Er bestaan al talloze bewijzen van de stelling van Pythagoras, dus wat zou nóg een nieuw bewijs daar aan toe kunnen voegen? In het archief van de eminente Nederlandse wiskundige E.W. Dijkstra (1930-2002) is een elegant bewijs te vinden dat toch weer een ander aspect van de stelling belicht.

■ door Klaas Pieter Hart

OVER DE STELLING VAN PYTHAGORAS

Dijkstra was computerwetenschapper van het eerste uur, die carrière maakte in de Verenigde Staten. Tot op het laatst schreef hij liever brieven met een vulpen aan zijn vele vrienden en collega's dan e-mail te versturen. Een van zijn gedenkwaardige uitspraken: "Computerwetenschap gaat net zo min over computers als astronomie over telescopen gaat." In dit artikel lees je Dijkstra's (bewerkte en uit het Engels vertaalde) bewijs.

De gebruikelijke formulering van de stelling van Pythagoras is als volgt, zie ook figuur 1.

Stelling van Pythagoras. *In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de hypotenusa gelijk aan de som van de kwadraten van de rechthoekszijden.*

Laten we wat met deze formulering spelen. In een driehoek met zijden a, b en c – ongelijk aan 0 om de hoeken welgedefinieerd te maken – noemen we de overstaande hoeken zoals altijd α, β en γ.

We kunnen de formulering van de stelling van Pythagoras als volgt formaliseren:

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\pi \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

We kunnen π elimineren door gebruik te maken van $\alpha + \beta + \gamma = \pi$:

$$\alpha + \beta = \gamma \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

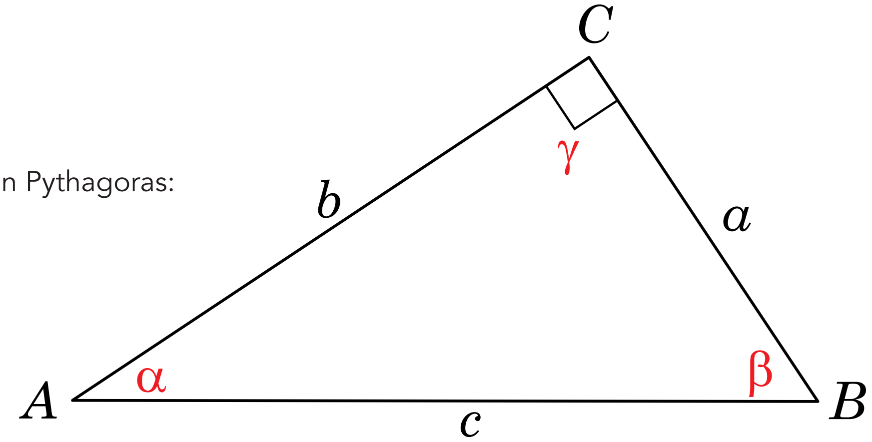
Mooi symmetrisch toch? Het suggereert meteen een versterking, namelijk de equivalentie

$$\alpha + \beta = \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \qquad (0)$$

(dit zullen we straks bewijzen). We krijgen een equivalente formulering door negaties te nemen:

$$\alpha + \beta \neq \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq c^2.$$

Maar $x \neq y$ is equivalent met '$x < y$ of $x > y$', en die twee kunnen niet tegelijk waar zijn. Omdat grotere hoeken tegenover langere zijden liggen, is het niet



Figuur 1
De stelling van Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

onredelijk te vermoeden dat de volgende twee equivalenties ook gelden:

$$\alpha + \beta < \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 < c^2 \tag{1}$$

en

$$\alpha + \beta > \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 > c^2. \tag{2}$$

De equivalenties (0), (1) en (2) zijn niet onafhankelijk: uit elk tweetal volgt automatisch de derde. Met behulp van de *signum-functie* kunnen we ze in één regel samenvatten. De signum-functie is als volgt gedefinieerd:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

We krijgen dan de volgende formulering van (0), (1) en (2) tegelijk:

$$\operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \operatorname{sgn}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Bekijk figuur 2. We hebben het geval $\alpha + \beta < \gamma$ getekend, waarin de driehoeken $\triangle CKB$ en $\triangle AHC$ elkaar niet overlappen en ook de driehoek $\triangle ABC$ niet overdekken. We schrijven XYZ voor de oppervlakte van $\triangle XYZ$ en we krijgen, in dit geval

$$CKB + AHC < ABC.$$

Als $\alpha + \beta = \gamma$, dan zijn H en K gelijk en dus

$$CKB + AHC = ABC.$$

Als $\alpha + \beta > \gamma$, dan overlappen de twee driehoeken elkaar en krijgen we

$$CKB + AHC > ABC.$$

Samengevat:

$$\operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \operatorname{sgn}(CKB + AHC - ABC).$$

De drie oppervlakten aan de rechterkant komen van gelijkvormige driehoeken. Ze hebben dus dezelfde verhoudingen als de kwadraten van de overeenkomstige zijden, in het bijzonder

$$\frac{CKB}{a^2} = \frac{AHC}{b^2} = \frac{ABC}{c^2} > 0$$

en dus

$$\operatorname{sgn}(CKB + AHC - ABC) = \operatorname{sgn}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Maar daarmeee hebben we ook

$$\operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \operatorname{sgn}(a^2 + b^2 - c^2)$$

bewezen.

DIJKSTRA-ARCHIEF ONLINE Het gehele Dijkstra-archief is op het internet te vinden: www.cs.utexas.edu/users/EWD.
Het hier vertaalde artikel heeft het volgende adres: www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD09xx/EWD975.html. ■

Figuur 2
$\triangle ABC$ met $\alpha + \beta < \gamma$