door **Klaas Pieter Hart**

De volledigheid van $\mathbf{R}$, de verzameling reële getallen, is de sleutel tot een heleboel stellingen uit de analyse. Zo kun je hem gebruiken om te bewijzen dat veel vergelijkingen een oplossing hebben.

◆◆◆ De tussenwaarde-stelling

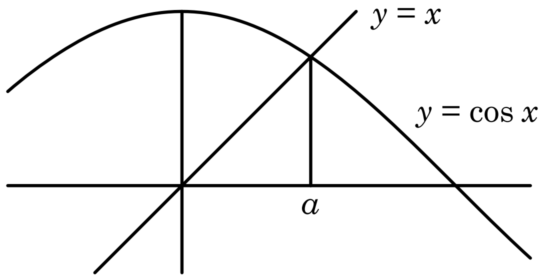
In vorige afleveringen hebben we de volledigheid van $\mathbf{R}$, ofwel de getallenlijn, al gebruikt om te bewijzen dat alle n-demachtswortels *bestaan* en dat 2^x bestaat voor *alle* x. Exact geformuleerd:

De getallenlijn is volledig.
Elke (niet-lege) verzameling getallen met een bovengrens heeft ook een kleinste bovengrens.

Dat wil zeggen: als A een deelverzameling van $\mathbf{R}$ is waarvoor een x bestaat zó dat $a \leq x$ voor alle $a \in A$ (x is een bovengrens), dan is er een bovengrens a^* voor A die kleiner is dan alle andere bovengrenzen.

Vergelijkingen oplossen

We gaan deze eigenschap van de getallenlijn benutten om te bewijzen dat de vergelijking $\cos x = x$ een oplossing heeft. Als je naar de grafieken van $y = \cos x$ en $y = x$ kijkt, 'zie' je dat er een oplossing is, maar zo'n plaatje is natuurlijk nog geen bewijs.



Bij $x = 0$ ligt x onder $\cos x$ (want $\cos 0 = 1 > 0$) en bij $x = 1$ ligt x boven $\cos x$ (want $\cos 1 < 1$). Je zou dus verwachten dat de grafieken elkaar tussen 0 en 1 snijden en dat er dus een getal a te vinden moet zijn met $\cos a = a$.

Om die verwachting in zekerheid om te zetten, kunnen we twee dingen doen. We kunnen proberen de vergelijking op één of andere manier op te lossen en uit te komen op een uitspraak van de vorm a = ... Als je dat probeert, zul je merken dat je eigenlijk geen houvast hebt en niet verder komt. Het andere wat we kunnen doen, is *bewijzen* dat zo'n a moet bestaan en een methode aangeven om goede benaderingen van die a te maken.

Een kandidaat a vinden

Bekijk de verzameling $A = \{x : x < \cos x\}$. Die verzameling is niet leeg, want $0 \in A$, en naar boven begrensd: 1 is een bovengrens, want als $x > 1$, dan geldt zeker $x > \cos x$ (omdat altijd $\cos x \leq 1$).

We hebben dus een kandidaat voor a: de kleinste bovengrens van A. Immers, vlak onder a zijn er x-en met $\cos x > x$ en vlak boven a geldt $\cos x < x$; daaruit zou toch moeten volgen dat $\cos a = a$.

Bewijzen dat $\cos a = a$

Om te bewijzen dat $\cos a = a$, hebben we een gonio-formule nodig:

$$\cos x - \cos a = -2\sin\left(\tfrac{1}{2}(x+a)\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}(x-a)\right)$$

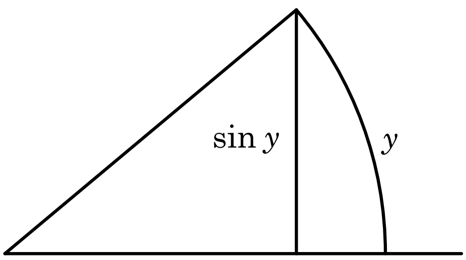
Hieruit kunnen we afleiden dat $\cos x$ dicht bij $\cos a$ ligt als x dicht bij a ligt. De absolute waarde van het verschil is namelijk

$$2\left|\sin\left(\tfrac{1}{2}(x+a)\right)\right| \cdot \left|\sin\left(\tfrac{1}{2}(x-a)\right)\right|$$

Omdat een sinus nooit groter dan 1 is kunnen we dit afschatten met

$$2\left|\sin\left(\tfrac{1}{2}(x-a)\right)\right|$$

Verder geldt altijd $|\sin y| \leq y$, zie het onderstaande plaatje.



We concluderen dat altijd

$$|\cos a - \cos x| \leq |x - a|.$$

Hiermee kunnen we laten zien dat $\cos a \geq a$ en dat $\cos a \leq a$, en dus dat $\cos a - a$. Neem een willekeurig natuurlijk getal n en kies $x \in A$ zó dat $x > a - 2^{-n}$. We gaan het verschil $\cos a = a$ anders opschrijven, namelijk als de som van drie verschillen: $\cos a - \cos x$, $\cos x - x$ en $x - a$. Omdat $|\cos a - \cos x| \leq |x - a|$, kunnen we afleiden dat de som van die drie verschillen groter is dan $-2 \cdot 2^{-n}$, want $\cos x - x$ is positief en de andere twee termen zijn, in absolute waarde, niet groter dan 2^{-n}. Dus, voor elke n geldt $\cos a - a > -2 \cdot 2^{-n}$. Maar dat betekent dat $\cos a - a$ ten minste zo groot is als de kleinste bovengrens van alle waarden $-2 \cdot 2^{-n}$ en dat is 0. Conclusie: $\cos a - a \geq 0$.

Opgave 1. Laat met eenzelfde redenering zien dat $\cos a \leq a$.

Een algoritme

We kunnen nu een algoritme opstellen om a te benaderen. Wat we doen is het interval $[0, 1]$ halveren, kijken of a in $[0, \frac{1}{2}]$ of $[\frac{1}{2}, 1]$ ligt, de helft waarin a ligt halveren, kijken in welke helft a ligt, die helft halveren, enzovoort, net zo lang tot we tevreden zijn met de nauwkeurigheid die we behaald hebben.

Een maat voor de nauwkeurigheid is de lengte van het interval dat we bij iedere stap vinden. Op stap 0 (als we beginnen) is die lengte $1 - 0 = 1$, op stap 1 is de lengte $\frac{1}{2}$, op stap 2 is hij $\frac{1}{4}$, ..., op stap i is de lengte gelijk aan $(\frac{1}{2})^i$.

Je kunt dit eenvoudig programmeren: kies een nauwkeurigheid ε en stel $a_0 = 0$ en $b_0 = 1$. Herhaal nu telkens het volgende recept:

- stel $m_i = \frac{1}{2}(a_{i-1} + b_{i-1})$ en bereken $\cos m_i$;
- als $\cos m_i = m_i$ `STOP` en `PRINT` "m_i is de oplossing"
- als $\cos m_i > m_i$: stel $a_i = m_i$ en $b_i = b_{i-1}$
- als $\cos m_i < m_i$: stel $a_i = a_{i-1}$ en $b_i = m_i$
- als $b_i - a_i < \varepsilon$: `STOP`

Het eerste 'als' is er natuurlijk om te zien of we niet per ongeluk de oplossing hebben gevonden. Het tweede 'als' kiest de rechterhelft en het derde kiest de linkerhelft. Het vierde 'als' is er om te kijken of we de gewenste nauwkeurigheid hebben bereikt.

Opgave 2. Hoeveel iteraties zijn er nodig als $\varepsilon = \frac{1}{1000}$? En als $\varepsilon = \frac{1}{1000000}$?

Het bovenbeschreven algoritme staat bekend als de *bisectie-methode* (omdat we telkens een interval in tweeën snijden natuurlijk).

De tussenwaardestelling

Kunnen we uit het bovenstaande verhaal een algemene stelling distilleren? Dat kan zeker en die stelling werd in 1817 geformuleerd en bewezen door de Tsjechische wiskundige Bernard Bolzano in een artikel met de volgende welluidende titel: *"Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege"*.

Hier volgt de stelling, in de formulering van Bolzano zelf.

Lehrsatz. Wenn sich zwey Functionen von x, $f(x)$ und $\varphi(x)$, entweder für *alle* Werthe von x, oder doch für alle, die zwischen α und β liegen, *nach dem Gesetze der Stetigkeit* ändern, wenn ferner $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, und $f(\beta) > \varphi(\beta)$ ist: so gibt es jedesmahl einen gewissen zwischen α und β liegenden Werth von x, für welchen $f(x) = \varphi(x)$ wird.

In het Nederlands vertaald: als twee functies f en φ continu zijn op een interval $[\alpha, \beta]$ en als bovendien geldt dat $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ en $f(\beta) > \varphi(\beta)$, dan heeft de vergelijking $f(x) = \varphi(x)$ ten minste één oplossing tussen α en β.

Hierin is nog één ding ongedefinieerd: wat betekent het dat een functie continu is? Daarvan gaf Bolzano, waarschijnlijk als eerste, een nette definitie.

Nach einer *richtigen Erklärung* versteht man unter der Redensart, *das eine Function $f(x)$ für alle Werthe von x die inner- oder ausserhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändre,* nur so viel, *dass, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x + \omega) - f(x)$ kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden könne, wenn man ω so klein als man nur immer will, annehemen kan.*

In (losse) vertaling: men zegt dat een functie $f(x)$ zich voor alle waarden van x volgens de wet der continuïteit gedraagt indien voor iedere x het verschil $f(x + \omega) - f(x)$ kleiner dan een gegeven grootheid kan worden gemaakt door ω maar klein genoeg te nemen.

In een wat exactere formulering, die afkomstig is van Weierstrass: bij iedere gegeven grootheid ε bestaat een andere grootheid δ zó dat telkens als $|y - x| < \delta$, dan is $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

In ons geval hadden we in feite $f(x) = x$ en $\varphi(x) = \cos x$, en de grenzen van het interval zijn $\alpha = 0$ en $\beta = 1$.

De functies f en φ zijn ook inderdaad continu: in beide gevallen kunnen we bij de gegeven grootheid ε gewoon $\delta = \varepsilon$ nemen. Immers, we hebben laten zien dat altijd $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$, dus als $|y - x| < \varepsilon$ *dan* ook $|\cos y - \cos x| < \varepsilon$.

Bewijzen dat een functie continu is, is niet altijd makkelijk, zoals we bij $\cos x$ al gezien hebben: we hadden een gonio-formule nodig en een afschatting van $|\sin y|$. Laten we eens proberen aan te tonen dat de functie g gedefinieerd door $g(x) = x^2$ continu is. Neem een x vast en een grootheid ε. Hoe vinden we nu een passende grootheid δ?

Welnu, eerst bekijken we maar eens wat we met $|y^2 - x^2|$ kunnen doen. We kunnen in ieder geval ontbinden:

$$|y^2 - x^2| = |y + x||y - x|.$$

Daar staat al $|x - y|$, maar met nog een variabele factor $|x + y|$ er bij. De δ die we zoeken mag best heel klein zijn, we beperken ons daarom eerste maar eens tot het interval

$[x-1, x+1]$. Als y uit dat interval komt, geldt dat $|x+y|$ nooit groter is dan het maximum van $2\,|x+1|$ en $2\,|x-1|$. Noem dat maximum maar even M, dan concluderen we dat voor y in het interval $[x-1, x+1]$ altijd geldt $|y^2 - x^2| \leq M\,|x-y|$. Nu weten we hoe δ te kiezen: het minimum van 1 en ε/M! Want dan geldt: *als* $|x-y| < \delta$, *dan* zeker $|y^2 - x^2| \leq M|x-y|$ (omdat $|y-x| < 1$) en $M\,|y-x| < \varepsilon$ (omdat $|y-x| < \varepsilon/M$). Conclusie: $g(x) = x^2$ gedraagt zich volgens de wet der continuïteit.

Neem nu ook nog $\psi(x) = 2$ (constante functie) en $\alpha = 0$ en $\beta = 2$; dan geldt $g(0) < \psi(0)$ en $g(2) > \psi(2)$. Er is dus een oplossing van de vergelijking $g(x) = \psi(x)$ tussen 0 en 2. Dus de stelling van Bolzano geeft ons het *bestaan* van $\sqrt{2}$.

Waarom 'Tussenwaardestelling'?

Tegenwoordig zul je de Tussenwaardestelling in een wat andere formulering in de boeken tegenkomen.

De tussenwaardestelling.
Als f een continue functie is op een interval $[\alpha, \beta]$, dan neemt f op dat interval elke waarde tussen $f(\alpha)$ en $f(\beta)$ aan.

Hierin maakt het niet uit of $f(\alpha) > f(\beta)$ dan wel $f(\alpha) < f(\beta)$; bij elk getal c tussen die twee waarden is er een a in het interval (α, β) met $f(a) = c$.

Deze versie volgt meteen uit die van Bolzano: vergelijk f maar met de constante functie die overal de waarde c aanneemt.

Het omgekeerde geldt ook: de versie van Bolzano volgt uit de nieuwe: werk met $g = f - \varphi$; dan geldt $g(\alpha) < 0$ en $g(\beta) > 0$, dus 0 ligt tussen $g(\alpha)$ en $g(\beta)$. Er is dus een a tussen α en β met $g(a) = 0$, voor die a geldt natuurlijk $f(a) = \varphi(a)$.

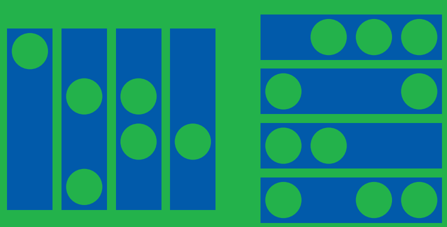
Teruglezen

Herlees het eerste artikel over worteltrekken (jaargang 45, nr. 1) en het artikel over machtsverheffen (jaargang 45, nr. 3). Daar wordt netjes bewezen dat $x \mapsto x^3$ en $x \mapsto 2^x$ continu zijn en ook wordt daar in feite de tussenwaardestelling voor die twee functies gebruikt om het bestaan van $\sqrt[3]{2}$ en van de logaritme te rechtvaardigen.

Opgave 3. Bewijs netjes dat voor elke $n = 1, 2, 3, \ldots$ de functie $x \mapsto x^n$ continu is.

In de vorige *Pythagoras* stonden de 16-gaten-puzzel en een landkaart die lastig met vier kleuren te kleuren is, zonder dat aangrenzende landen dezelfde kleur hebben. Hier zie je de oplossingen.

Oplossing 16-gaten-puzzel
Rangschik de houten latjes zoals hieronder. Leg de ene set latjes op de andere set, en alle gaten zijn bedekt.



Oplossing Kleurrijke kaarten
De grote landkaart in het artikel 'Kleurrijke kaarten' kan zo worden ingekleurd met vier kleuren, zonder dat aangrenzende landen dezelfde kleur hebben.