In het vorige nummer introduceerden we de *Standvastige Kwadraten*: getallen waarvan het kwadraat op dezelfde cijfers eindigt als het getal zelf, zoals 6, 25 of 9376. We formuleerden toen ook een stelling over Standvastige Kwadraten, die we nu bewijzen.

■ door Klaas Pieter Hart

DE STELLING VAN STANDVASTIGE KWADRATEN

Als je het kwadraat van 90625 berekent, valt op dat de uitkomst ervan op dezelfde cijfers eindigt als dat getal zelf: $\mathbf{90625}^2 = 8212\mathbf{890625}$. Een getal met deze eigenschap noemen we een *Standvastig Kwadraat*. We staan toe dat een getal ook met 0 mag beginnen. Dus 09376 is ook een standvastig kwadraat: $\mathbf{09376}^2 = 879\mathbf{09376}$.

Stelling. De som van de standvastige kwadraten van n cijfers is $10^n + 1$.

Een speciaal geval is $n = 1$: we hadden hier de getallen $0^2 = 0$ en $1^2 = 1$ uitgesloten, omdat het flauw is als een kwadraat hetzelfde is als het getal zelf. Dan blijven $5^2 = 25$ en $6^2 = 36$ over, en inderdaad is $5 + 6 = 11 = 10^1 + 1$. In het vorige nummer zagen we voor $n = 2$ dat alleen 25 en 76 standvastige kwadraten waren, en jawel, $25 + 76 = 101 = 10^2 + 1$. Maar een paar voorbeelden zijn natuurlijk nog geen bewijs.

We gaan met *volledige inductie naar k* bewijzen dat er precies twee standvastige kwadraten van k cijfers zijn: één die op een 5 eindigt en één die op een 6 eindigt. Het bewijsprincipe van volledige inductie is al eerder aan bod gekomen in *Pythagoras* en ook op internet kun je er veel over vinden. Eerst voeren we een notatie in: een getal van meerdere cijfers noteren we zonodig als $[x, y, z]$, waarbij z het laatste cijfer is, y het één na laatste cijfer, enzovoort. x en y kunnen ook groepjes van meer dan één cijfer voorstellen, dat blijkt dan uit de context. Nu gaan we aan de slag met de volledige inductie. Voor $k = 1$ is de bewering duidelijk: er zijn twee standvastige kwadraten van 1 cijfer, namelijk 5 en 6. Neem nu aan dat er precies twee standvastige kwadraten $[A, 5]$ en $[B, 6]$ van k cijfers zijn. We laten zien dat we beide met één cijfer kunnen uitbreiden. We bekijken eerst $[A, 5]$ $(= A \cdot 10 + 5)$. Zet daar een cijfer r voor en werk het kwadraat uit: $[r, A, 5]^2 = (r \cdot 10^k + [A, 5])^2 = r^2 \cdot 10^{2k} + 2 \cdot [A, 5] \cdot r \cdot 10^k + [A, 5]^2$.

De eerste term na het laatste =-teken eindigt op $2k$ nullen en de tweede term eindigt op $k + 1$ nullen (omdat $[A, 5]$ eindigt op een 5 en er ook een factor 2 in staat). Dit betekent dat cijfer $k + 1$ van het nieuwe kwadraat gelijk is aan cijfer $k + 1$ van $[A, 5]^2$ (onafhankelijk van r). Als we voor r dat cijfer nemen (en alleen dan) krijgen we dus een standvastig kwadraat van $k + 1$ cijfers.

Als we aan $[B, 6]$ een cijfer s toevoegen en het kwadraat uitwerken, krijgen we iets als hierboven, namelijk $s^2 \cdot 10^{2k} + 2 \cdot [B, 6] \cdot s \cdot 10^k + [B, 6]^2$. Het $k + 1$-ste cijfer van dit kwadraat vinden we door de $k + 1$-ste cijfers van $[B, 6]^2$ (noem dat even b) en $2 \cdot [B, 6] \cdot s \cdot 10^k$ bij elkaar op te tellen. Het tweede cijfer is het laatste cijfer van $2 \times 6 \times s = 12 \times s$ en dat is hetzelfde als het laatste cijfer van $2s$. Voor een standvastig kwadraat moet het laatste cijfer van $b + 2s$ dus gelijk zijn aan s. Door van allebei s af te trekken, volgt dat $b + s$ als laatste cijfer een nul moet hebben en daarmee volgt $b + s = 10$, en dus $s = 10 - b$.

We zien dat er in beide gevallen precies één goede keuze is: bij $[A, 5]$ het $k + 1$-ste cijfer van $[A, 5]^2$ en bij $[B, 6]$ moeten we dat $k + 1$-ste cijfer van 10 aftrekken.

Andersom: als een getal een standvastig kwadraat oplevert, dan levert elk eindstuk dat ook. Immers: $[A, B]^2 = A^2 10^{2k} + 2AB10^k + B^2$, dus de laatste k cijfers van $[A, B]^2$ vallen samen met die van B^2 en in het geval van een standvastig kwadraat zijn dat de cijfers van B.

De twee hierboven gevonden standvastige kwadraten van $k + 1$ cijfers zijn dus de enige twee. ■