door **Klaas Pieter Hart**

Wat is $2^{\sqrt{3}}$? In dit artikel gaan we precies afspreken wat 2^x is, voor alle reële getallen x. Ook bekijken we hoe het bij andere grondtallen gaat.

ooo Machtsverheffen voor gevorderden

In de vorige twee nummers van *Pythagoras* hebben we gezien *waarom* n-demachtswortels bestaan en hoe je die efficiënt kunt benaderen. Nu gaan we ons bezig houden met machtsverheffen; daar zitten ook nog een paar haken en ogen aan. Voor elk getal x op de getallenlijn zullen we netjes definiëren wat 2^x betekent.

Om te beginnen voor natuurlijke getallen, daar is de betekenis duidelijk: voor een natuurlijk getal n is 2^n een handige afkorting voor

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ maal}}$$

Voor willekeurige gehele getallen moeten we oppassen: we kunnen niet zonder meer afspreken dat

$$2^0 = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{0 \text{ maal}}$$

en

$$2^{-10} = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{-10 \text{ maal}}$$

want die twee dingen betekenen natuurlijk niks.

De juiste afspraak voor 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, ..., 2^{-10}, ... komt voort uit de wens een mooie eigenschap van de notatie 2^n in stand te houden, namelijk $2^m \times 2^n = 2^{m+n}$. Voor $m = 0$ zou hier $2^0 \times 2^n = 2^n$ staan en dat betekent dat $2^0 = 1$ de enig juiste afspraak is. Omdat $1 - 1 = 0$ volgt nu dat 2^{-1} zó gekozen moet worden dat $2 \times 2^{-1} = 1$ en dus $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Evenzo volgt $2^{-2} = \frac{1}{4}$, ..., $2^{-10} = \frac{1}{1024}$, ...

Opgave 1. Ga na dat de eigenschap $2^m \times 2^n = 2^{m+n}$ inderdaad bewaard blijft voor negatieve en positieve m en n.

Gebroken exponenten

Wat te doen met 2^q als q een rationaal getal is, dat wil zeggen te schrijven als $\frac{t}{n}$ met gehele getallen t en n ($n \neq 0$)? Als $q = \frac{1}{2}$, dan dicteert de eigenschap via $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$ dat $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Evenzo moet $2^{\frac{1}{3}}$ wel $\sqrt[3]{2}$ zijn, $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$, enzovoort. Voor andere breuken $\frac{t}{n}$ vinden we tenslotte $2^{\frac{t}{n}} = (\sqrt[n]{2})^t$.

1. Breuken vind je overal

Neem twee getallen x en y met $x < y$. Het verschil $y - x$ is positief, er is dus een natuurlijk getal n met $\frac{1}{n} < y - x$. Dan geldt ook dat $1 < ny - nx$; er moet dus een *geheel* getal m tussen nx en ny zitten. Maar dan geldt ook $x < \frac{m}{n} < y$; we hebben een rationaal getal tussen x en y gevonden.

Opgave 2. Een rationaal getal kan op meer dan één manier als breuk geschreven worden, bijvoorbeeld $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$. De waarden $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{2}{4}}$ en $2^{\frac{3}{6}}$ zijn echter allemaal apart afgesproken. Toon aan dat toch geldt $2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{3}{6}}$.

Opgave 3. Toon aan: als $\frac{t}{n} = \frac{k}{l}$, dan $(\sqrt[n]{2})^t = (\sqrt[l]{2})^k$.

Opgave 4. Toon aan: als p en q twee rationale getallen zijn, dan geldt 2^p x $2^q = 2^{p+q}$.

Andere exponenten

We weten nu al wat 2^q is voor alle rationale getallen q; hoe zit het nu met $2^{\sqrt{3}}$? Omdat $\sqrt{3}$ niet als een breuk te schrijven is, moeten we voor die macht echt iets nieuws verzinnen.

We laten de algebra even liggen en proberen de volgende eigenschap van $q \mapsto 2^q$ in stand te houden: *als $p < q$, dan geldt $2^p < 2^q$*; we zeggen dat machtsverheffen *monotoon* is.

Die monotonie volgt uit de opteleigenschap: er geldt $q = p + (q - p)$ en dus $2^q = 2^p \cdot 2^{q-p}$. Omdat $2^{q-p} > 1$ volgt nu $2^q > 2^p$.

Opgave 5. Toon aan dat inderdaad $2^r > 1$ als r een positief rationaal getal is.

De bedoeling is nu te zorgen dat de functie $x \mapsto 2^x$ monotoon wordt. Voor $\sqrt{3}$ betekent dit dat we twee dingen moeten eisen: als $p < \sqrt{3}$, dan moet $2^p < 2^{\sqrt{3}}$ en als $\sqrt{3} < q$, dan moet $2^{\sqrt{3}} < 2^q$. De vraag is dus of er een getal is dat aan die eisen voldoet, of nog liever: één zo'n getal, want dan hoeven we niet meer te kiezen: we spreken af dat dat ene getal dan de waarde van $2^{\sqrt{3}}$ is.

Ten minste één

We gaan bewijzen dat er een getal x is met de eigenschap dat $2^p < x < 2^q$ voor alle rationale getallen met $p < \sqrt{3} < q$. Dat doen we met behulp van de fundamentele eigenschap van de verzameling van alle reële getallen die in het septembernummer van *Pythagoras* al gebruikt is om voor elke n het *bestaan* van $\sqrt[n]{2}$ aan te tonen.

De getallenlijn is volledig. *Elke niet-lege verzameling getallen met een bovengrens heeft ook een kleinste bovengrens.*

Dat wil zeggen: als A een deelverzameling van $\mathbf{R}$ is waarvoor een x bestaat zó dat $a \leq x$ voor alle $a \in A$ (x is een bovengrens), dan is er een bovengrens α voor A die kleiner is dan alle andere bovengrenzen.

Dit passen we toe op de verzameling $A = \{2^p : p < \sqrt{3}\}$ – deze heeft $2^2 = 4$ als bovengrens. In $\mathbf{R}$ bestaat dus een bovengrens α kleiner dan of gelijk aan alle bovengrenzen van A. Voor deze α geldt dus $2^p \leq \alpha$ als $p < \sqrt{3}$, want α is een bovengrens van A; ook geldt $\alpha \leq 2^q$ als $\sqrt{3} < q$, want in dat geval is 2^q een bovengrens van A (en α is de *kleinste* bovengrens). Om de $\leq$ te verbeteren tot $<$ (want dat willen we), gebruiken we een belangrijke eigenschap van $\mathbf{R}$: tussen elk tweetal reële getallen ligt een rationaal getal; dat bewijzen we in inzet 1.

We gebruiken die eigenschap als volgt: als $p < \sqrt{3}$, dan is er een rationaal getal r met $p < r < \sqrt{3}$. Voor die r geldt $2^p < 2^r$ en $2^r \leq \alpha$, en dus volgt $2^p < \alpha$. Op precies dezelfde manier volgt dat $\alpha < 2^q$ als $\sqrt{3} < q$.

Ten hoogste één

Nu moeten we nog laten zien dat alléén α aan de gestelde eisen voldoet. Dat doen we door te laten zien dat de verzameling van de geschikte getallen diameter nul heeft; dat betekent dat er maar één getal in past.

Neem twee rationale getallen p en q in het interval $\langle 1, 2\rangle$ met $p < \sqrt{3} < q$. Het verschil $2^q - 2^p$ is gelijk aan $2^p(2^{q-p} - 1)$. Op het interval $\langle 0, 1\rangle$ geldt voor elk rationaal getal r dat $2^r \leq 1 + r$, zie inzet 2. Dit kunnen we gebruiken om $2^q - 2^p$ af te schatten:

$$2^q - 2^p \leq 2^p(q-p) < 4(q-p).$$

De laatste ongelijkheid geldt omdat $p < 2$. Hiermee kunnen we aantonen dat de diameter van de verzameling der geschikte getallen inderdaad nul is.

Om, bijvoorbeeld, te laten zien dat de diameter kleiner dan 10^{-6} is, passen we de methode uit *Pythagoras* van juni 2004 toe om de eerste zeven cijfers van $\sqrt{3}$ achter de komma te vinden. We vinden dat $p < \sqrt{3} < q$, waarbij $p = 1{,}7320508$ en $q = 1{,}7320509$. Ook geldt $q - p = 10^{-7}$ en dus

$$2^q - 2^p < 4(q-p) < 4/10^7 < 10^{-6}.$$

Door dit voor steeds betere benaderingen van $\sqrt{3}$ te herhalen, vinden we dat de diameter kleiner is dan elke positieve grens die we maar stellen; de diameter is dus nul.

Eigenschappen van 2^x

Op precies dezelfde manier als voor $\sqrt{3}$ kunnen we 2^x afspreken voor elk reëel getal dat niet als een breuk te schrijven is: 2^x is het unieke getal y met de eigenschap dat $2^p < y < 2^q$ voor alle rationale getallen p en q met $p < x < q$.

De zo verkregen functie heeft alle eigenschappen die we van een exponentiële functie verwachten.

2. De ongelijkheid

De ongelijkheid $2^r < 1 + r$ voor rationale getallen r in het interval $\langle 0, 1\rangle$ volgt regelrecht uit een ongelijkheid die al eerder in *Pythagoras* aan bod is geweest: de *ongelijkheid van rekenkundig en meetkundig gemiddelde*: als $x_1, x_2, ..., x_n$ een n-tal positieve getallen is, dan geldt

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \tfrac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Neem nu natuurlijke getallen k en n met $1 \leq k < n$ en pas bovenstaande toe met $x_1 = \cdots = x_k = 2$ en $x_{k+1} = \cdots = x_n = 1$; er komt $\sqrt[n]{2^k} \leq \frac{1}{n}(n+k)$, ofwel $2^{\frac{k}{n}} \leq 1 + \frac{k}{n}$.

Opgave 6. Voor alle reële getallen x en y geldt $2^x \times 2^y = 2^{x+y}$.

We kunnen ook bewijzen dat $2^x < 2^y$ als $x < y$ (tot nu toe wisten we dat alleen als één van de twee getallen een rationaal getal is). Met behulp van de eigenschap uit inzet 1 vinden we een rationaal getal p met $x < p < y$. Dan volgt $2^x < 2^p < 2^y$.

Andere grondtallen

Voor elk getal $a > 1$ kunnen we op dezelfde manier als voor 2 de functie $x \mapsto a^x$ definiëren. Wel verloopt het bewijs dat er precies één geschikte waarde voor a^x is als x geen rationaal getal is wat anders.

Als je in inzet 2 overal 2 door a vervangt, krijg je $\sqrt[n]{a^k} \leq \frac{1}{n}(ka + n - k)$; na vereenvoudiging van de rechterkant kun je concluderen dat $a^{\frac{k}{n}} \leq 1 + \frac{k}{n}(a-1)$.

Bij het bepalen van $a^{\sqrt{3}}$ neem je weer $p < q$ in het interval $\langle 1, 2\rangle$. Dan volgt dat $a^q - a^p = a^p(a^{q-p} - 1) \leq a^p(a-1)(q-p) < (a^3 - a)(q-p)$. Hiermee kan worden aangetoond dat er maar één getal geschikt is om $a^{\sqrt{3}}$ te zijn.

Als $0 < a < 1$, gebruiken we $1/a$ om a^x te definiëren: we zetten $a^x = 1/(1/a)^x$.