

SUDOKU PROBLEEM

■ door Klaas Pieter Hart

Op 1 januari 2012 verscheen op www.arxiv.org, een online archief waarop wetenschappers hun preprints beschikbaar kunnen stellen, een artikel waarin een bekend probleem over sudoku's werd opgelost: hoeveel cijfers moeten er in een goed-gestelde sudoku minimaal gegeven worden? Met 'goedgesteld' wordt bedoeld dat de sudoku precies één oplossing heeft.

Tot dan toe was er niet veel meer bekend dan dat er zeker acht cijfers gegeven moeten worden: anders komen twee cijfers nog niet in het grid voor en kunnen die in het ingevulde grid verwisseld worden. Verder waren er een heleboel goed-gestelde puzzels met 17 gegeven cijfers, maar géén met 16 cijfers. Dat deed vermoeden dat goed-gestelde sudoku's met 16 gegeven cijfers niet bestaan.

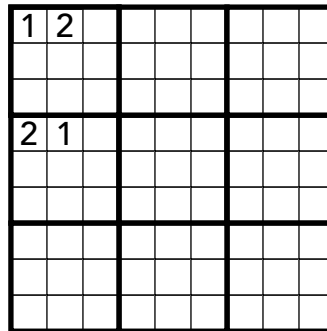
Dat is nu dus aangetoond. Gary McGuire, Bastian Tugemann en Gilles Civario van University College Dublin zijn alle puzzels met 16 gegeven cijfers nagelopen en hebben er geen met een unieke oplossing gevonden. Dat klinkt eenvoudiger dan het is. Er zijn 6.670.903.752.021.072.936.960 volledig ingevulde sudoku's. Verder kun je op $\binom{81}{16} = 33.594.090.947.249.085$ manieren uit elke puzzel een greep van 16 cijfers doen om te controleren of die 16 cijfers een puzzel met (alléén) het ingevulde grid als oplossing bepalen.

Om er een idee van te krijgen hoeveel handelingen dat zijn, vermenigvuldigen we benaderingen van die aantallen: $6,67 \times 10^{21} \times 3,35 \times 10^{16}$, hetgeen ongeveer $2,2 \times 10^{38}$ is.

Opgave. Bereken het aantal seconden in een jaar. Als je computer een miljoen gevallen per seconde kan onderzoeken, hoeveel jaar is hij dan met dit probleem bezig? Helpt het als hij er een miljard per seconden kan doen?

Als je de opgave hebt opgelost, zul je snappen dat de onderzoekers hun computers niet onmiddellijk aan het werk konden zetten; eerst moesten ze dat werk reduceren tot een doenbare hoeveelheid.

Om te beginnen: een heleboel ingevulde sudokugrids zijn eigenlijk hetzelfde: cijfers omwisselen, een blok van drie rijen – (123), (456) of (789) – herschikken, idem met kolommen, of de blok-



ken rijen zelf verplaatsen; dat geeft allemaal grids die je niet meer hoeft na te lopen. In 2006 was al uitgerekend dat er 'maar' 5.472.730.538 echt verschillende grids zijn; dat scheelt al een factor 10^{12} aan werk.

Het getal $\binom{81}{16}$ is ook nogal groot, maar ook hier is besparing mogelijk. Kijk naar het (gedeeltelijk ingevulde) grid in het plaatje hierboven. Als in de puzzel deze vier cellen leeg zijn, dan heeft die puzzel twee verschillende oplossingen: achteraf 1 en 2 in die vier cellen omwisselen geeft nog een oplossing. Zo kun je dus meteen een heleboel grepen van 16 cellen terzijde leggen.

Wat McGuire, Tugemann en Civario hebben gedaan, is methoden ontwikkelen om verzamelingen cellen op te sporen die zeker in de greep van 16 voor moeten komen. Ze verwachten dat die methoden ook in andere gebieden van toepassing kunnen zijn: overal waar een groot aantal zaken onderzocht en getest moeten worden is het nuttig te weten wat je *niet* hoeft te doen.

Uiteindelijk hebben computers in het Irish Centre for High-End Computing van januari tot december 2011 staan werken om alle mogelijkheden na te gaan. ■

Het artikel '*There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem*' van Gary McGuire, Bastian Tugemann en Gilles Civario is hier te vinden: arxiv.org/abs/1201.0749.