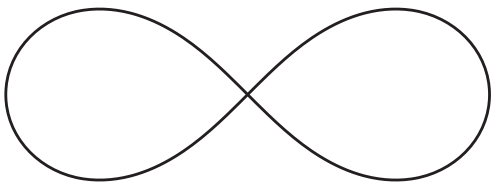
door **Klaas Pieter Hart**

Wat een kromme is lijkt duidelijk: cirkels, ellipsen, lemniscaten, dat zijn voorbeelden van krommen. Als je echter stellingen over 'alle krommen' wilt formuleren en bewijzen, zit je met een probleem: hoe spreek je wiskundig precies af wat op het eerste gezicht duidelijk lijkt?

Wat is een kromme?

In mijn boekenkast staat een Duits boek uit 1932 dat *Kurventheorie* heet, 'Krommentheorie' dus. Het is geschreven door Karl Menger (1902-1985), een van de grondleggers van deze theorie. Voor hij, op bladzijde 80, de definitie van 'kromme' geeft, heeft hij al een heel hoofdstuk gewijd aan allerlei eerdere pogingen de notie 'kromme' vast te leggen. Dat begint met eenvoudige voorbeelden. Een cirkel of een lemniscaat, zie figuur 1, is wel een kromme; een oppervlak, zoals een vierkant of een driehoek, en een lichaam, zoals een kubus, willen we zeker *niet* als kromme accepteren. De vraag is dan meteen al hoe we verschil kunnen maken tussen deze twee groepen.



Figuur 1 De lemniscaat

Een kromme is kleiner dan een vierkant?

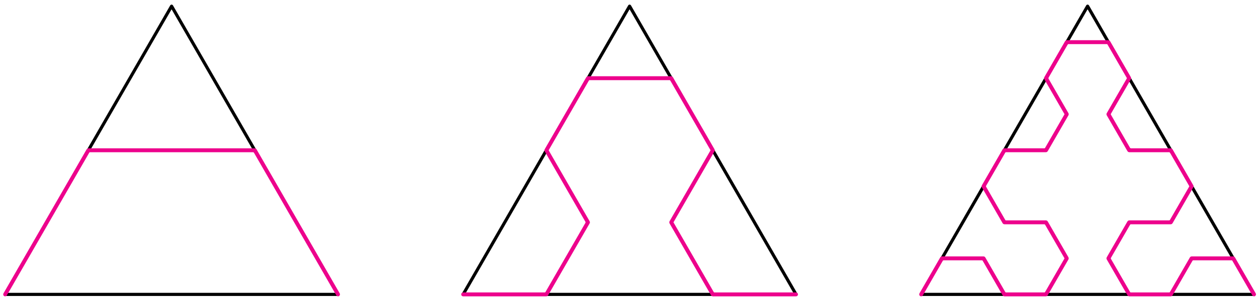
De eerste poging die Menger beschrijft komt neer op 'een kromme is kleiner dan een vierkant'. Hoewel intuïtief aantrekkelijk, want een kromme *is* veel dunner dan bijvoorbeeld een vierkant, wordt deze ogenblikkelijk naar de prullenmand verwezen. In de negentiende eeuw had Georg Cantor (1845-1918) namelijk al laten zien dat het gesloten interval $I = [0, 1]$ net zo groot is als het (volle) vierkant $V = [0, 1] \times [0, 1]$ in die zin dat beide verzamelingen even veel punten hebben. Wat daarmee bedoeld wordt, is dat er een functie $f : I \to V$ bestaat die *injectief* is, dat wil zeggen: uit $x \neq y$ volgt $f(x) \neq f(y)$, en *surjectief*, dat wil zeggen: voor elk punt $(u, v) \in V$ is er een $x \in I$ met $f(x) = (u, v)$. Je kunt de getallen in I en de punten in V zó aan elkaar koppelen dat bij elk getal precies één punt hoort en omgekeerd bij elk punt precies één getal. Dat is nog best lastig om te doen, maar kennelijk niet onmogelijk.

Je kunt een kromme doorlopen

De functie die Cantor gebruikte om het bovenstaande te bewijzen is niet erg mooi, hij is bijvoorbeeld niet continu. De volgende poging om 'kromme' te definiëren nam daarom de continuïteit in de definitie mee. Een kromme is 'iets waar je langs kunt lopen'; in wiskundige termen: je kunt een kromme *parametriseren*. Denk maar aan een cirkel, bijvoorbeeld de cirkel om $(0, 0)$ met straal 1: die kun je beschrijven met de functie $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ (neem $[0, 2\pi]$ als domein). De lemniscaat kan zo ook beschreven worden:

$$t \mapsto \left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t}\right).$$

Met andere woorden: we noemen een verzameling K een kromme als er een continue functie $f : [a, b] \to K$ is die surjectief is.



Figuur 2 De constructie van de driehoek van Sierpinski

Het probleem is echter dat de Italiaanse wiskundige Giuseppe Peano (1858-1932) in 1890 nou net zo'n parametrisering van het vierkant V had gemaakt. Hoe dat in zijn werk gaat, staat in het aprilnummer van *Pythagoras* uit 2005.

Continua

Nadat hij deze definities terzijde had geschoven, ging Menger wat anders te werk. Hij begon een lijst te maken van eigenschappen die een 'kromme' toch wel zou moeten hebben. De eerste paar eigenschappen waren heel basaal.

Een kromme K moet een *gesloten* verzameling zijn, dat wil zeggen: als (x, y) *niet* op K ligt, dan heeft (x, y) een positieve afstand tot K. Bijvoorbeeld, een cirkel is gesloten: als (x, y) niet op de cirkel C om $(0, 0)$ met straal 1 ligt, dan geldt $x^2 + y^2 > 1$ of $x^2 + y^2 < 1$, de afstand van dat punt tot C is dan $|\sqrt{x^2 + y^2} - 1|$ en dat is positief. Aan de andere kant: als je $(1, 0)$ uit C weglaat, is het resultaat C' niet gesloten: de afstand van $(1, 0)$ tot C' is nul.

Een kromme K moet *samenhangend* zijn, dat wil zeggen: *niet* te schrijven als $K = F \cup G$ met F en G allebei gesloten en $F \cap G = \emptyset$. Dat is voor een verzameling als een cirkel of een lemniscaat uit een plaatje duidelijk, maar om het netjes aan te tonen, is een stuk lastiger.

Verder wilde Menger ook nog dat krommen *begrensd* zouden zijn, daarmee bedoelde hij begrensd in de driedimensionale ruimte. Een kromme is dus in ieder geval een samenhangende, gesloten en begrensde verzameling; zo'n verzameling wordt een *continuüm* genoemd.

We zijn er nog niet: ook een kubus en een vierkant zijn continua; de vraag is nu welke continua we krommen zullen gaan noemen.

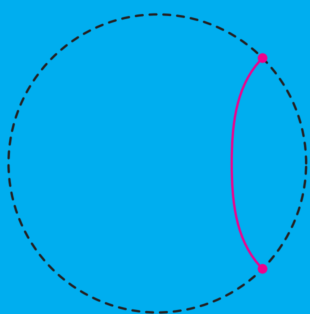
Is een hyperbool een kromme?

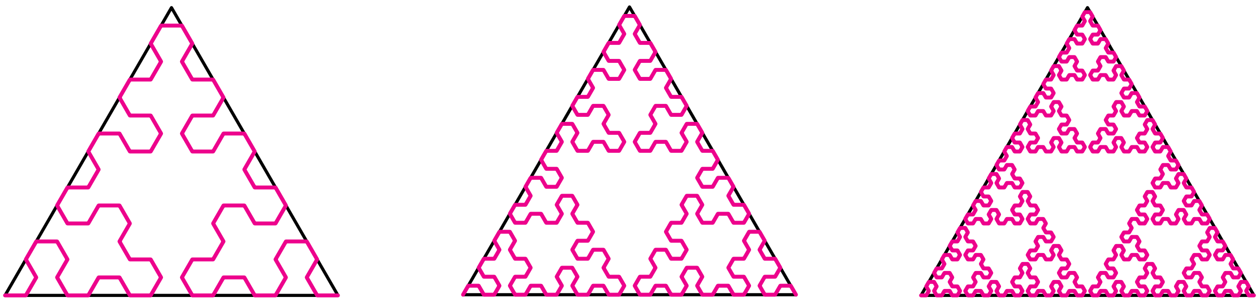
Een hyperbool bestaat uit twee *losse* stukken (de takken) en is daarom niet *samenhangend*. Dat betekent dat een hyperbool als kromme afvalt. Dat is niet erg; je kunt in dat geval de losse stukken gewoon apart bestuderen.

Maar een hyperbooltak voldoet niet aan Mengers voorwaarde dat een kromme *begrensd* moet zijn. Daarmee valt een hyperbooltak alsnog af om in aanmerking te komen voor de benaming 'kromme'. Dat was een doelbewuste keuze van Menger, omdat met gesloten en begrensde verzamelingen beter te werken is dan met alleen maar gesloten verzamelingen. Met een kunstgreep kun je nog wel wat doen: de afbeelding

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

krimpt het hele platte vlak in tot de cirkelschijf $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Zo'n hyperbooltak is wél begrensd. Het enige probleem is dat deze tak niet *gesloten* is. Dat probleem kunnen we eenvoudig oplossen: we nemen de twee randpunten erbij. Op die manier is de tak een kromme geworden, en blijkt het eigenlijk een gebogen lijnstukje te zijn.





De echte definitie

Hoe kwam Menger dan tot de uiteindelijke definitie van kromme? Hij ging op zoek naar iets dat eenvoudig was en toch sterk genoeg om de bekende krommen te vangen en de bekende niet-krommen uit te sluiten. Het idee was om naar randen van omgevingen te kijken. Als je naar een punt op een cirkel of de lemniscaat kijkt, en je neemt omgevingen die klein genoeg zijn (bijvoorbeeld kleine cirkelschijfjes of, in de ruimte, kleine bolletjes), dan hebben hun randen met de kromme maar een eindig aantal punten gemeen. Aan de andere kant, als je naar een oppervlak of een kubus kijkt, dan heeft de rand veel meer met je figuur gemeen en kun je er zelfs grote samenhangende stukken in terugvinden.

Na heel wat denkwerk kwam Menger tot de volgende definitie: een kromme is een continuüm waarin elk punt willekeurig kleine omgevingen heeft waarvan de rand *geen enkel continuüm met meer dan één punt bevat*.

Hoewel er veel dingen onder de definitie vallen die we, in het dagelijks leven, niet als kromme zouden herkennen, is het voor de ontwikkeling van een goede theorie uiteindelijk de beste gebleken.

Een ongewone kromme

Zoals reeds opgemerkt, vallen 'gewone' krommen onder Mengers definitie omdat je om elk punt altijd kleine omgevinkjes met eindige rand kunt maken en die randen vallen in losse punten uiteen.

Een bekend voorbeeld van een kromme in de zin van Menger die er niet zo gewoon uitziet, is de *driehoek van Sierpinski.* Die driehoek zie je tegenwoordig vaak als voorbeeld van een *fractal*, maar Waclaw Sierpinski (1882-1969) dacht zelf helemaal niet in die termen; hij wilde laten zien dat je onder de naam 'kromme' wel heel bijzondere verzamelingen kon laten vallen.

De constructie van zijn kromme lijkt erg veel op die van een *vlakvullende kromme*. We plannen een wandeling door een gelijkzijdige driehoek, van het punt linksonder naar het punt rechtsonder. Net als bij de vlakvullende kromme beginnen we eenvoudig, zie het eerste plaatje in figuur 2.

Daarna passen we de wandeling telkens aan door de basiswandeling geschaald langs elke rechte lijn te leggen, zoals je in de vervolgplaatjes van figuur 2 kunt zien. Door dit oneindig vaak te herhalen, krijgen we een wandeling die de hele driehoekskromme van Sierpinski doorloopt.

Het is ook een kromme in de zin van Menger: de drie hoekpunten hebben willekeurig kleine omgevingen waarvan de rand uit twee punten bestaat – we zeggen dat zo'n punt orde twee heeft; de punten waar de kleinere driehoeken samenkomen hebben orde vier en alle andere punten hebben orde drie.

Sierpinski nam daarna twee kopieën van zijn kromme en plakte die bij de drie hoekpunten aan elkaar. De ruimtelijke figuur die je zo krijgt is een kromme waarin élk punt orde drie of vier heeft (de aan elkaar geplakte hoekpunten hebben nu orde vier). Dat is toch wel iets anders dan bij een 'gewone' kromme: daar heeft bijna elk punt 'gewoon' orde twee.