Liggen er meer punten op een lijn dan op een vlak? Lang gold dit als een onzinnige vraag, totdat Cantor ontdekte dat er meer dan één soort oneindigheid is – ontelbaar veel zelfs. In het begin waren er wiskundigen die hem voor gek verklaarden, wat hij later in zijn leven inderdaad werd. Maar tegenwoordig geldt de verzamelingenleer die hij ontwikkelde als het fundament van de wiskunde, 'een paradijs waar niemand ons uit kan verdrijven'.

■ door Klaas Pieter Hart

GEORG CANTOR (1845-1918):

BEDWINGER VAN HET ONEINDIGE

Georg Cantor werd in 1845 in Sint-Petersburg geboren. Zijn vader was een welvarend koopman en zijn moeder kwam uit een artistieke familie; Cantor zelf was later een verdienstelijk violist. In 1856 verhuisde de familie, om gezondheidsredenen, naar Frankfurt am Main. Cantor was op school een goede leerling die al snel wist dat hij later wiskunde wilde studeren, maar zijn vader vond een ingenieursopleiding beter voor zijn zoon.

Pas nadat Georg drie jaar in Darmstadt de ingenieursopleiding had gevolgd, kreeg hij alsnog toestemming van zijn vader om wiskunde te gaan studeren. In 1862 ging hij daarvoor naar Zürich en in 1863 naar Berlijn, waar hij college kreeg van de beste wiskundigen van die tijd: Kummer, Weierstraß en Kronecker. Aan het latere werk van Cantor is te zien dat de invloed van Weierstraß het grootst is geweest.

Het proefschrift waarop Cantor in 1867 promoveerde, ging over kwadratische vergelijkingen. Een van de bijgevoegde stellingen luidde: *In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi*, hetgeen betekent: In de wiskunde is de kunst van het stellen van vragen waardevoller dan die van het oplossen ervan. Je zou kunnen zeggen dat Cantor die stelling met zijn werk steeds beter onderbouwd heeft: de vragen die hij zich stelde, leveren wiskundigen nog steeds stof tot nadenken.

EENDUIDIGHEID

In 1869 werd Cantor in Halle aangesteld; de wiskundige Eduard Heine die daar hoogleraar was, daagde Cantor uit de eenduidigheidsstelling voor trigonometrische reeksen te bewijzen.

Wat zegt die stelling? We bekijken eerst een eenvoudiger geval. Neem vijf getallen a_1, a_2, b_0, b_1 en b_2 en bekijk de functie

$$f(x) = b_0 + (a_1 \sin x + b_1 \cos x) + \\ + (a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x).$$

Stel dat je weet dat $f(x) = 0$ voor alle x in het interval $[-\pi, \pi]$; wat betekent dat voor die vijf getallen?

Het antwoord klinkt nogal flauw: die moeten alle vijf nul zijn. Dat kun je nagaan door een paar geschikte waarden voor x in te vullen en de vergelijkingen die zo ontstaan op te lossen. Vul achtereenvolgens $x = -\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, 0 en $\frac{1}{2}\pi$ in, dan krijg je het stelsel

$$\begin{array}{l} b_0 \quad\;\; - b_1 + b_2 = 0 \\ b_0 - a_1 \quad\;\; - b_2 = 0 \\ b_0 \quad\;\; + b_1 + b_2 = 0 \\ b_0 + a_1 \quad\;\; - b_2 = 0 \end{array}$$

Na wat elimineren vind je dat $b_0 = b_1 = b_2 = a_1 = 0$; vul dan nog $x = \frac{1}{4}\pi$ in en je ziet dat ook $a_2 = 0$.

Het kan ook handiger en dat is wat in die tijd ook al bekend was: integreer $f(x)\cos x$ van $-\pi$ tot π. Met wat volharding zul je zien dat er weinig overblijft:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x \,\mathrm{d}x = b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x.$$

Omdat f de nulfunctie is, volgt meteen dat $b_1 = 0$. Door ook met de andere functies te vermenigvuldigen, zie je ook dat de andere getallen nul moeten zijn.

Het wordt pas echt interessant als je $f(x)$ opbouwt uit nog meer termen van de vorm $\cos kx$ en $\sin kx$, sterker nog, als je toelaat dat k elk natuurlijk getal mag zijn ($k \in \mathbf{N}$). Bij de oneindige sommen die je dan krijgt, moet je heel goed oppassen. Hoe dan ook, Cantor slaagde erin te bewijzen dat de stelling ook voor die oneindige sommen opgaat: als de som voor alle x nul is, moeten alle getallen a_k en b_k gelijk aan nul zijn.

In ons voorbeeld hadden we bij de invulmethode de maar vijf (goedgekozen) punten nodig waar de functie nul was en de integratiemethode lukt als in een aantal punten $f(x) \neq 0$ geldt. Cantor begon zich af te vragen hoe dat zat bij de oneindige sommen: voor hoeveel punten mag je de eis $f(x) = 0$ laten vallen terwijl je toch kunt bewijzen dat de getallen b_k en a_k gelijk aan 0 zijn? Die vraag leidde hem tot wat zijn levenswerk zou worden, de verzamelingenleer.

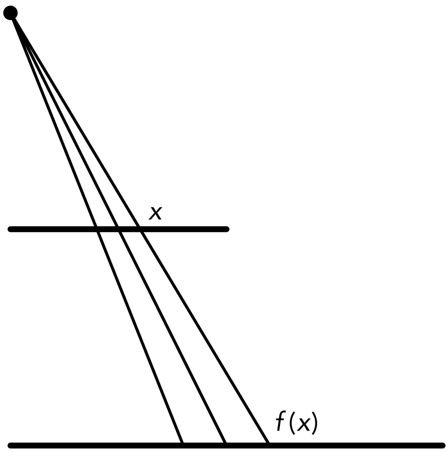
PUNTEN OP EEN LIJNSTUK Het gebeurt niet vaak dat één persoon een heel vakgebied van de grond tilt, maar aan het eind van de negentiende eeuw deed Cantor precies dat met de verzamelingenleer. De vraag die hij zich hierboven stelde, riep een andere vraag op; één die al vaker gesteld was, maar waar Cantor op een geheel nieuwe manier naar keek. In 1872 had hij kennis gemaakt met Richard Dedekind en in hun briefwisseling kunnen we zien hoe hij met die vraag omging.

Die vraag is: hoeveel punten liggen er op een lijnstuk? Het antwoord 'oneindig veel' bevredigde Cantor niet. In een brief aan Dedekind vroeg hij zich af of er niet meer soorten 'oneindig' bestaan. Heel concreet: zijn er even veel natuurlijke als reële getallen? Cantor formuleerde duidelijk wat hij met 'even veel' bedoelde: bestaat er een functie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ zó dat voor elk reëel getal x precies één natuurlijk getal n bestaat met $f(n) = x$? In dat geval bestaat er een *bijectie* (*bijectieve afbeelding*) van **N** naar **R**.

Dit is precies de manier waarop je twee verzamelingen kunt vergelijken: om te zien of er in twee emmers even veel appels als peren zitten, neem je telkens uit beide emmers een appel en een peer, tot een emmer leeg is; dan weet je of er meer appels dan peren waren (of minder of even veel), en dat zonder echt te tellen.

Cantor bedacht dat je dat vergelijken ook kunt doen zonder daadwerkelijk stap voor stap beide verzamelingen leeg te maken. Zo heeft een lijnstuk van lengte 1 even veel punten als een lijnstuk van lengte 2. Figuur 1 laat zien hoe je, in één keer, voor elk punt op het korte lijnstuk een beeldpunt op het lange lijnstuk kunt vinden zó dat elk punt op het lange lijnstuk bij precies één punt op het korte hoort.

Op dezelfde manier kun je inzien dat het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ en de hele verzameling $\mathbf{R}$ even veel punten hebben: neem de functie $f: x \mapsto \tan x$ maar.



Figuur 1

Cantor bleef aan dit soort vragen werken; zo bewees hij een paar jaar later een, ook voor hemzelf, onverwachte stelling: er zijn even veel punten in het interval [0, 1] als in het vierkant [0, 1] × [0, 1]. Hij was zo verbaasd dat hij aan Dedekind schreef: 'Je le vois, mais je ne le crois pas.' ('Ik zie het, maar ik geloof het zelf niet.')

Wat misschien niet zo duidelijk is, is dat er even veel natuurlijke getallen (de verzameling **N**) als rationale getallen (de verzameling breuken, aangeduid met **Q**) bestaan. Op het eerste gezicht zou je misschien denken dat er meer breuken zijn, want tussen elk tweetal breuken liggen oneindig veel andere breuken. Cantor liet echter zien dat er wél even veel natuurlijke getallen als breuken bestaan, zie het kader op deze pagina.

DIAGONAALARGUMENT Hoe zit het nu met **N** en **R**? Cantor bewees dat de situatie daar anders ligt. Je kunt *nooit* alle reële getallen tussen 0 en 1 achter elkaar opschrijven zonder er één over te slaan (wat met de breuken nog wel lukt); met andere woorden: er bestaat geen bijectie tussen **N** en het interval [0, 1]. Hoe bewijs je zoiets? Neem een willekeurige functie $f: \mathbf{N} \to [0, 1]$; we laten zien dat er een getal uit [0, 1] is dat ongelijk is aan alle $f(n)$. Figuur 2 geeft een beeld van hoe de lijst $f(1)$,

EVEN VEEL BREUKEN ALS NATUURLIJKE GETALLEN

Cantor liet zien dat je alle *paren* (m, n), met m en n natuurlijke getallen, in een lijst kunt zetten, zonder dat er een paar wordt overgeslagen. Daarmee is meteen duidelijk dat je de verzameling van *positieve breuken* in een lijst kunt zetten, want een breuk kun je zien als een paar gehele getallen: een teller en een noemer. Rangschik alle breuken zoals in het onderstaande plaatje.

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	. . .
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	. . .
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	. . .
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	. . .
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	. . .
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	. . .
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

De pijltjes geven aan hoe je heen-en-weer slingerend door alle positieve breuken wandelt, waarbij je telkens van 'zuidwest' naar 'noordoost' loopt. Zo krijg je de volgende opsomming van alle breuken:
$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$

Hiermee hebben we nog geen bijectie tussen **N** en de verzameling positieve breuken, want sommige breuken komen vaker voor; zo zijn 1/1, 2/2, 3/3, ... allemaal gelijk aan 1. Sla de dubbelgangers gewoon over en je krijgt wél een bijectie: bij elk natuurlijk getal (1, 2, 3, 4, 5, ...) hoort precies één positief rationaal getal ($1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \ldots$), en omgekeerd.

Kun je zelf bedenken hoe je visueel duidelijk kunt maken dat er even veel rationale getallen (positief én negatief) als natuurlijke getallen zijn?

Cantor was niet zo visueel ingesteld; zijn bewijs dat **N** en **Q** even veel elementen hebben, schreef hij als volgt op. Schrijf elk rationaal getal q als een vereenvoudigde breuk $\frac{m}{n}$ en maak hieruit het getal $N_q = |m| + |n|$. Elk getal N hoort bij eindig veel rationale getallen. Het getal $N = 0$ hoort bij geen q; het getal $N = 1$ hoort alleen bij $0 = \frac{0}{1}$; het getal $N = 2$ hoort bij $-1 = \frac{-1}{1}$ en $1 = \frac{1}{1}$; het getal $N = 3$ hoort bij $-2 = \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}$ en $2 = \frac{2}{1}$, enzovoort. We kunnen een functie $f: \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ construeren door de rationale getallen eerst te sorteren door middel van N_q en dan door hun volgorde binnen **R**. Dus

$$0, -1, 1, -2, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 2, \ldots$$

DE CANTORVERZAMELING

Een van de bekendste deelverzamelingen van het interval [0,1] is de *Cantorverzameling*. Haal uit het interval [0, 1] het open interval $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$, het middelste derde deel dus, weg. Haal vervolgens het middelste derde deel weg van de twee overgebleven stukken links en rechts. Herhaal deze procedure voor alle stukken die dan nog over zijn, en doe dit oneindig vaak. Wat je overhoudt, heet de Cantorverzameling. Maar wat is het precies?

Je denkt misschien eerst dat er niets overblijft, maar je ziet heel makkelijk in dat bijvoorbeeld de punten $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ in de verzameling zitten, en ook het punt $\frac{1}{4}$. Sterker nog: de Cantorverzameling bevat even veel punten als het oorspronkelijke lijnstuk ('even veel' in de zin die Cantor bedoelde)! Anderzijds haal je met iedere stap eenderde van de overgebleven lengte weg, dus uiteindelijk hou je een verzameling met lengte 0 over.

Cantor beschreef zijn verzameling niet op een meetkundige manier zoals hierboven. Hij deed het als volgt.

Als ein Beispiel einer perfekten Punktmenge, die in keinem noch so kleinen Intervall überall dicht ist, führe ich den Inbegriff aller reellen Zahlen an, die in der Formel

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \cdots$$

enthalten sind, wo die Koeffizienten c_ν nach Belieben die beiden Werte 0 und 2 anzunehmen haben und die Reihe sowohl aus einer endlichen, wie aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern bestehen kann.

De Cantorverzameling is dus de verzameling van alle getallen die in het *drietallig* stelsel met alleen nullen en tweeën te beschrijven zijn.

De Cantorverzameling, en variaties er op, komt in de hele wiskunde voor: in de analyse, in de theorie (en praktijk) van dynamische systemen, ... heel vaak kom je een kopie van Cantors verzameling tegen als een belangrijke bouwsteen.

$f(2)$, $f(3)$, ... eruit zou kunnen zien. Het plaatje is slechts een voorbeeld; de volgorde van de getallen zou anders kunnen zijn, maar dat doet er niet toe. Cantor kwam op het verbluffend eenvoudige idee om naar de oneindige reeks cijfers op de *diagonaal* te kijken (de rode cijfers). Maak een nieuw getal door de diagonaal langs te lopen en elk cijfer te veranderen; zo krijg je bijvoorbeeld het getal dat onderaan figuur 2 vet staat gedrukt (daar is elk cijfer met 1 vermeerderd; een 9 wordt een 0). Dit getal is verschillend van *elk* getal in de lijst! Immers, de waarde van de k-de decimaal van het 'nieuwe' getal verschilt van de k-de decimaal van het k-de getal in de lijst. Hiermee is bewezen dat er géén bijectie tussen **N** en [0, 1] bestaat. En dan bestaat er natuurlijk ook geen bijectie tussen **N** en **R**, want [0, 1] is een deelverzameling van **R**.

Dit bewijs wordt tegenwoordig het *diagonaalargument van Cantor* genoemd. In deze vorm heeft Cantor het zelf echter nooit opgeschreven. Cantor deed het algemener; hierover kun je lezen in de volgende paragraaf.

0,	0	0	0	0	0	0	0	0	0	. . .
0,	0	2	1	0	2	3	9	8	6	. . .
0,	6	9	7	2	2	9	8	0	1	. . .
0,	2	1	4	4	9	6	3	1	0	. . .
0,	1	5	7	3	4	0	5	6	4	. . .
0,	4	2	3	7	8	9	5	1	2	. . .
0,	0	1	2	4	3	4	2	9	0	. . .
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
0,	**1**	**3**	**8**	**5**	**5**	**0**	**3**	**. . . . .**		

Figuur 2

HOEVEEL ONEINDIGHEDEN? Cantor had dus twee verschillende oneindigheden ontdekt: die van **N**, die hij *aftelbaar* noemde, en die van **R**. Toen Cantor zijn theorieën hierover publiceerde, stuitte hij aanvankelijk op nogal wat scepsis bij sommige collega's. Het idee dat je over het oneindige überhaupt iets zinnnigs kon zeggen, was zo vreemd dat velen Cantor eerst niet serieus namen.

Toch hield Cantor vol; hij geloofde zelf heilig in de door hem ontwikkelde theorie. De vraag 'of er qua grootte nog iets tussen **N** en **R** in zit', zou Cantor voor de rest van zijn leven bezighouden. Zelf dacht hij van niet en hij probeerde heel hard de volgende uitspraak te bewijzen: als X een willekeurige oneindige verzameling reële getallen is, dan bestaat er een bijectieve afbeelding $f : \mathbf{N} \to X$ óf een bijectieve afbeelding $f : \mathbf{R} \to X$. Deze uitspraak heet nu de *Continuümhypothese*. In 1940 toonde Gödel aan dat het tegendeel niet te bewijzen is en in 1963 deed Cohen hetzelfde voor de *Continuümhypothese* zelf. Dit betekent dat met de uitgangspunten (de axioma's) van de gangbare wiskunde, de Continuümhypothese niet waar of onwaar is, maar onbeslisbaar.

In 1890 bewees Cantor dat er geen grootste oneindigheid is. Het bewijs heeft hetzelfde stramien als het hierboven beschreven diagonaalargument, wat in feite een speciaal geval is van Cantors veel algemenere stelling dat er geen grootste oneindigheid bestaat. Cantors bewijs hiervan gaat als volgt.

Neem eens een willekeurige verzameling X en bekijk de familie $\mathcal{P}(X)$ van alle deelverzamelingen van X. Die familie is ten minste zo groot als X, want $x \mapsto \{x\}$ laat zien dat $\mathcal{P}(X)$ een kopie van X bevat. Maar is er ook een bijectieve afbeelding $f : X \to \mathcal{P}(X)$? Het antwoord is: nee. Neem een willekeurige afbeelding f; we maken een A in $\mathcal{P}(X)$ met $A \neq f(x)$ voor alle x. Die A is eenvoudig op te schrijven: $A = \{x : x \notin f(x)\}$. Neem nu een willekeurige $x \in X$; als $x \in A$, dan $x \notin f(x)$ dus $f(x) \neq A$, en als $x \notin A$, dan $x \in f(x)$ dus weer $f(x) \neq A$.

Dit idee is zo krachtig dat het op veel gebieden toepasbaar is. Het ligt ten grondslag aan de onvolledigheidsstellingen van Gödel, aan de oplossing van het stop-probleem (er is geen computerprogramma dat van andere programma's kan controleren of ze zullen stoppen) en nog veel meer.

Het keerde zich bijna nog tegen Cantors eigen verzamelingenleer. Cantor had een ruime opvatting van verzameling; in het kort vond hij dat elke collectie dingen die we in gedachten bijeen kunnen brengen een verzameling is. In 1905 liet Bertrand Russell zien, na bestudering van Cantors algemene diagonaalargument, dat die opvatting te ruim was. Neem maar eens V, de *verzameling van alle verzamelingen*, en vorm daaruit de verzameling $R = \{X : X \notin X\}$, de verzameling van alle verzamelingen die niet zichzelf bevatten. Dan geldt voor R zelf dat $R \in R$ dan en slechts dan als $R \notin R$. Deze redenering staat nu bekend als de paradox van Russell. Je kunt hem ook als raadseltje formuleren: 'De barbier scheert iedereen die niet zichzelf scheert. Wie scheert de barbier?'

Dit was een onwelkome conclusie, want de verzamelingenleer was ondertussen een belangrijk stuk gereedschap voor wiskundigen geworden. De oplossing was om iets voorzichtiger met het begrip 'verzameling' om te gaan. Ernst Zermelo stelde in 1908 axioma's voor de verzamelingenleer op waarmee de paradox van Russell vermeden kon worden, maar die 'rijk' genoeg waren om de resultaten van Cantor en zijn navolgers overeind te houden. De verzamelingenleer zit overal in de wiskunde; als een nieuwe structuur gedefinieerd wordt, dan luiden de eerste woorden meestal: 'een verzameling met ...'

David Hilbert onderstreepte het belang van Cantors werk met de volgende uitspraak: *Aus den Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.* ('Uit het paradijs dat Cantor voor ons geschapen heeft, zal niemand ons kunnen verdrijven.') In zijn colleges illustreerde Hilbert de verschillende ordes van oneindigheid aan zijn studenten aan de hand van een fictief hotel, waarover twee jaar geleden een artikel in *Pythagoras* stond: 'Hilbert Hotel volgeboekt', jaargang 46 nr. 4 (februari 2007).

GEKTE In de tweede helft van zijn leven leed Cantor aan een depressie, waardoor zijn productiviteit verminderde en hij regelmatig moest worden opgenomen. Hij raakte soms het spoor volledig bijster. Zo gaf hij een verificatie van het Vermoeden van Goldbach ('elk even getal groter dan 2 is de som van twee priemgetallen') voor alle gehele getallen onder de 1000, terwijl enkele decennia eerder reeds een verificatie voor de getallen tot 10.000 was gepubliceerd. Hij begon zich bezig te houden met literatuur en probeerde te bewijzen dat Francis Bacon de werkelijke auteur was van de werken van Shakespeare. Hij publiceerde over religie en ontwikkelde zijn concept van het 'absoluut oneindige' dat hij gelijkstelde aan God. Aan het eind van de Eerste Wereldoorlog stierf hij in een psychiatrische instelling in Halle, Duitsland. We zullen nooit weten of zijn werk aan 'het oneindige' heeft bijgedragen aan zijn psychiatrische ziekte, maar een verband met zijn geniale obsessies valt niet uit te sluiten.

VERDER LEZEN Het Zebraboekje *Blik op oneindig* van Leon van den Broek en Arnoud van Rooij biedt een mooie inleiding in het wiskundige werken met 'oneindig'. ■