door **Klaas Pieter Hart**

In het januarinummer van *Pythagoras* hebben we de functie $x \mapsto 2^x$ netjes gedefinieerd. In dit artikel kijken we naar de inverse functie: de logaritme.

Logaritmen voor gevorderden

De functie $x \mapsto 2^x$, zoals we die in het januarinummer hebben gedefinieerd, heeft alle eigenschappen die we van deze exponentiële functie mogen verwachten. De functie is strikt stijgend en voor alle x en y geldt $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$. In dit artikel laten we zien dat onze functie een inverse functie heeft, de logaritme in basis 2. Die functie noteren we als ${}^2\log$ en per definitie betekenen

$$a = {}^2\log b \quad \text{en} \quad 2^a = b$$

precies hetzelfde. Bij het bepalen van een inverse functie verwisselen we domein en bereik: het bereik/domein van $x \mapsto 2^x$ wordt het domein/bereik van $x \mapsto {}^2\log x$. Het domein van $x \mapsto 2^x$ kennen we, dat is $\mathbf{R}$. Het bereik kennen we nog niet; we weten dat de waarden in het interval $\langle 0, \infty\rangle$ zitten, maar wat we willen, namelijk dat $\langle 0, \infty\rangle$ het domein van de logaritme is, moeten we wel netjes vaststellen en dat doen we door te bewijzen dat het bereik van $x \mapsto 2^x$ precies het interval $\langle 0, \infty\rangle$ is.

Dus bij gegeven $b > 0$ moeten we een a maken met $2^a = b$ (en omdat $x \mapsto 2^x$ strikt stijgend is, is er precies één zo'n a). Dit bewijzen we met behulp van de nu al vertrouwde eigenschap van $\mathbf{R}$: de volledigheid.

De logaritme

Stel je hebt een willekeurig getal $b > 0$. Hoe vind je dan een getal a met $2^a = b$?

We nemen eerst aan dat $b > 1$ en maken een verzameling A door daar alle x met $2^x < b$ in te stoppen. De verzameling A is niet leeg, immers $2^0 = 1 < b$. De verzameling A is ook naar boven begrensd: neem maar een natuurlijk getal k met $k > b$. Voor natuurlijke getallen is $2^k > k$ niet moeilijk aan te tonen. Omdat $x \mapsto 2^x$ strikt stijgend is, volgt dat k een bovengrens voor A is, immers $x \geq k$ én $x \in A$ kunnen niet samengaan: als $x \geq k$, dan $2^x \geq 2^k > k > b$, dus $x \notin A$.

Zoals we al in herinnering brachten: $\mathbf{R}$ is volledig, dus heeft elke begrensde niet-lege verzameling een kleinste bovengrens. Onze verzameling A heeft dus een kleinste bovengrens, laten we die a noemen. We beweren dat $2^a = b$.

We kiezen natuurlijke getallen m en n met $m < a < n$, waarbij m zo groot mogelijk is en n zo klein mogelijk. In de inzet op de volgende pagina wordt aangetoond dat $|2^x - 2^a| < 2^n |x - a|$ als $m < x < n$.

Voor elk positief getal ε dat kleiner is dan $a - m$ geldt $2^a < 2^{a-\varepsilon} + 2^n\varepsilon < b + 2^n\varepsilon$, en dus $2^a \leq b$. Evenzo volgt $2^a > 2^{a+\varepsilon} - 2^n\varepsilon > b - 2^n\varepsilon$ als $\varepsilon < n - a$, en dus $2^a \geq b$. Conclusie: $2^a = b$. Als $b < 1$ vinden we eerst a met $2^a = \frac{1}{b}$, dan geldt $2^{-a} = b$.

Samengevat: voor elk positief getal b bestaat precies één getal a met $2^a = b$; dat getal heet de *logaritme in basis* 2 *van* b en we schrijven $a = {}^2\log b$.

Opgave 1. Toon aan dat $^2\log(x \times y) = {}^2\log x + {}^2\log y$ voor elke positieve x en y.
Opgave 2. Toon aan: als $a > 0$ en als p een breuk is, dan geldt $^2\log(a^p) = p \times {}^2\log a$.

Andere grondtallen

In het januarinummer is geschetst hoe je de functie $x \mapsto a^x$ voor alle a kunt definiëren. Dat kan ook met behulp van alleen 2^x en $^2\log x$. In de opgaven hebben we gezien dat $^2\log(a^p) = p \times {}^2\log a$ als p een breuk is. Dit betekent dat

$$a^p = 2^{p \times {}^2\log a}.$$

Omdat 2^x en de logaritme stijgende functies zijn, kunnen we inzien dat voor alle andere x die formule ook moet gelden, dus

$$a^x = 2^{x \times {}^2\log a}.$$

Dus, bijvoorbeeld, $\pi^\pi = 2^{\pi \times {}^2\log \pi}$.

Nu krijgen we ook voor elke a een logaritmische functie: $^a\log q = p$ betekent $a^p = q$. Die logaritmen zijn allemaal in elkaar uit te drukken. Dat gaat als volgt: uit de definite volgt: als $q = a^p$, dan ook $q = 2^{p \times {}^2\log a}$, en dus $^2\log q = p \times {}^2\log a$. Maar $p = {}^a\log q$, dus als we de factoren omwisselen krijgen we de fraaie betrekking

$$^2\log q = {}^2\log a \times {}^a\log q.$$

Gebruik van logaritmen

Logaritmen werden door de Schot John Napier (1550-1617) bedacht om er snel grote vermenigvuldigingen mee uit te kunnen voeren. Dat gebeurde op basis van de eigenschap $10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}$. Men werkte met het grondtal 10 omdat dat beter bij ons tientallig stelsel past; in plaats van $^{10}\log$ schrijven we daarom nog steeds log. Om, bijvoorbeeld, 313,585 x 204,123 te berekenen, ging men als volgt te werk.
Stap 1. Zoek log 313,585 en log 204,123 op in een tabel. Tabellen geven alleen logaritmen van getallen tussen 1 en 10; dat is niet erg want 313,585 = 3,13585 x 10^2 en dus log 313,585 = 2 + log 3,13585. Met behulp van mijn tabel heb ik gevonden dat log 313,585 = 2,4963 en log 204,123 = 2,3071 (ongeveer).

De ongelijkheid $|2^x - 2^a| < 2^n |x - a|$

In het januarinummer is aangetoond dat $|2^r - 1| < |r|$, als $|r| < 1$; met behulp hiervan bewijzen we de ongelijkheid hierboven.

We hebben ons getal a en gehele getallen m en n zó dat $m < a < n$ (met m zo groot mogelijk en n zo klein mogelijk). Als nu x tussen m en n ligt, dan geldt $|x - a| < 1$ en dus

$$2^x - 2^a = 2^a(2^{x-a} - 1) < 2^n(x - a)$$

als $a < x$ en

$$2^a - 2^x = 2^x(2^{a-x} - 1) < 2^n(a - x)$$

als $x < a$; samengevat:

$$|2^x - 2^a| \le 2^n|x - a|$$

als $m < a < n$.

Stap 2. Tel de logaritmen bij elkaar op: 2,4963 + 2,3071 = 4,8034; dit is de logaritme van ons product.
Stap 3. Zoek in de tabel de x op met log x = 0,8034 (ongeveer): x = 6,359 en dus 313,585 x 204,123 = 6,359 x 10^4 (ongeveer).

Tegenwoordig doen we zo'n vermenigvuldiging op een rekenmachientje, maar dan lopen we soms tegen de beperkingen van het apparaat aan. Mijn rekenmachine kan, bijvoorbeeld, 70! niet weergeven: bij 69! krijg ik nog 1,711224524 x 10^{98} maar bij 70! krijg ik `Error`. Met de logaritmetoets is dat zo verholpen: log 1,711224524 = 0,233307995 en log 70 = 1,84509804. De som is 2,078405035 en $10^{0,078405035}$ = 1,197857167. De 2 levert nog 10^2 en dus is 70! ongeveer gelijk aan 1,197857167 x 10^{100}.

Opgave 3. Bepaal, met behulp van de log- en 10^x-toetsen, een benadering van 100!; hoeveel cijfers heeft 100!?