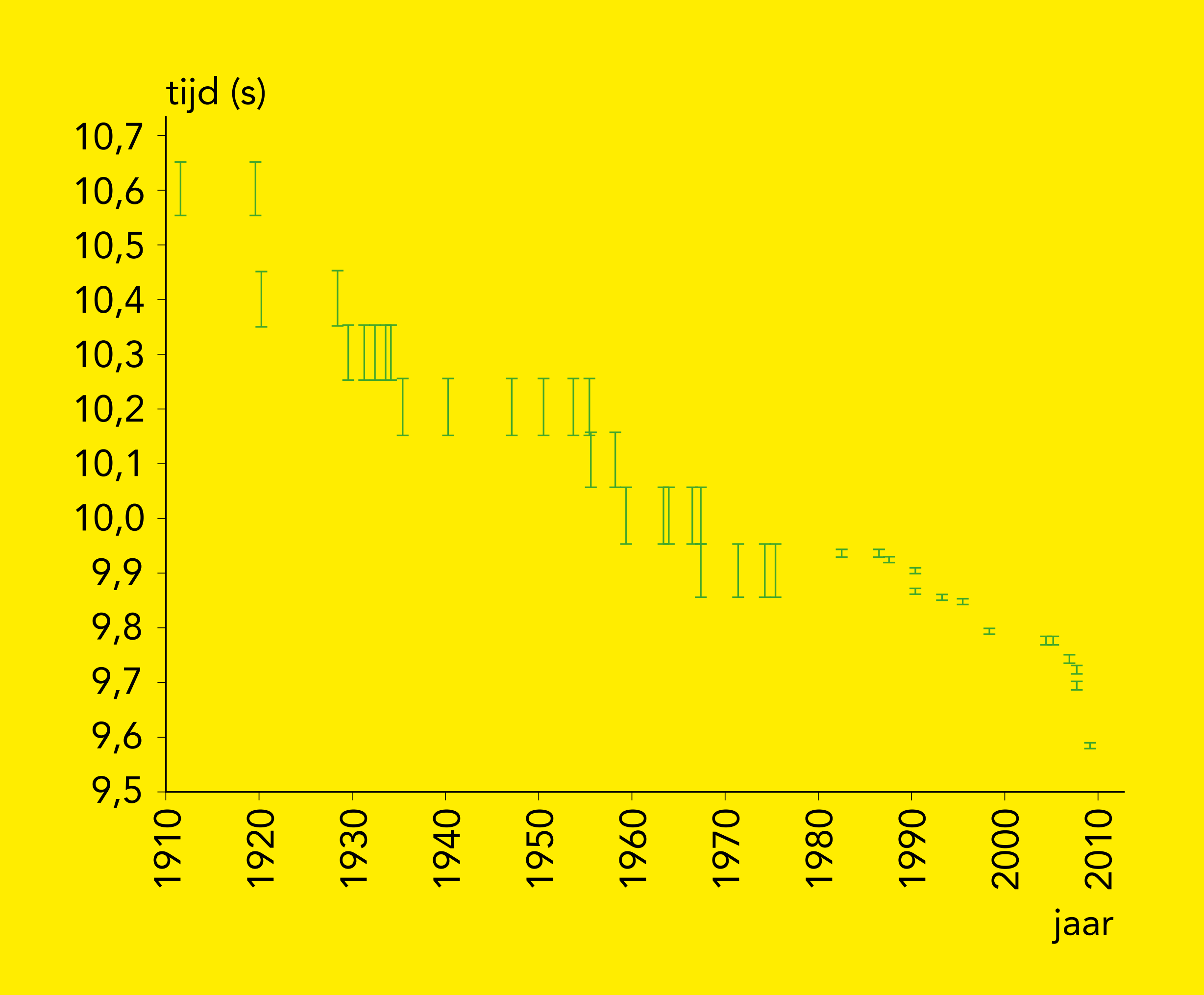
In het februarinummer schreven we over de relatie tussen wiskunde en records in de topsport. In dit artikel gaat het opnieuw over records, bekeken vanuit een andere invalshoek. Alles draait nu om het wereldrecord op de 100 meter: dit staat met een tijd van 9,58 seconden op naam van Usain Bolt. John D. Barrow van Cambridge University heeft becijferd dat Bolt zijn eigen record kan verbeteren zónder harder te lopen.

■ door Klaas Pieter Hart

HOE USAIN BOLT MET 0,11 SECONDEN WINT VAN USAIN BOLT

Usain Bolt bracht op 16 augustus 2009 het nieuwe wereldrecord op de 100 meter sprint op 9,58 seconden. Hij leverde deze prestatie tijdens de wereldkampioenschappen in Berlijn. Foto © Erki Pictures



Figuur 1 Verbeteringen van de records op de 100 meter sprint voor mannen. Elektronische tijdsmeting (in honderdsten van seconden nauwkeurig) werd verplicht in 1977.

Hardlooptijden worden tegenwoordig in honderdsten van seconden weergegeven (en veel nauwkeuriger gemeten). Maar in de jaren 2008 en 2009 haalde de Jamaicaanse sprinter Usain Bolt het wereldrecord met ongeveer 0,2 s naar beneden: van 9,74 s naar 9,58 s. Probeer, om te zien hoeveel dat is, maar eens uit te rekenen hoever Bolt voor de vorige recordhouder (Asafa Powell) uit gelopen moet hebben.

De Engelse wiskundige John D. Barrow publiceerde in april van dit jaar een artikel getiteld 'How Usain Bolt can run faster – effortlessly'. Figuur 1 komt uit dat artikel; in deze grafiek is te zien hoe onregelmatig de recordverbeteringen eigenlijk verlopen zijn. De verbeteringen van Bolt zien er dan heel dramatisch uit.

En toch kan Bolt het record nog onder de 9,5 s krijgen, zónder harder te lopen. Hoe dat kan, heeft Barrow ons voorgerekend.

SNELLER STARTEN Om te beginnen: de tijd die geregistreerd wordt, is niet de zuivere looptijd, maar de som van de starttijd en die looptijd. Die starttijd mag niet minder zijn dan 0,1 s; anders heb je vóór het startschot gereageerd en wordt het signaal 'valse start' gegeven. Die 0,1 s is experimenteel vastgesteld: een mens kan niet sneller reageren.

Uit allerlei tabellen blijkt dat Usain Bolt een langzame starter is. Toen hij zijn laatste wereldrecord haalde, was zijn starttijd 0,146 s, de op twee na langste. Zijn zuivere looptijd, 9,434 s, was meer dan één-tiende seconde sneller dan nummer twee. Het is onwaarschijnlijk dat Bolt in 0,1 s zal reageren, maar als hij er 0,12 s van kan maken, wordt zijn record 9,55 s, zonder sneller te lopen.

RUGWIND Om een record geldig te doen zijn, mag de snelheid van de rugwind niet meer dan 2 m/s bedragen. Nu is het effect van de wind niet zo eenvoudig als dat van de starttijd. De kracht die een renner van de lucht ondervindt, is gelijk aan

$$D = -\rho \cdot c \cdot A \cdot (V - W)^2.$$

Hierin is V de snelheid van de renner, W de snelheid van de wind ($W > 0$ betekent 'wind mee'), A de oppervlakte van de renner (gezien van voren), c een constante (afhankelijk van kleding enzovoort) en ρ de dichtheid van de lucht. We plaatsen een minteken voor ρ, omdat de lucht tegen zal werken: W is bij een geldige race kleiner dan V, V is immers ongeveer 10 m/s en W mag niet meer zijn dan 2 m/s.

We noteren de tijd bij windsnelheid W als $T(W)$. In zijn artikel geeft Barrow de volgende relatie tussen $T(W)$ en $T(0)$:

$$\frac{T(0)}{T(W)} = 1{,}03 + 0{,}03\left(1 - \frac{W \cdot T(W)}{100}\right)^2. \qquad (*)$$

Dit is een benadering van de precieze relatie, maar voor onze doeleinden nauwkeurig genoeg; in het onderstaande kader vind je een afleiding van deze formule.

Om te zien wat een rugwind van 2 m/s oplevert, vullen we $W = 2$ in en lossen de resulterende vergelijking op naar $T(W)$: dit is een derdegraadsvergelijking die je het best met de SOLVE-functie van je rekenmachientje kunt oplossen. De winst is ongeveer 0,11 s, ten opzichte van geen wind. In 2009, in Berlijn, had Bolt al 0,9 m/s wind mee, in dit geval zou de maximale rugwind 0,05 s tijdwinst opleveren.

HET VERBAND TUSSEN *T*(*W*) EN *T*(0)

De afleiding van de relatie tussen $T(W)$ en $T(0)$ gaat met behulp van het vermogen P dat Bolt genereert en de energie E die hij verbruikt. Er geldt immers dat $E = P \cdot T$. Schrijf even $T = T(W)$ en $T_0 = T(0)$; dan zijn de verbruikte energieën gelijk aan $E_0 = PT_0$ en $E = PT$. Dan geldt natuurlijk $T_0/T = E_0/E$; we bekijken dat laatste quotiënt. De energie die Bolt gebruikt om de 100 m af te leggen noemen we e; dan geldt

$$E_0 = e + \rho \cdot c \cdot A \cdot V_0^2 \cdot 100$$

en

$$E = e + \rho \cdot c \cdot A \cdot (V - W)^2 \cdot 100.$$

In beide gevallen wordt dus de energie nodig om de luchtweerstand te overwinnen bij e opgeteld. Nu volgt dus, door delen, dat

$$\frac{T_0}{T} = \frac{e + \rho \cdot c \cdot A \cdot V_0^2 \cdot 100}{e + \rho \cdot c \cdot A \cdot (V - W)^2 \cdot 100}. \qquad (1)$$

We delen teller en noemer door e en korten $\rho \cdot c \cdot A \cdot 100/e$ even af met α; dan krijgen we

$$\frac{T_0}{T} = \frac{1 + \alpha V_0^2}{1 + \alpha (V - W)^2}.$$

Dit is een breuk van de vorm $(1 + x)/(1 + y)$, waarbij, zoals we zullen zien, de absolute waarden van x en y vrij klein zijn. In dat geval kunnen we $1/(1 + y)$ goed benaderen met $1 - y$ en de breuk dus met $(1 + x)(1 - y)$. In ons geval vinden we dan

$$\frac{T_0}{T} \approx (1 + \alpha V_0^2)(1 - \alpha (V - W)^2).$$

Nu halen we nog V buiten de haakjes in $(V - W)^2$; dat geeft

$$V^2\left(1 - \frac{W}{V}\right)^2 = V^2\left(1 - \frac{TW}{100}\right)^2,$$

want de snelheid V is natuurlijk gelijk aan $100/T$ m/s. Als we nu verder nog αV_0^2 afkorten met β,

LUCHTDICHTHEID De luchtdichtheid, ρ, vinden we via het getal β uit de afleiding in de vergelijking terug. Deze is afhankelijk van de hoogte waarop hardgelopen wordt. In 1968 werd in Mexico op 2240 m hoogte gelopen; de lage luchtdruk had voor velen een te gunstig effect op de tijden, daarom wordt een record alleen erkend als het op een baan gelopen wordt die niet hoger dan 1000 m ligt.

Op de website http://tinyurl.com/76w6gj6 kun je de luchtdichtheid op verschillende hoogtes laten bepalen. Deze kun je dan in de afleiding in het onderstaande kader invullen en kijken wat het effect op de tijd van Usain Bolt zal zijn.

De berekening van Barrow komt uit op een tijdwinst van 0,03 s op een hoogte van 1000 m.

ALLES BIJ ELKAAR Als Usain Bolt heel snel zou reageren, 2 m/s rugwind zou hebben en op een hoogte van 1000 m zou lopen, zou hij met dezelfde inspanning als in 2009 zijn tijd op de 100 m terug kunnen brengen van 9,58 tot 9,58 – 0,026 – 0,05 – 0,03 = 9,474 seconden (en dat wordt afgerond tot 9,47 s). ■

LITERATUUR Het artikel ‘How Usain Bolt can run faster – effortlessly’ van John D. Barrow verscheen in april 2012 in *Significance*, het tijdschrift van de Royal Statistical Society en de American Statistical Association. Een pdf is te downloaden via http://tinyurl.com/caejg4r.

komen we op de volgende uitdrukking:

$$\frac{T_0}{T} \approx (1+\beta)\left(1-\alpha V^2\left(1-\frac{TW}{100}\right)^2\right).$$

Dus het quotiënt is gelijk aan het verschil van

$$1+\beta-\alpha V^2\left(1-\frac{TW}{100}\right)^2$$

en

$$\beta\alpha V^2\left(1-\frac{TW}{100}\right)^2. \qquad (2)$$

We gaan de waarde van β bepalen en we zullen zien dat de tweede term verwaarloosbaar is en dat we αV^2 ook door β kunnen vervangen.

Sommige waarden kun je opzoeken: $\rho = 1{,}23$ kg/m^3 en $e = 230.000$ J. Andere moeten we schatten: $c = 1$ en $A = 0{,}6$ m^2 en $V_0 = 10$ m/s. Dan volgt $\beta \approx 0{,}034$ (reken maar na).

Als je voor V waarden dicht bij V_0 invult, zul je zien dat αV^2 nagenoeg gelijk is aan β. Dit levert de volgende vereenvoudigingen op: de uitdrukking in (2) is ongeveer β^2 en dat is veel kleiner dan β zelf, daarom kun je deze term weglaten. Voor het quotiënt T_0/T komen we dan op de volgende benaderende formule uit:

$$\frac{T_0}{T} = 1+\beta-\beta\left(1-\frac{TW}{100}\right)^2.$$

Door β af te ronden op twee cijfers achter de komma, komen we ten slotte uit op formule (*) op pagina 24.

Opgave 1. We hebben $1/(1 + y)$ benaderd met $1 - y$. Ga voor jezelf na hoe goed die benadering is, bijvoorbeeld door het verschil $1/(1 + y) - (1 - y)$ uit te schrijven en te kijken voor welke y dat verschil klein genoeg is.

Opgave 2 (voor onderzoekers). Je kunt ook direct met vergelijking (1) aan de slag gaan. Probeer, met behulp van een rekenmachientje, de waarde $T(W)$ direct uit die vergelijking op te lossen, voor diverse waarden van de parameters. Hoe erg wijken de benaderde antwoorden af van de echte?