost wat moeite, maar je kunt uitrekenen dat

$$x_{i+1} - \sqrt[3]{2} = \frac{2x_i + \sqrt[3]{2}}{3x_i^2}(x_i - \sqrt[3]{2})^2.$$

Omdat elke x_i tussen 1 en 2 ligt, geeft dit de afschatting $x_{i+1} - \sqrt[3]{2} < 2(x_i - \sqrt[3]{2})^2$. Dit betekent dat na verloop van tijd het aantal correcte decimalen telkens verdubbelt.

Een rij voor $\sqrt[n]{2}$

Voor andere n kun je dergelijke rijen maken. Zet weer $x_0 = 2$ en zet telkens

$$x_{i+1} = \frac{1}{n}\left((n-1)x_i + \frac{2}{x_i^{n-1}}\right).$$

Je krijgt zo een rij die naar $\sqrt[n]{2}$ convergeert.

1. Een ongelijkheid

Voor elk tweetal positieve getallen a en b geldt $ab \leq \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2$, met gelijkheid alleen als $a = b$.

Om dit te bewijzen kun je het verschil $\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 - ab$ uitschrijven: je krijgt dan $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$ en dat is gelijk aan $\left(\frac{1}{2}(a-b)\right)^2$. Daaruit volgt $\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 - ab \geq 0$ en gelijkheid geldt inderdaad alleen als $a = b$.

2. De benaderingen van $\sqrt{2}$

We kunnen de ongelijkheid uit inzet 1 gebruiken om successievelijk te laten zien dat $x_i > x_{i+1}$ en $x_i^2 > 2$ voor alle i. In het begin geldt $x_0^2 > 2$. Als we eenmaal weten dat $x_i^2 > 2$, dan volgt $x_i > \frac{2}{x_i}$ en met de ongelijkheid volgt daaruit dat $x_{i+1}^2 > x_i \cdot \frac{2}{x_i} = 2$ en $x_i > x_{i+1}$ (het gemiddelde van twee getallen is kleiner dan het grootste).

3. Nog een ongelijkheid

Voor drie positieve getallen a, b en c geldt $abc \leq R^3$, waarbij $R = \frac{1}{3}(a+b+c)$ het *rekenkundig gemiddelde* is. Hoe je dat bewijst laten we eerst aan een voorbeeld zien: neem de getallen 1, 3 en 8, dan geldt $R = 4$. Vervang 1 door 4 en 8 door 5; dan blijft R gelijk en $1 \cdot 3 \cdot 8 < 4 \cdot 3 \cdot 5$ en met de ongelijkheid in inzet 2 volgt dan $4 \cdot 3 \cdot 5 < 4^3$.

In het algemeen neem je aan dat $a \leq b \leq c$ en reduceer je het tot het geval van twee getallen. Maak een nieuw drietal $a' = R$, $b' = b$ en $c' = c - (R - a)$; dan geldt $a' + b' + c' = a + b + c$, dus het rekenkundig gemiddelde blijft gelijk. Het product $a'b'c'$ is groter geworden, reken maar na: $a' = a + (R - a)$ en dus $a'c' = \big(a + (R - a)\big) \times \big(c - (R - a)\big) = ac + (R - a)(c - R) \geq ac$ (schrijf zorgvuldig uit). Dus $abc \leq a'b'c'$. Ook geldt $b' + c' = 2R$ en dus volgt uit inzet 1 dat $b'c' \leq R^2$. Nu zijn we klaar: $abc \leq a'b'c' = Rb'c' \leq R^3$.